Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 33, No. 2, pp.97－104, June 2010.

조정가능한 M/G/1 대기모형에 삼변수 Min(N, T, D) 운용방침이 적용될 때 busy period 기대값의 상한과 하한 유도

이 한 교†

한남대학교 산업경영공학과

Derivations of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for the Triadic Min(N, T, D) Operating Policy applied to a Controllable M/G/1 Queueing Model

Hahn-Kyou Rhee†

Department of Industrial and Management Engineering, Hannam University

Using the known result of the expected busy period for the triadic Min (N, T, D) operating policy applied to a controllable M/G/1 queueing model, its upper and lower bounds are derived to approximate its corresponding actual value. Both bounds are represented in terms of the expected busy periods for the dyadic Min (N, T), Min (N, D) and Min (T, D) and simple N, T and D operating policies. All three input variables N, T and D are equally contributed to construct such bounds for better approximations.

Keywords : Expected Busy Period, Operating Policy, M/G/1, Upper and Lower Bounds

1. 서 론

서비스를 제공하는 곳에서 서비스를 받기 위해서는 기다려야하는 상황이 발생될 수 있는데 이러한 상황을 수리적인 방법으로 분석하여 유익한 정보를 도출하기 위해 개발된 대기이론에는 실제 상황과 유사한 다양한 형태의 대기모형들이 제시되어 활용되고 있다. 활용되고 있는 대기모형들은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없는 경우 서비스를 제공하는 사람, 즉 server가 어떠한 상태에 있느냐에 따라 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)과 새로운 형태인 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)으로 분류된다. 일반적인 대기모형에서는 server가 서비스를 기다리는 고객이 없더라도 서비스를 제공하는 창구에서 항상 대기상태를 유지해야 한다. 다시 말해 서비스를 기다리는 고객이 없어도 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server는 항상 준비상태에 있어야 한다. 이러한 조건으로 인해 고객이 없을 경우 server의 역할이 없어 유휴시간이 발생하기 때문에 server의 업무활용도가 낮아지게 마련이다. 일반적인 대기모형에서 나타나는 이러한 문제점을 개선할 수 있는 방법, 즉 server의 업무활용도를 향상시키기 위해 제안된 방법이 새로운 형태의 조정가능한 대기모형이라고 할 수 있다. 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server는 서

논문접수일 : 2010년 03월 09일　　게재확정일 : 2010년 04월 14일
† 교신저자 hkrhee@hnu.kr
※ 이 논문은 2010년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

비스를 제공하는 서비스창구를 즉시 폐쇄하고 다른 업무를 수행해야 한다. 이렇게 시스템운영 상태를 변형함으로서 server의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 그러나 일단 폐쇄된 서비스창구는 미리 정해진 조건이 만족되어야만 서비스를 기다리는 고객들에게 다시 서비스를 제공할 수 있도록 규정하고 있다. 다시 말해 서비스창구 폐쇄 후 서비스를 기다리는 고객이 있어도 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스 제공을 위한 서비스 창구의 재개는 허용되지 않는다. 이러한 미리 정해진 서비스창구의 재개조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 부른다. 따라서 조정가능한 대기모형의 운용방침에는 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 위한 조건이 포함되어 있기 때문에 대기모형의 운용에 매우 중요하기 때문에 다양한 형태의 운용방침이 개발되어 활용되고 있다(Teghem[14]). 특히 운용방침에 시스템 상태를 표현하는 입력변수가 한 개가 포함되어 있는 경우를 단순 운용방침(simple operating policy)이라고 하며 가장 대표적인 단순 운용방침에는 아래와 같이 정의되는 N, T 그리고 D 운용방침이 있다.

(i) N 운용방침 : Yadin and Naor[15]가 제안한 것으로, 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 서비스 제공이 재개되어 또다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

(ii) T 운용방침 : Heyman[5]등이 제안한 것으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 재개하여 서비스의 제공이 재개된 후 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 그러나 T 단위시간이 경과된 후 서비스를 기다리는 고객이 없을 경우 또 다시 T 단위시간 혹은 또 다른 T 단위시간 등 서비스를 기다리는 고객이 최소한 한 명이상이 있을 때까지 서비스창구가 폐쇄된다.

(iii) D 운용방침 : Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 서비스 제공이 재개되며 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

단순 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 고객이 없어도 server가 항상 대기상태에 있는 일반적인 대기모형보다는 server를 효과적으로 활용할 수 장점이 분명히 있다. 그러나 시스템의 상태를 나타낼 수 있는 많은 조건들 중에서 단순히 한 가지 시스템 상태에 따라 폐쇄된 서비스 창구에서 서비스 제공이 재개되기 때문에 시스템 운용에 유연성이 부족한 점이 지적될 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위한 방법으로 현재 적용되고 있는 단순 운용방침에 또 다른 하나의 시스템 내부의 조건을 나타내는 단순 운용방침을 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee, and Sivazlian[4]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스창구가 재개될 수 있는 조건에 유연성이 추가된 이변수 운용방침은 선정된 두 개의 단순 운용방침들이 특이한 형태로 결합된 것으로 여기에는 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$ 그리고 $Min(T, D)$ 운용방침 등이 있다. $Min(N, D)$ 운용방침은 다음과 같은 의미로 정의되며 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]).

$Min(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 기다리는 고객수가 N 명이 되거나 혹은 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 다시 말해서 N 혹은 D 운용방침에 따른 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되면 즉시 폐쇄된 서비스 창구는 서비스 제공이 재개되어 다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 D 운용방침과 동일함을 쉽게 확인 할 수 있다.

이변수 운용방침과 유사한 형태는 설비 교체 관리 분야의 Sivazlian and Iyer[13]의 이변수 설비교체 운용정책 그리고 대기이론 분야의 Rhee and Sivazlian[12], Kell xa [7], Brill and Harris[2], Kella and Yachiali[6] 등을 예로 들 수 있다. 그러나 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 고객 혹은 server에게 어느 정도의 유연성이 부여된 것은 장점으로 평가될 수 있지만 입력변수의 수가 증가함에 따라 필요한 특성치를 유도하는 과정에서는 복잡성이 증가하여 많은 어려움이 수반되는 단점이 있다.

특히 최근에는 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순운용방침이 모두 결합된 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee and Oh[11, 12]에 의해 제안되었다. 그 중 하나가 아래와 같이 정의되는 $Min(N, T, D)$ 운용방침인데 다양한 시스템 상태를 고려하기 때문에 새로이 추가되는 유연성 확보라는 장점과 이로 인해서 분석의 과정이 이변수 운용방침의 경우보다는 더욱 더 복잡하고 어려워지는 단점이 서로 상충되는 문제점이 포함되어 있다.

$Min(N, T, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객수가 N명 이상이 되거나 혹은 $mT(m=1, 2, 3 \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명의 고객이 도착하거나, 그리고 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 세 가지 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$ 운용방침과 동일하고, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(D, T)$ 운용방침과 동일하며 $T \to \infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다. 따라서 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$, $Min(D, T)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침의 일반형으로 볼 수 있다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 직접 활용하기 위해서는 선정된 운용방침이 적용되었을 때 기대되는 총비용을 가장 적게 하는 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 구한 다음 그 결과에 따라 운용되어야 한다. 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 유도하기 위한 과정에는 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기대값, 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기대값, 등이 필요하다. 여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구를 폐쇄할 때까지 소요되는 시간간격을 말한다,

위에서 언급된 시스템 특성치는 한사람의 고객이 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 필요한 비용, 한 사람의 server가 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용 그리고 서비스창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용과 결합되어 시스템 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하게 된다. 따라서 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하기 위해 필요한 다양한 시스템 특성치는 운용방침에 입력변수의 수가 증가하면 증가할수록 유도과정에서 발생되는 어려움과 복잡한 정도가 매우 커지기 때문에 실제상황에서 신속하게 적용하기가 매우 어려워지는 문제점이 있다. 다시 말해 이변수 혹은 삼변수 운용방침이 적용될 때와 단순 운용방침이 적용될 때의 경우를 살펴보면 쉽게 확인할 수 있다(Rhee and Oh[11]). 이러한 문제점을 해결하기 위한 하나의 방편으로 가장 많은 유연성을 지닌 삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침을 실제상황에서 쉽게 그리고 신속하게 적용하기 위한 busy period의 기대값의 근사값을 확보할 수 있는 상한과 하한을 단순 운용방침과 이변수 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값으로 표현함을 본 연구의 목적으로 설정한다. 여기에는 객관성과 정확성을 담보하기 위해 삼변수 운용방침에 포함된 모든 단순 N, T 그리고 D 운용방침의 역할이 균등하게 분배되어야 한다는 조건이 부여된다. 또한 기존의 알려진 단순 혹은 이변수 운용방침의 busy period 기대값을 활용함으로서 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값 등의 또 다른 시스템 특성치들의 근사값을 구할 수 있는 상한과 하한의 유도과정에서 필요한 접급방법을 개발하여 제시함을 또 다른 목적으로 설정한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태(steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형에 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 고객들은 포아손과정(Poisson process)에 따라 대기시스템에 도착하며, 연속된 두 고객의 평균 도착시간간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $j=0, 1, 2, \cdots$에 대해 $N(t)$의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t)=j] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^j}{j!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_n(T) = P[N(T) \ge n] = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호독립(independent)이며 동일한 분포(identical distribution)라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시한다. 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(j)}(D) = \int_0^D [f_S(t)]^{*(j)} dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(j)}$은 $f_S(\cdot)$의 j차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) $E[B_o]$: 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period 기대값을 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[8] or Conolly[3]).

$$E[B_o] = \frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

4. 단순, 이변수 그리고 삼변수 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값

Gakis, Rhee, and Sivazlian[4]의 결과에 따르면, 만약 단순 N, T 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period 기대값을 각각 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$라고 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N] = NE[B_o] \tag{5}$$

$$E[B_T] = \frac{\lambda TE[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{6}$$

$$E[B_D] = E[B_o]\sum_{j=1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) \tag{7}$$

또한 이변수 운용방침 $Min(N, D)$, $Min(N, T)$ 그리고 $Min(T, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Min(N,T)}]$ 그리고 $E[B_{Min(T,D)}]$라고 하면 다음과 같이 주어진다(Rhee[9]).

$$E[B_{Min(N,D)}] = E[B_o]\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \tag{8}$$

$$E[B_{Min(N,T)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{9}$$

$$E[B_{Min(T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \tag{10}$$

삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값을 $E[B_{Min(N,T,D)}]$라 정의 하면 다음과 같이 주어진다(Rhee and Oh[11]).

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \tag{11}$$

여기에서 $E[B_o]$는 일반적인 M/G/1 대기모형의 busy period 기대값을 나타내며 식 (4)에 주어져 있고 각 busy period 기대값에 다양한 형태로 포함되어 있는 $H_j(T)$와 $G^{(j-1)}(D)$는 식 (2)와 식 (3)에 각각 정의되어 있으며 또한 아래와 같은 중요한 특징을 포함하고 있다.

(i) $H_0(T) = 1$

(ii) $H_1(T) = P[N(T) \geq 1] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!}$
$$= 1 - P[N(T) = 0] = 1 - e^{-\lambda T} \tag{12}$$

(iii) $j = 1, 2, 3, \cdots$에 대해 $H_j(T) \geq H_{j+1}(T)$, 즉
$$1 \geq H_1(T) \geq H_2(T) \geq H_3(T) \geq \cdots \tag{13}$$

(iv) $H_j(T) = P[N(t) \geq j]$ 이기 때문에
$$\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) = \sum_{j=1}^{\infty} P[N(t) \geq j] = E[N(t)] = \lambda T \tag{14}$$

(v) $G^{(0)}(D) = 1$

(vi) $j = 1, 2, 3, \cdots$에 대해 $G^{(j)}(D) \geq G^{(j+1)}(D)$, 즉
$$1 \geq G^{(1)}(D) \geq G^{(2)}(D) \geq G^{(3)}(D) \geq \cdots \tag{15}$$

5. $Min(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값의 상한 설정

조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 때 busy period 기대값 $E[B_{Min(N,T,D)}]$은 식 (11)에서 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D)$$

(i) $H_j(T)$의 정의에 따라 관계식 (13)에 제시되어 있듯이 $H_1(t) \geq H_2(T) \geq \cdots$가 성립한다. 따라서 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 다음과 같은 부등식을 만족한다,

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \leq \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_1(T)\, G^{(j-1)}(D) \tag{16}$$

또한 관계식 (12)에서 제시된 $H_1(T) = 1 - e^{-\lambda T}$를 사용하면 부등식 (16)은 아래와 같이 표현된다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \leq \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}(1-e^{-\lambda T})\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) = E[B_0]\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \tag{17}$$

또한 식 (8)에서 주어진 $E[B_{Min(N,D)}]$의 결과를 부등식

(17)에 대입하면 아래와 같이 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 상한을 얻을 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le E[B_{Min(N,D)}] \tag{18}$$

(ii) 관계식 (2)와 식 (3)에 정의되어 있는 $H_j(T)$와 $G^{(j-1)}(D)$를 사용하면 $H_j(T)G^{(j-1)}(D) \ge 0$가 성립함을 확인할 수 있다. 따라서 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 아래와 같은 부등식을 만족한다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \tag{19}$$

따라서 부등식 (19)는 식 (10)의 결과를 사용하면 아래와 같은 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 상한을 얻을 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le E[B_{Min(T,D)}] \tag{20}$$

(iii) 식 (15)에 주어진 $1 \ge G^{(j)}(D) \ge G^{(j-1)}(D)$를 사용하면 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 아래와 같은 부등식을 만족한다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{21}$$

식 (9)에서 주어진 결과를 사용하면 부등식 (21)로부터 아래와 같은 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 상한을 얻을 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le E[B_{Min(N,T)}] \tag{22}$$

부등식 (18), 식 (20)와 식 (22)에서 주어진 결과를 사용하여 좌우변을 합하면

$$3E[B_{Min(N,T,D)}] \le E[B_{Min(N,D)}] + E[B_{Min(T,D)}] + E[B_{Min(N,T)}]$$

따라서 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 상한을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \le \frac{E[B_{Min(N,D)}] + E[B_{Min(T,D)}] + E[B_{Min(N,T)}]}{3} \tag{23}$$

6. $Min(N,T,D)$ 운용방침에 따른 Busy Period 기대값의 하한 설정

식 (10)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[B_{Min(N,T,D)}] &= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \\ &= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}D - \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D)\right\} \\ &= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \\ &\quad - \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \end{aligned} \tag{24}$$

그런데 식 (10)의 결과를 식 (24)에 대입하면

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = E[B_{Min(T,D)}] - \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \tag{25}$$

(i) 식 (25)에 포함된 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D)$과 관계식 (13)에서 제시된 $H_1(t) \ge H_2(T) \ge \cdots$를 사용하면 다음과 같은 부등식을 구축할 수 있다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \le \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_1(T)G^{(j-1)}(D)$$

그런데 관계식 (12)에서 주어진 $H_1(T) = 1-e^{-\lambda T}$를 위의 부등식에 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \le E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) \tag{26}$$

또한 아래의 관계식을 사용하면

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) = \sum_{j=1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) - \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D)$$

부등식 (26)은 다음과 같이 주어진다,

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)G^{(j-1)}(D) \le E[B_0]\left\{\sum_{j=1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) - \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D)\right\}$$

$$= E[B_0]\sum_{j=1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) - E[B_0]\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \quad (27)$$

따라서 부등식 (27)은 식 (5)와 식 (8)에서 주어진 결과를 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \le E[B_D] - E[B_{Min(N,D)}] \quad (28)$$

부등식 (28)의 결과를 부등식 (25)에 대입하면 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 하한을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[B_{Min(N,T,D)}] &\ge E[B_{Min(T,D)}] - \{E[B_D] - E[B_{Min(N,D)}]\} \\ &= E[B_{Min(T,D)}] + E[B_{Min(N,D)}] - E[B_D] \quad (29) \end{aligned}$$

(ii) 식 (25)에 포함된 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D)$과 모든 $j=1, 2, 3, \cdots$에 대해 $G^{(j-1)}(D)$의 정의에 따라 유도되어 관계식 (15)에 제시되어 있는 $G^{(j-1)}(D) \le 1$를 사용하면 다음과 같은 부등식을 구축할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \\ &\qquad \le \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_1(T) \quad (30) \end{aligned}$$

또한 아래의 관계식을 사용하면

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) - \sum_{j=1}^{N} H_j(T)$$

부등식 (30)은 다음과 같이 주어진다,

$$\begin{aligned} &\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \\ &\le \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) - \sum_{j=1}^{N} H_j(T) \right\} \\ &= \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) - \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=1}^{N} H_j(T) \quad (31) \end{aligned}$$

그런데 관계식 (14)에서 주어진 $\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) = \lambda T$를 부등식 (31)에 대입하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \\ &\le \frac{\lambda T E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} - \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=1}^{N} H_j(T) \quad (32) \end{aligned}$$

식 (6)와 식 (9)에서 주어진 결과를 부등식 (32)에 대입하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \\ &\qquad \le E[B_T] - E[B_{Min(N,T)}] \quad (33) \end{aligned}$$

부등식 (33)의 결과를 부등식 (25)에 대입하면 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 하한은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} E[B_{Min(N,T,D)}] &\ge E[B_{Min(T,D)}] - \{E[B_T] - E[B_{Min(N,T)}]\} \\ &= E[B_{Min(T,D)}] + E[B_{Min(N,T)}] - E[B_T] \quad (34) \end{aligned}$$

(iii) $\sum_{j=1}^{N}\{1 - H_j(T)\}\{1 - G^{(j-1)}(D)\}$를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N}\{1 - H_j(T)\}\{1 - G^{(j-1)}(D)\} \\ &= \sum_{j=1}^{N}\{1 - H_j(T) - G^{(j-1)}(D) + H_j(T)\, G^{(j-1)}(D)\} \\ &= N - \sum_{j=1}^{N} H_j(T) - \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) + \sum_{j=1}^{N} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} H_j(T)\, G^{(j-1)}(D) &= -N + \sum_{j=1}^{N} H_j(T) + \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N}\{1 - H_j(T)\}\{1 - G^{(j-1)}(D)\} \quad (35) \end{aligned}$$

식 (35)의 결과를 식 (11)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T,D)}]$에 대입하면

$$\begin{aligned} E[B_{Min(N,T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \Bigg\{ &-N + \sum_{j=1}^{N} H_j(T) + \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \\ &+ \sum_{j=1}^{N}\{1 - H_j(T)\}\{1 - G^{(j-1)}(D)\} \Bigg\} \quad (36) \end{aligned}$$

그런데 $(1-e^{-\lambda T}) \le 1$이므로 식 (36)은 다음과 같은 부등식으로 표현된다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] \ge E[B_0] \Bigg\{ -N + \sum_{j=1}^{N} H_j(T) + \sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}[1-H_j(T)][1-G^{(j-1)}(D)]\Big\}$$

$$=-N[B_0]+E[B_0]\sum_{j=1}^{N}H_j(T)+E[B_0]\sum_{j=1}^{N}G^{(j-1)}(D)$$

$$+E[B_0]\sum_{j=1}^{N}[1-H_j(T)][1-G^{(j-1)}(D)]\Big\} \quad (37)$$

또한 부등식 (37)에 식 (5)와 식 (8)에서 주어진 결과를 대입하면

$$E[B_{Min(N,T,D)}]\geq E[B_{Min(N,D)}]-E[B_N]+E[B_0]\sum_{j=1}^{N}H_j(T)$$

$$+E[B_0]\sum_{j=1}^{N}[1-H_j(T)][1-G^{(j-1)}(D)]\Big\}$$

$$\geq E[B_{Min(N,D)}]-E[B_N]+\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_j(T)$$

식 (9)의 결과를 위의 부등식에 대입하면 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 하한은 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}]\geq E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(N,T)}]-E[B_N] \quad (38)$$

마지막으로 부등식 (29), 식 (34) 그리고 (38)의 결과를 사용하여 좌우변을 합하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$3E[B_{Min(N,T,D)}]\geq$$
$$2(E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(T,D)}])$$
$$-(E[B_N]+E[B_T]+E[B_D])$$

따라서 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 하한을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}]\geq$$
$$\frac{2}{3}(E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Min(T,D)}])$$
$$-\frac{1}{3}(E[B_N]+E[B_T]+E[B_D])$$

7. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값의 상한과 하한을 단순 N, T 그리고 D 운용방침 그리고 이변수 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$ 그리고 $Min(T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값으로 표현하였다. 이를 사용하면 현장에서 보다 수월하게 그리고 신속하게 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값의 근사치를 확보할 수 있음을 확인하였다. 특히 상한과 하한의 값에는 고려된 모든 단순 그리고 이변수 운용방침이 동등하게 기여하고 있음을 또한 확인할 수 있다. 이를 기초로 더욱더 실제값에 근접된 상한과 하한의 값을 유도할 수 있는 근거를 제시하였다. 둘째, 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값의 상한과 하한의 값을 기초로 다른 시스템 특성치, 즉 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값 등의 근사치를 확보할 수 있는 상한과 하한의 유도에 적용 가능성을 제시하였다. 마지막으로 또 다른 형태의 삼변수 운용방침 즉, 세 종류의 단순 운용방침이 모두 만족되어야 서비스 제공이 재개되는 $Max(N, T, D)$ 또는 세 종류의 단순 운용방침 중 두 종류가 만족되어야 서비스 제공이 재개되는 $Med(N, T, D)$이 적용되었을 경우 busy period 기대값의 상한과 하한의 값을 유사한 접근 방법으로 유도할 수 있다는 가능성을 제시하였다.

참고문헌

[1] Balachandran, K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] Brill, P. H. and Harris, C. M.; "Waiting Times for M/G/1 Queues with Service Time or Delay-Dependent Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 39 : 75-787, 1992.

[3] Conolly, B.; Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY, 1975.

[4] Gakis, K. G., Rhee, H. K., and Sivazlian, B. D.; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[5] Heyman, D.; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[6] Kella, O. and Yechiali, U.; "Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 35 : 23-34, 1988.

[7] Kella, O.; "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[8] Kleinrock, L.; Queueing Systems, Theory, John Wiley

and Sons, New York, NY, 1, 1975.

[9] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies," 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739, 1997.

[10] Rhee, H. K.; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침(Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교논문집, 32 : 141-153, 2002.

[11] Rhee, H. K. and Oh, H. S.; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[12] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[13] Sivazlian, B. D. and Iyer, S. N.; "A Dyadic Age-Replacement Policy for a Periodically Inspected Equipment Items Subject to Random Deterioration," *European Journal of Operational Research*, 6 : 315-320, 1981

[14] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[15] Yadin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963.