수학적 증명에서의 물리적 논증 : 삼각형의 무게중심

김 성 아*
동국대학교 경주캠퍼스

Arguments from Physics in Mathematical Proofs : the Center of Gravity of a Triangle

Seong-A Kim*
Dongguk University, Gyeongju

Abstract: We agree with Hanna and Jahnke's assertion on the use of arguments from physics in mathematical proofs and analyze their educational example of the use of arguments from physics in the proof of the center of gravity of a triangle. Moreover, we suggest practical models for the center of gravity of a triangle for the demonstration in a classroom. Comparing with the traditional mathematical arguments, the role of concepts and models from physics in arguments from physics will be clearly pointed out. Also, the necessity for arguments from physics in the classroom will be discussed in this paper.

Key words: mathematical proof, argument from physics, center of gravity, median of a triangle, center of gravity of a triangle

I. 서 론

그리스 시대부터 현대에 이르기까지 수학은 인간의 논리적 사고력을 키우는데 가장 적합한 분야로 인정되고 교육되어 왔다. 수학을 통해 계산 능력뿐만 아니라, 기하, 대수, 해석학 등의 기본 개념을 통해 논리적 사고 및 연역적, 추상적 사고를 점차적으로 배우게 된다. 그러나 그리스 시대부터 기하교육의 핵심이었던 유클리드의 원론을 통한 교육은 지나치게 연역적, 형식적이어서 수학에 대한 이해나 흥미를 느끼기도 전에 학생들에게 수학에 대한 좌절감과 혐오감을 주고 수학을 기피하게 하는 원인이 되기도 하였다. 이에 대한 반성을 통해 18세기에 클레로는 역사 발생적 원리에 입각하여 직관과 논리가 조화된 자연스럽고 실용적이기도 한 기하학 원론을 저술하였으나 널리 쓰이지는 못하였다.

20세기 초 수학교육 근대화 운동의 선구자들인 페리, 무어, 클라인 등은 모두 학생들의 실험, 실습을 통해 실용적인 지식을 체득하게 하는 수학교육을 주창하였다. 특히 무어는 수학교사의 양성과 학교에서의 수학지도에서 실험실법을 채택해야함을 주장하면서 대수, 기하, 물리는 서로 긴밀하게 관계되어 있어 유기적으로 연결된 하나의 과정으로 지도해야함을 강조하였다(황혜정 등, 2009). 그 후 미국의 새수학 운동이 지나치게 형식적인 현대수학을 도입하여 실패를 겪은 후, 현재에는 대체로 미국 수학교사협회(NCTM)의 규준(Standards)에서 제시한 방향이 주목을 받고 있다(김수미, 1999). 이 규준에서 문제해결이 학교수학의 초점이 되어야 함과 수학교사의 전문성에 대한 제고를 강조하고 있음을 볼 때, 대학에서는 예비수학교사들이 다양한 상황에서 수학지식을 폭넓게 적용할 수 있도록 수학과 현상 그리고 타교과와의 연관성에 대한 안목을 기를수 있도록 지도해야할 것이다. 최근 수학 교육자들은 다양한 응용에 기초한 수학교육을 모색하고 있다. 수학과 다른 과학들 간의 밀접한 관계를 인식하고 이용하며, 현실을 수학화의 원천으로 이용하는 현실주의적 수학교육(Realistic Mathematics Education, RME) 등이 이런 흐름이라 할 수 있다(Latterell, 2004).

수학 전반이 논리적인 사고를 요구하지만 특히 수학적 정리를 제시하고 증명하는 과정에서 현저하게 요구된다. 흔히 학생들은 증명이 왜 필요한지를 이해

*교신저자: 김성아(sakim@dongguk.ac.kr)
**2010년 05월 17일 접수, 2010년 06월 28일 수정원고 접수, 2010년 06월 29일 채택

하지 못하는 경우가 많다. 경험적 사례들로부터 귀납적인 결론에 이르는 통찰도 중요하지만, 이것이 개별적인 경우만이 아니라, 일반적으로 타당하다는 것을 논리적으로 증명하는 것도 이에 못지않게 중요하다. 증명은 어떤 정리의 내용이 단순히 경험법칙이 아니라 논리적 귀결임을 확인하는 것이다. Villiers(1990)에 따르면 증명의 기능은 정리에 대한 논리적 검증에만 그치는 것이 아니라, 정리의 내용이 어째서 옳은지에 대한 설명과 통찰의 제공, 수학적 체계로의 구조화, 새로운 수학적 지식의 발견 및 전달 등에 있다고 한다. 특히 중등 수학에서는 형식적 증명보다는 정리의 내용에 대한 이해와 설명을 충분히 제공하는 증명이 더 유익하다고 본다.

Hanna와 Jahnke(2002a)는 그들의 논문 '수학적 증명에서의 물리적 논증: 교육학적 전망'에서 먼저 수학 연구와 교육에서의 역사적 사례들을 들어 수학과 물리학의 긴밀한 관계에 대해 언급한 후, 수학의 증명 지도에 물리적 논증을 도입하여 이용하는 몇 가지 예를 자세히 다루고 있다.[1] 이를 통해 수학적 정리의 증명에 있어 물리적 개념과 모델을 이용한 물리적 논증이 정리의 내용에 대해 참신한 설명과 폭넓은 관점을 제공하여 정리의 이해를 깊게 하고, 수학적 지식의 발견과 의사소통에 기여하는 면에서 큰 잠재적 유용성을 가진 것으로 제시하고 있다.

본 연구는 문헌연구로, 우선 Hanna와 Jahnke (2002a)의 주장에 동의하면서, 그들의 논문에서 취급된 예들 중 특히 무게중심의 개념을 이용한 물리적 논증을 통해 삼각형의 세 중선이 한 점에서 교차한다는 초등기하의 정리를 증명하는 예를 자세히 분석하고자 한다. 아울러 무게중심에 관한 중학교 교과서 단원과 국내 문헌을 살펴보고, 이런 전형적인 예를 자세히 분석함으로써 전통적인 수학적 논증과 비교하여 물리적 논증에 있어서 물리적 개념과 모델의 역할을 명백히 드러내고자 한다. 또한, 본 논문에서는 Hanna와 Jahnke가 제안한 가상적인 모델과 달리 학생들이 현실세계 속에서 경험할 수 있는 물리적 모델을 설계하고 이 모델의 활용에 있어 필수적인 주의 사항들도 함께 제시하고자 한다. 이는 직관적인 물리적 논증을 교실에서 학생들에게 제시하여 무게중심의 개념에 대하여 통합적 교수학습을 수행하는데 필요한 지식이 될 것이다.

Ⅱ. 본 론

1. 무게중심에 관한 가정

물리적 개념인 무게중심[2]을 이용한 논증으로 초등기하의 정리를 이해하기 위해 먼저 무게중심에 관련된 가정을 살펴보자[3]:

A1. 질점들이 기하적으로 배치(선, 평면 도형, 또는 입체)되어 이루어진 질점계는 단 하나의 무게중심을 갖는다.

A2. 하나의 질점계의 무게중심을 찾기 위해서 전체 질점계를 몇 개의 부분계의 조합으로 보고, 먼저 각 부분계의 무게중심을 찾는다. 전체계의 무게 중심은 각 부분계의 무게 중심에 각 부분계의 전 질량이 놓여 있는 것으로 간주한 질점계의 무게중심과 같다.

A3. 무게중심을 결정하는 데에는 지레의 법칙이 이용된다. 가령, 무게의 비가 1:2인 두 질점의 무게중심은 두 질점을 잇는 선분을 2:1로 분할하는 점이다.

이상의 가정은 물리학에서 무게중심의 개념에서 파생되는 결과들이다. Hanna와 Jahnke (2002a)는 이 가정들을 하나의 수학적 정리로서 받아들이고, 초등기하의 정리를 증명하는데 이용할 것을 제안한다.

2. 물리적 모델을 이용한 논증의 예 (Hanna와 Jahnke의 모델)

전형적인 예로서 삼각형의 중선들이 한 점에서 만난다는 초등기하의 정리를 살펴보자. 무게중심의 개념을 적용하여 이 정리를 증명하기 위해서 Hanna와 Jahnke는 다음과 같은 물리적 모델(이하 HJ모델이라 부름)을 생각한다.

---

1) Polya의 책 '수학과 개연추론'에서도 물리 법칙을 수학적 증명에 적용하는 인상적인 예들을 볼 수 있다.

2) 더 정확히 말하자면 질량중심을 이용하는 것이다. 그런데 지구표면 근처에서는 물체의 무게중심이 질량중심과 일치하는 것으로 볼 수 있기 때문에, 보통의 수학 책들에서 소개하듯이 무게중심을 생각해도 무방하다.

3) 물체를 질점계로 볼 때, 질점계의 질량중심의 정의로부터 가정 세 개가 쉽게 따라 나온다. 참고로, N개의 질점 $m_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ 들이 위치 $\vec{r_i}$ 에 놓여 있는 질점계의 질량중심 $\vec{r_c}$ 의 정의는 다음과 같다: $\vec{r_c}=(m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}+\cdots+m_N\vec{r_N})/(m_1+m_2+\cdots+m_N)$ (Stewart, James, 2001).

M1. 삼각형의 각 꼭지점에 무게 1인 같은 질점들이 놓여 있다. (그림 1)
즉, 각 질점의 무게는 $w_A = w_B = w_C = 1$ 이다.
M2. 이 질점들은 무게가 없는 고정된 막대들로 연결되어 있다.

이 물리적 모델에서 (물리적) 무게중심은 가정 A1-A3를 이용하여 찾을 수 있고, 이 무게중심이 삼각형의 세 중선의 유일한 교차점임을 다음과 같은 논증을 통해 알 수 있다.

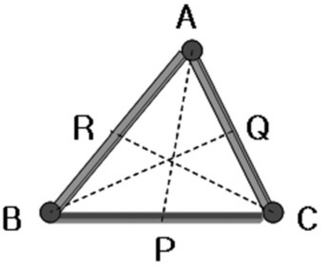

그림 1 꼭지점에 같은 질량이 놓여 있는 삼각형 (모델 M1-M2)

첫째, [그림 1]에서, 부분계인 변 BC의 무게중심을 찾자. 가정 A3를 이용하면, M1에 의해, 한 변 BC의 중점 P가 그 변의 무게중심이다. 즉, BP=PC이다. 그리하여, 꼭지점 B, C에 각각 무게 1인 질점을 놓는 대신에 이 중점 P에 무게 2인 질점이 놓인 것으로 볼 수 있다. 이 단계에서 M2도 사용되었음을 주목하자.

둘째, 이 중점 P를 세 번째 꼭지점 A와 연결한 선은 하나의 중선이다. 그런데 A2에 의해 전체 삼각형의 무게중심은 바로 이 중선 위에 있어야 한다. 또한 무게중심은 지레의 법칙 A3에 의해 중선 AP를 2:1로 분할한다.

셋째, 다른 두 변에 대해서도 똑같은 작업을 수행할 수 있고, 삼각형의 무게중심은 유일하므로(A1), 세 중선들은 한 점, 삼각형의 무게중심에서 교차한다.

그러나, HJ 모델은 삼각형의 꼭지점 위에만 무게를 놓은 가상적인 모델로 학생들이 현실적으로 받아들이기 힘든 모델이다.

3. 물리적 개념과 모델의 역할

임의의 삼각형에서 세 중선을 그리면 한 점에서 교차한다는 기하적 정리는 처음 배우는 학생들에게 당연하게 느껴지기 보다는 오히려 놀랍게 여겨지는 사실이며 직관적으로도 자명하지 않다. 그런데, HJ 모델을 이용한 논증에서는 세 중선이 한 점에서 교차한다는 사실은 무게중심이 세 중선 위에 동시에 놓여 있고, 또 유일하다는 가정(A1)에 의해 설명되고 있다. 이런 물리적 논증을 처음 접하는 학생들의 반응은 다양할 것으로 생각된다. 발상의 참신함에 놀랄 수도 있고, 이용된 물리적 모델의 가정들 M1, M2가 작위적으로 느껴질 수도 있다. 이 때문에 어떤 학생에게는 오히려 거의 증명이 되지 않은 것처럼 느껴질 수도 있을 것이다. 또한 이러한 물리적 모델과 논증을 통해서 삼각형의 세 중선이 각 중선을 2:1로 분할하는 한 점에서 교차한다는 기하적 정리가 '증명' 된 것인지 의문을 가질 수도 있다. 그런데 이런 의문에는 이유가 없지 않다고 본다. 왜냐하면, 증명해야할 정리는 순수하게 기하적인 것으로서 삼각형의 꼭지점이나 변에 질량이 어떤 식으로 분포되든지 이와는 상관없이 성립하는 정리이기 때문이다. 가령, 삼각형 모양의 판의 질량분포가 변하면 이 판의 무게중심의 위치도 변하지만, 도형 삼각형의 무게중심은 늘 세 중선의 교점으로 결정된다. 그러므로, 위 논증에서 물리적 모델의 역할이 과연 무엇인지를 분명히 할 필요가 있다.

위의 단계적 논증을 검토해보면 물리적 논증에 사용된 HJ 모델-각 꼭지점에 같은 질량을 갖는 질점이 놓여 있고(M1), 각 꼭지점은 질량이 없는 고정된 막대로 연결되어 있다(M2)-은 오로지 삼각형의 세 중선의 교점이 무게중심이 되도록 고안된 것임을 알 수 있다. (모델의 성격으로, M1과 M2에 의해 무게중심은 기하적 중선들 위에 있게 된다.) 다시 말하자면, 무게중심에 관한 가정들 A1-A3를 받아들이는 한, 논리적 결과로서 삼각형의 물리적 무게중심이 세 중선의 교점이 되도록 모델을 만든 것이다. 결국, 증명의 핵심원리는 무게중심에 관한 가정들 속에 이미 들어 있고, 위의 특정한 질량분포의 모델은 기하적 정리를 증명하는 기능을 발휘하는 것이다.

위의 물리적 논증은 기하적 정리를 간단한 물리적 모델로써 구체화시키는 장점을 가지고 있지만, 실제 증명의 핵심원리는 무게중심에 관한 가정(실은 물리적 무게중심의 정의) 속에 숨어 있다. 이런 점에서 위의 물리적 모델을 사용한 물리적 논증은 겉보기에만 간단할 뿐이며, 근본적인 어려움은 고스란히 무게중

심에 관한 가정으로 넘겨진 것이다.[4] 이 기하적 정리에 대한 진정한 이해는 바로 무게중심에 관한 가정들을 이해하는 것으로 바뀌어졌는데, 처음 배우는 학생들에게 이런 이해를 기대하기는 어렵다고 본다. 따라서 위의 HJ 모델을 이용한 논증은 많은 학생들에게 일단 쉽게 접근할 수 있는 증명을 제공한다고 볼 수 있으나, 좀 더 현실적인 모델을 원하는 소수의 학생들에게는 또 다른 도전적인 과제를 제시한다고 볼 수 있다.

물리적 모델의 역할은 형식적인 연역적 증명에 앞서 직관적 증명으로 학생이 물리적 환경과 상호작용하는 구체적인 활동을 통하여 주어진 명제가 먼저 참인지를 확인할 수 있도록 하는데 있다. Freudenthal (1991)은 수학의 본질은 수학적 체계를 이루는 요소나 관계, 법칙, 즉 수학적 활동의 산물인 수학적 체계가 아니라 수학적 활동 그 자체라고 하였다. 물리적 모델을 통하여 학생들이 교실에서 활동을 통한 수학의 본질을 체험하게 할 수 있을 것이다.

4. 수학적 증명과의 비교

우리나라 중등 교과서 8-나, Ⅲ장 닮은 도형은 1절에서 도형의 닮음, 특히 삼각형의 닮음조건을 다루고, 2절에서 평행선과 선분의 길이의 비를 다루고 있다. 2절에서 삼각형의 중점연결정리와 삼각형의 닮음을 이용하여 삼각형의 세 중선이 한 점에서 교차하는 것을 증명하고, 이 점을 무게중심으로 지칭한다(이준열 외, 2003; 최용준, 2005). 유감스럽게도 이 교과서들에서는 무게중심의 개념에 대한 물리적인 설명은 없다. 즉, 세 중선의 교점의 이름을 왜 무게중심이라고 부르는지에 대한 설명이 없다.

한편, 2007 개정교육과정에 따라 초판으로 발행된 중학교 수학 2 교과서(김원경 외, 2010; 최용준 외, 2010)를 살펴보면, 삼각형의 무게중심 단원의 개념탐구(또는 생각열기)에서 두꺼운 종이로 만든 삼각형의 두 중선들의 교점이 나머지 한 중선과 만나는지 확인하게 한 후에, 연필 끝 위에 또는 집게손가락 끝 위에 그 교점이 오도록 삼각형을 올려놓고 종이 삼각형이 평형이 되는지 묻는 정도로 무게중심을 소개하고 있다. 그러나 연필 끝 또는 손가락 끝에 종이 삼각형을 올려놓고 평형이 되는지 실험해보면 성공하기에 쉽지 않음을 금방 알 수 있다. 무게중심이 근본적으로 갖고 있는 물리적 의미를 이해하기에는 여전히 부족하다. 이에 대한 보충 설명으로 최용준(2010)의 중학수학 2 교과서에서는 무게중심 단원의 끝 부분에 무게중심이라는 용어에 대하여 “글자 그대로 뜻풀이 하면 무게의 중심이 된다는 뜻이다”라고 소개한다. 그리고 삼각형을 얇은 평행사변형의 띠가 쌓여져 있는 것으로 보고 평행사변형의 무게중심이 대각선의 교점에 위치함을 설명하면서 결국 삼각형의 무게중심이 삼각형의 중선 위에 있음을 간단히 설명하고 있다. 7차 교육과정하에 발행된 대부분의 교과서 8-나에 비하여 무게중심에 대한 물리적 설명은 추가되었지만, 평행사변형의 무게중심을 통한 삼각형의 무게중심에 대한 이해로 여전히 교실에서 실험할 수 있는 모델이 되지는 못한다.

국내에서 무게중심에 대한 연구자로 알려진 한인기는 무게중심에 대한 연구(한인기, 2005)에서, 무게중심에 대한 국내의 수학교육적 연구가 무게중심에 대한 정리의 다양한 증명방법을 제시하고 중선과 무게중심 개념을 확장시켜 도형의 다양한 성질들을 조사하는데 그쳤고, 실생활에서 쉽게 접근할 수 있는 다각형 모양의 균일한 판에 대한 연구가 없었음을 지적하였다. 그는 삼각형판과 사각형판의 무게중심의 위치와 성질(한인기, 2005)에 대한 연구에서 무게중심에 대한 수학적 분석으로 특히 삼각형판의 무게중심이 삼각형의 세 꼭지점에 놓인 질량점의 무게중심과 일치함을 보이고 있다. 하지만 2005년 그의 논문에서도 학교수학에서 제시할 수 있는 무게중심에 대한 현실적인 모델에 대한 논의를 찾아볼 수는 없다. 또 다른 그의 연구(한인기, 2008)에서도 마찬가지로 지렛대의 원리를 이용하여 삼각형의 무게중심에 대한 증명과 명제들을 소개하였지만 수학적 분석을 소개하는데 그치고 있다.

무게중심의 개념을 이용한 현실적인 다른 모델들을 제시하기 전에, 앞서 김원경(2010)과 최용준(2010)이 소개한 수학적 증명과는 또 다른 간단한 수학적 증명을 제시하여 앞의 HJ모델을 이용한 물리적 논증과 비교하고자 한다. 이 수학적 증명에서 사용할 수학 정리는 삼각형의 넓이에 관한 다음의 정리이다.

4) 정리를 기술하는 용어들을 복잡하고 정교하게 정의함으로써 정리 자체를 매우 간명하게 진술하는 경우를 고등수학에서 흔히 볼 수 있다.

T. 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

초등학교에서 삼각형의 넓이에 대해 배운 학생은 이 정리 T를 쉽게 수긍할 수 있다고 본다. 이제 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 논증은 다음과 같다.

첫째, [그림2]에서, 중선 AP와 BQ의 교점을 S라 하자. 정리 T에 의해 삼각형 BSP와 삼각형 CSP의 면적은 같고(이 면적을 a라 하자), 삼각형 ASQ와 삼각형 CSQ의 면적은 같다(이 면적을 b라 하자).

둘째, 정리 T에 의해, 중선 AP와 중선 BQ는 각각 삼각형 ABC의 면적을 2등분한다. 따라서, [그림 2]에서 쉽게 알 수 있듯이 삼각형 ABP와 삼각형 ACP의 면적이 2b+a로 같으므로 삼각형 ABS의 면적은 2b이고, 삼각형 BAQ와 삼각형 BCQ의 면적이 2a+b로 같으므로 삼각형 ABS의 면적은 2a이다. 그러므로 a=b이다. 이 사실과 정리 T에 의해서, BS: SQ=AS: SP=2:1 임을 알 수 있다.

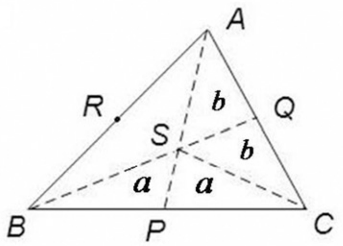

그림 2 점 P, Q, R은 각 변의 중점, 점 S는 중선 AP와 BQ의 교점

셋째, 중선 AP와 중선 CR의 교점을 S′ 이라 하자. 앞서의 논리를 반복하여 S′이 중선 AP를 2:1로 분할하는 점임을 알 수 있다. 즉 S와 S′은 동일한 점이다.

이 증명에서 정리 T는 앞서의 물리적 논증에서 무게중심에 관한 가정 A1-A3의 역할을 한다. 이 증명에서 물리적 모델 M1-M2에 해당하는 것은 단순히 각 변의 중점 P, Q, R을 잡는 것이다. 이 증명은 앞서의 물리적 논증보다 더 간단하고 보다 직관적이라 볼 수 있다. 그렇다면 앞의 물리적 논증의 장점은 어디에 있을까? Hanna와 Jahnke의 논문에서 언급된 대로, 물리적 모델 HJ는 쉽게 다른 경우로 확장하여 적용할 수 있고 기하적으로 생각해내기 어려운 정리들을 찾을 수 있게 해준다. 가령, 정사면체의 무게중심이나, 삼각형에서의 횡단선들의 교점에 관한 Ceva의 정리 등을 쉽게 찾아낼 수 있게 한다(Hanna, G. & Jahnke, H., 2002a). 반면에 위 수학적 증명은 다른 도형으로 쉽게 일반화될 수 없고, 뿐만 아니라, 넓이를 이등분하는 특별한 직선인 중선들의 교점을, 단순히 넓이를 이등분하는 임의의 직선들의 교점으로 생각하는 오개념을 유발할 수도 있다. 이런 오개념에 대해서는 홍갑주(2005)가 지적한 바 있다.

5. 무게중심의 개념을 이용하는 다른 모델들

위에서 사용된 Hanna와 Jahnke의 물리적 모델은 가장 간단한 것이기는 하지만 결코 유일한 것도 아니고 실제적이지도 않다. 위의 물리적 모델과 달리 삼각형의 변에 무게를 가진 막대가 놓이는 모델을 생각하는 것이 더 자연스럽다. 이것은 무게중심에 관한 가정들을 받아들이고 진행하는 교실 수업에서 학생들과 함께 토론해 볼만한 실제적인 모델이 될 수 있다. 또한 이런 모델에 대한 토론을 통해서 수학적 정리의 증명에 물리적인 논증을 사용하는 것이 어떤 것인지 참된 경험을 할 수 있다. 이를 위하여 본 연구자는 교실에서 제시할 수 있는 간단한 물리적 모델의 예들을 아래와 같이 제안한다.

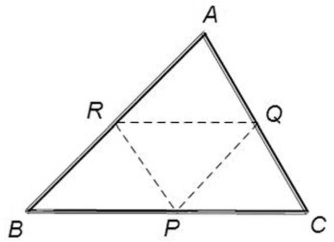

그림 3 모델 N1

N1. 세 꼭지점에는 질점을 놓지 않고, 각 변에는 균일하고, 무게가 모두 같은 고정된 막대가 놓여 있는 모델: 각 변의 무게 중심은 각 변의 중점들 P, Q, R이 되고, 이 점들에 같은 무게의 질점들이 놓인 것으로 볼 수 있으므로, 이 삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치한다([그림 3]). 수학적으로 삼각형 ABC의 세 중선은 삼각형 PQR의 세 중선을 이루므로, 두 삼각형에서 세 중선의 교점으로서의 무게중

심은 일치함을 알 수 있다.

N2. 삼각형 ABC를 질량이 균일하게 분포된 판으로 보는 모델([그림 4]):

가정 A2를 이용하여 삼각형 ABC의 무게중심을 찾기 위하여 선분 BC와 평행한 임의의 얇은 띠 DE의 무게중심을 찾아보자. 띠 DE의 무게중심은 DE의 중점 F이고, 여기에 띠 DE의 무게가 집중된 것으로 볼 수 있다. 또한 중점 F는 중선 AP 위에 있다. 그리하여 선분 BC와 평행한 이런 모든 띠의 무게중심점이 중선 AP 위에 있고 중선 AP 위의 질점들의 무게중심은 같은 직선 AP 위에 있으므로, 삼각형 ABC의 무게중심은 중선 AP 위에 있다.[5] 같은 논리로 삼각형의 무게중심은 꼭지점 B에서 맞변 AC에 그은 중선과 C에서 맞변 AB에 그은 중선위에도 있어야 한다. 무게중심의 유일성에 대한 가정 A1에 의해 세 중선은 한 점에서 만난다.

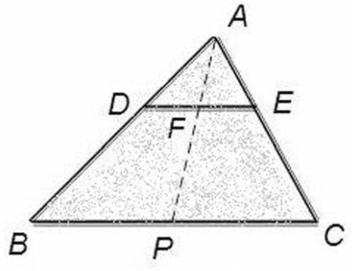

그림 4 모델 N2

이 모델은 교실에서 학생들이 경험할 수 있는 현실적인 모델이다. 즉, 질량이 균일하게 분포된 삼각형 모양의 판의 무게중심에 구멍을 뚫고 끈으로 묶은 후 판이 수평이 되게 매달아 평형상태가 됨을 실험해볼 수 있다. 중학교 교과서(최용준, 2005, 2010)에서 마분지 종이로 만든 삼각형판을 판의 무게중심의 위치에서 집게손가락으로 받쳐 평형상태를 만드는 경우와 마찬가지이다.

본 연구에서 설정한 위 모델들은 Hanna와 Jahnke (2002a, 2004)가 제시하는 모델과 유사하지만 차이가 있다. Hanna는 삼각형의 세 변의 무게를 무시한 모델을 사용하고 있는 반면, 세 변의 무게, 혹은 삼각형 내부에 분포된 질량의 무게를 고려하고 있다. 그리하여 위 모델은 HJ모델에서 꼭지점에만 무게가 있는 가상적인 삼각형을 다룰 때 학생들이 갖는 심리적 부담을 덜어 줄 수 있다. 즉, 교실에서 현실세계 속의 삼각형을 모델로 제시할 필요가 있음을 강조하고자 한다.

무게중심과 관련된 또 다른 예로, Hanna와 Jahnke (2002a, 2004)는 Varginon 정리의 증명을 무게중심의 개념에 의하여 제시하고 있다. Varginon 정리는 임의의 사각형의 네 모서리의 중점들은 평행사변형의 꼭지점이 된다는 내용이다. 논문 “Another approach to proof: Arguments from physics(2002b)”에서도 언급된 바 있지만, Varginon 정리가 사각형의 무게중심을 통하여 증명될 수 있음을 상기해볼 때, 학생들은 오각형, 육각형, ... 등 다각형에 무게중심 개념을 적용하여 다각형의 새로운 성질을 찾아보려는 시도를 할 수 있을 것이라 기대할 수 있다. 즉, 한인기(2005)의 연구에서도 주장하듯이, 무게중심을 이용한 모델은 수학적 개념의 확장에서 등장하는 일반화를 배울 수 있는 좋은 모델이 된다.

Ball(2002)은 Varginon 정리에 대한 무게중심 개념을 이용한 모델의 장점을 다음과 같이 주장하고 있다; 보다 명쾌한 증명을 제공하며, 복잡한 수학적 구조의 근본적인 특징을 드러내며, 무게중심 개념으로 증명된 정리가 수학의 다른 영역 및 다른 과학 분야와 어떻게 관련되어 있는지 분명히 밝히며, 개관하기 힘든 정교한 수학적 논증과는 대조적으로 그 전체를 파악할 수 있는 총체적 증명의 형태를 만드는 데 도움을 준다.

삼각형의 무게중심을 물리적 논증으로 설명할 때도 이와 같은 장점을 갖는다는 것을 우리는 주장할 수 있다.

6. 실험적으로 무게중심을 찾는 방법

무게중심의 물리적 의미를 가장 간단하게 실험적으로 알아볼 수 있는 장치는 막대저울이다. 이를 이용하면 물체의 평형과 관련하여 아르키메데스가 그의 저서 “평면도형의 평형” I권에서 지레의 원리를 유도하기 위해서 공리로 삼았으며, 대부분의 사람들이 경험적으로 알고 있는 다음 현상들을 실험적으로 관찰해 볼 수 있다. 즉, 막대저울의 받침점에서 같은 거리에 매달은 두 개의 동일한 접시에 같은 무게의 물체를 놓

5) 질량중심의 정의와 간단한 적분을 이용하여 중선 AP를 2:1로 분할하는 점이 무게중심이 됨을 알 수 있다.

으면 저울은 평형을 이룬다. 만일, 두 개의 접시에 놓인 무게가 다른 경우에는, 두 무게에 역비례하는 거리에 두 접시를 위치시킬 때 두 저울은 받침점의 좌우 어느 한 쪽으로도 기울어지지 않고 평형을 이룬다. 이 때, 저울의 받침점의 위치가 두 물체의 무게로 이루어진 계의 무게중심이다. 이러한 관찰 사실을 간단히 수식으로 표현하기 위해서, 무게중심을 지나는 연직 z 축을 축으로 잡고 막대 저울을 x 축, 무게중심을 원점, 두 물체의 질량을 각각 m_1, m_2, , 그 위치를 각각 $(x_1,0,0)$, $(x_2,0,0)$로 표시하면 $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ 이다.

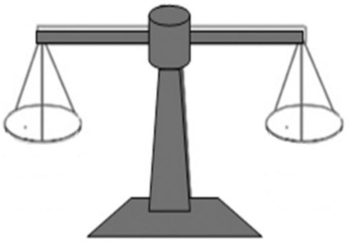

그림 5 양팔저울

이제 임의의 물체의 한 점에 끈을 달아 연직면에서 평형을 이루는 경우에 대해 지레의 원리를 적용해 보자. 물체를 구성하는 수많은 질점들을 m_i $(i = 1,2,3,\cdots)$로 표시하고, 이 물체의 무게중심을 원점으로 잡고 각 질점의 위치를 $\vec{r_i} = (x_{i,}, y_i, z_i)$로 표시하면 $\sum_i m_i x_i = 0$, $\sum_i m_i y_i = 0$ 가 될 것이다. 그 이유를 직관적으로 설명하면, 이 물체를 이루는 질량들이 연직축에 대해서 어느 쪽으로도 기울어지지 않아야하기 때문이다.[6] 따라서, 한 점에 끈으로 매달아서 연직면에서 평형을 이루는 물체의 무게중심은 매달은 점을 통과하는 연직선 위에 있게 된다. 이러한 관찰은 임의의 형태를 가진 물체의 무게중심을 실험적으로 찾는 다음과 같은 간단한 방법을 가능하게 해준다. 이 방법은 특히 물체의 질량이 얇은 판의 형태로 분포된 경우에 특히 편리하다. 먼저, 얇은 판으로 된 물체의 가장자리에 가까운 곳에 구멍을 뚫고 연직 방향으로 매달아 평형을 이루게 하여 무게중심을 지나는 하나의 직선을 얻는다. 다시 다른 구멍을 뚫고 연직방향으로 물체를 매달아서 무게중심을 지나는 또 하나의 직선을 얻는다. 이제 이 물체의 무게중심은 이 두 직선의 교점으로 얻어진다([그림 6] 참조). 실제 교실 수업에서는 균일한 마분지를 삼각형, 사각형, 또는 임의의 형태로 오려낸 후에, 몇 개의 점에 구멍을 뚫고 실에 매달아서 무게중심을 찾는 활동을 해볼 수 있다. 그리고, 삼각형의 경우에는 이 무게중심이 중선들의 교점인지, 그리고 대칭성이 있는 도형의 경우에는 무게중심이 기하적인 대칭의 중심점이 되는지 등을 확인하는 활동을 통해서 무게중심의 물리적 의미와 도형의 기하적 의미를 함께 생각해 보는 시간을 갖는 것이 바람직할 것이다.

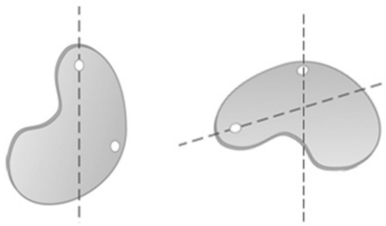

그림 6 얇은 판을 연직 방향으로 매달아서 무게중심을 찾는 모델

삼각형의 경우에 실제수업에서 활용할 수 있는 구체적인 예를 들면, 두꺼운 마분지 또는 균일한 나무판으로 삼각형을 만든 후에 각 꼭지점 가까이에 구멍을 뚫는다. 한 구멍에 끈을 넣어 삼각형 판을 연직방향으로 매단 후에 평형을 이루게 하여 그 구멍에서 아래쪽으로 출발하는 연직선을 삼각형 판 위에 연필로 그려 놓는다. 다른 구멍에서도 이 방법으로 삼각형 판 위에 연직선을 찾아 그린 후 두 연직선이 만나는 교점을 표시한 후에, 나머지 한 구멍에 끈을 매달아 생기는 연직선이 그 교점을 지나는지 확인해본다. 또한 이렇게 찾은 연직선이 삼각형의 중선이 됨을 확인해볼 수 있다. 이 때, 한 손으로 삼각형을 연직방향으로 매달고 다른 손으로 연직선을 그려야 하는 어려움을 피하기 위하여 아래 그림과 같이 끈의 한 쪽 끝에 추를 달고 다른 쪽 끝으로 구멍을 통과하여 묶으면

6) 기초물리학에서는 강체의 평형조건으로서 강체에 작용하는 총외력=0과 외력들에 의한 총토크=0의 두 조건을 설명한다. 이를 한 점에 끈으로 매달아서 연직면에서 평형을 이루고 있는 강체에 적용하면, 강체를 지탱하는 끈의 장력이 물체의 무게와 같고, 끈을 통과하는 연직선 위에 물체의 질량중심이 있음을 보여줄 수 있다.

연직선을 얻을 수 있다. 이 연직선 위의 한 점을 판 위에 표시한 후에 판을 평평하게 놓고 연직선 위의 점과 구멍을 연결한 선분을 판 위에 표시하여 연직선을 그릴 수도 있다.

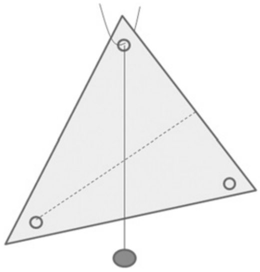

그림 7 삼각형판을 연직방향으로 매달아 무게중심을 찾는 모델

이런 실험적 발견과 토론을 통해서 학생들은 무게중심의 가정이 갖는 진정한 의미에 대해 인식할 수 있게 될 것으로 기대된다. 그렇게 되면 HJ 모델(M1, M2)이 어째서 삼각형의 세 중선이 한 점에서 교차한다는 기하적 정리에 대해 가장 간단한 증명을 가능하게 하는지도 이해할 수 있게 될 것이다.

Ⅲ. 결론 및 제언

이 글에서는 물리적 논증을 이용하여 수학의 정리를 증명하는 것의 장점, 전통적인 수학적 증명과의 차이점, 교실 수업에서 이를 성공적으로 수행하기 위해 필요한 요소 등을 파악하기 위해 노력하였다. 이를 위해 작지만 전형적인 한 예로서, 무게중심의 개념과 적절한 모델을 이용하여 삼각형의 세 중선이 한 점에서 교차한다는 기하적 정리를 증명하는 경우를 자세히 살펴보았다. 이 연구를 통해서 본연구자는 결론적으로 다음과 같은 점들을 명확히 하고 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 수학적 정리를 증명함에 있어서 물리적 논증은 관련 개념과 특정한 모델의 도입 등을 통해서 수학적 정리를 보다 구체화시키고, 정리의 내용에 대하여 실제적인 느낌과 해석을 가능하게 한다. 다시 말해 추상적이고 논리적인 정리의 내용이 좀 더 실제적이고 생생한 표현을 얻게 되는 것이다.[7] 본 연구에서 제시하는 예에서, 삼각형의 중선들의 교점을 물리적으로 해석하면, 이 교점은 균일한 삼각형 판의 무게중심이다. 이는 균일한 삼각형 판의 무게중심에 구멍을 뚫고 끈으로 묶은 후 판이 수평이 되게 매달면, 판자가 평형상태가 됨을 뜻하는 것이다. 실제 교실 수업에서 삼각형 판을 연직 방향으로 매달아서 무게중심을 찾는 실험을 통하여, 삼각형의 기하적 중선정리에서 다루는 무게중심을 삼각형 판이라는 물체의 물리적 무게중심으로 이해할 수 있도록 교수학습 방법의 개선을 위한 현실적인 모델을 제시하였다.

둘째, 본 논문의 예에서도 분명히 알 수 있듯이, 물리적 논증은 수학적 증명보다 더 많은 개념구조를 갖고 있다. 따라서, 본 연구의 예에서는 무게중심의 개념을 잘 파악하지 못하면, 제안된 물리적 모델이 어떻게 기하적 정리의 증명을 성취하는지 이해하지 못할 수도 있다. 이런 뜻에서, 본 연구에서는 물리적 개념과 모델을 통한 논증에 대하여 분명히 드러내고, 특히 (예비)수학교사들에게 필요한 기초적인 배경 지식을 마련하였다.

셋째, 두 번째 요점에서 교사의 역할과 준비가 매우 중요하다는 것을 알 수 있다. 물리적 논증에 사용된 물리 개념에 대한 교사의 이해도가 깊을수록, 학생들에게 수학 정리의 증명을 물리적 논증을 통해서 성공적으로 전달할 수 있을 것이다. 반대의 경우에는 물리적 내용은 물론 수학적 정리의 내용 전달에도 실패할 것이다. 결론적으로, 수학 정리의 증명지도에 물리적 논증을 이용하는 것은 매우 유익하고 유망한 것이지만, 교사의 편에서 필요한 준비를 철저히 하지 않아도 쉽게 성공할 수 있는 방법은 아니라는 것을 명심해야 한다고 본다. 그리하여 예비수학교사들을 위한 타 교과와 연계된 수학교육의 필요성을 명백히 하였다.

넷째, 아래 Dewey의 교육방법론의 요지를 살펴볼 때 학생들이 구체적 사물을 통하여 삼각형의 무게중심에 대한 물리적 논증을 먼저 접하는 것은 수학 내용의 의미를 분명히 하고 그 타당성을 확인하는 절차로 중요하다.

> 산수와 과학 등의 어떤 지식이든지 그것을 가르치고자 할 때는 일상의 생활경험 영역 내에 드는 자료에서 추출된 것에서 출발하여 거기에 들어있는 지적

7) 가령 $y' = -2y$ 와 같은 간단한 미분방정식을 이공계의 학생들은 방사성원소의 반감기와 관련해서 이해하는데 익숙하다. 수학 교육에 이런 요소를 어떻게 반영하느냐에 따라서 학생들에게 수학이 좀 더 실제적인 학문으로 비춰지게 될 것이다.

내용을 점진적으로 발전시켜야한다 (우정호, 강흥규, 2005)

이는 Tall(1995)이 연역적인 증명에 앞서 초보적인 증명으로 물리적 환경과 상호작용을 통해 이루어지는 활동적 증명을 들고 있는 것과 같은 맥락이다. 즉, 학생들이 구체적인 활동을 통하여 주어진 명제가 먼저 참인지를 확인할 수 있도록 적절한 물리적 모델을 제시하는 것이 바람직할 것이다.

다섯째, 많은 수학적 개념이 타 분야와 동떨어져 홀로 만들어진 것이 아님을 학생들에게 일깨워주기 위하여 수학적 증명 또는 수학적 개념에 관련된 물리적 논증 및 설명이 적절하게 수반될 필요가 있다. 특별히, 무게중심, 변화율과 같은 물리적 개념에서 발생한 수학적 개념은 반드시 물리적 논증 및 설명을 수반하여야 할 것이다. Polya (1978) 역시 이런 물리적 논증이 학교수학에서 사용될 수 있고, 사용되어야함을 제의하고 있다.

결론적으로 본 논문은 학문 내외의 연계성에 대한 교육이 부족한 요즘 현실에서 무게중심에 대하여 교과 내외적으로 통합적 사고를 유도하는 교수학습의 개선 방향을 제안하고 있다.

참고 문헌

김수미(1999). 미국 스탠다드 수학의 재조명, 수학교육학연구, 8(1), 279-289.

김원경, 조민식, 김영주, 김윤희, 방환선, 윤기원, 이춘신(2010), 중학수학 2, 서울: 비유와 상징.

우정호 강흥규 (2005). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구, 수학교육학연구, 15(2), 107-130.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은 (2003). 중학교 수학 8-나, 서울: 디딤돌.

조완영 · 권성룡 (2001). 학교수학에서의 '증명', 수학교육학연구, 11(2), 385-402.

최용준 (2005). 중학교 수학 8-나, 서울: 천재교육.

최용준 · 한대희 · 박진교 · 김강은 · 신태양 · 배명주 (2010). 중학교 수학 2, 서울: 천재문화.

한인기 (2005). 삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관한 연구, 수학교육논문집, 19(3), 471-484.

한인기 (2008). 지렛대의 원리를 이용한 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질 탐구, 수학교육논문집, 22(1), 27-39.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽 (2009). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

홍갑주 (2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제, 학교수학, 7(4), 391-402.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof, *ICM*, III 1-3, 907-920.

Latterell, Carmen M. (2004). *Math wars : a guide for parents and teachers*, Greenwood publishing group, Inc.

De Villiers, M. D.(1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 17-24.

Freudenthal (1991). Revisiting mathematics education, China lectures, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

Hanna, G. & Jahnke, H. (2002a). Arguments from physics in mathematical proofs: an educational perspective, *For the learning of mathematics*, 22 (3), p. 38-45.

Hanna, G. & Jahnke, H. (2002b). Another approach to proof: Arguments from physics, *ZDM* 34(1), 1-8.

Hanna, G., Y. de Bruyn, N. Siodoli & D. Lomas (2004). Teaching proof in the context of physics, *ZDM* 36 (3), 82-90.

Polya (1978). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (2 vols.; combined ed.),* New York: John Wiley & Sons.

Polya, (2003). 수학과 개연 추론 (이만근 외 옮김), 서울: 교우사.

Stewart, James(2001), *Calculus : concept and context*, Tompson Learning..

Tall, D.(1995). Cognitive developments, representation and proof, paper presented at the conference *Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, London, 27-38.

국문 요약

이 논문에서는 Hanna와 Jahnke의 수학적 증명에서의 물리적 논증의 사용에 대한 주장에 동의하면서, 그들의 논문에서 취급된 무게중심의 개념을 이용한 물리적 논증을 통해 삼각형의 무게중심에 대한 증명의 예를 분석하고 보다 현실적인 모델을 제시하였다. 전통적인 수학적 논증과 비교하여 물리적 논증에 있어서 물리적 개념과 모델의 역할을 명백히 드러내고, 또한 물리적 논증을 교실에서 학생들에게 제시하고 활용해야 할 필요성에 대하여 논하였다.

주요어 : 수학적 증명, 물리적 논증, 무게중심, 삼각형의 중선, 삼각형의 무게중심