

지형변화에 의한 파랑전파모형: 산란체법과 변환행렬법 Wave Propagation Models Due to Topographic Change: Scatterer Method and Transfer Matrix Method

서승남*
Seung-Nam Seo*

요지 : 평면파 근사식에 기초한 지형에 의한 파랑변형 모형인 산란체법과 변환행렬법을 비교하여 특성을 분석하였다. 산란체법의 결과가 기존 엄밀해에 보다 근접하고 내재한 물리현상을 보다 명확히 설명하는 것으로 평가된다. 이들은 해석해로 계산이 빠르고 용이하며 지형이 비교적 단순한 경우에는 상당한 정밀도를 보인다.

핵심용어 : 지형변화, 파랑전파모형, 평면파 근사식, 산란체법, 변환행렬법

Abstract : Both scatterer method and transfer matrix method are compared to analyze their characteristics, which are wave propagation models due to topographic change based on plane wave approximation. Results from the scatterer method are closer to the results obtained by the more accurate existing models and it is appraised that the scatterer method gives the clearer explanation about physical process involved in the wave transformation. Since both methods have analytical solutions, in the computational point of view they are very fast and easy to be implemented. Both methods give a good prediction for wave scattering by relatively simple bedform.

Keywords : Topographic change, Wave propagation model, Plane wave approximation, Scatterer method, Transfer matrix method.

1. 서 론

지형이 변하는 구간을 지나는 파랑은 일부 에너지가 연속적으로 반사되고 입사파와 부분 반사파들의 중첩에 의해 파고와 위상이 변하게 된다. 파랑은 일반적으로 지형의 형상과 파랑의 특성에 따라 변형된다. 비교적 간단한 선형파랑의 경우에도 이러한 파랑의 변형에 대한 엄밀해는 구하기가 매우 어렵기 때문에 근사적인 해를 구하는 방법들이 제시되어왔다. 이 가운데 본 논문에서는 해저지형을 다수의 계단으로 근사하여 각 계단에서 해를 구성한 뒤 경계에서 인접 구역의 해를 정합하는 고유함수 전개법으로 파랑변형을 계산하는 수치모형의 특성을 분석하고자 한다.

다양한 형태의 지형에 의한 파랑의 반사율을 계산하기 위한 산란체법(서, 2008)과 변환행렬법(O'Hare and Davies, 1993)은 이 유형의 모형에 속하고 이들의 결과들은 각각 제시되었으나 이 모형들에 대한 직접적인 비교는 이루어지지 않았다. 그래서 본 논문에서는 이 모형들에 사용된 기법과 계산결과를 직접 비교하여 각 모형의 특성을 분석하고자 한다.

다중 계단지형에서와 같이 구간별 수심이 일정한 경우, 고

유함수 전개법에 의한 급수해는 해를 구성하는 역류파(evanescent waves)의 개수를 늘리면 엄밀해로 수렴한다. 그리고 주어진 해저지형을 계단식 지형으로 표현할 때 구성 계단의 수가 많을수록 지형을 보다 정확하게 나타낼 수 있다. 그러나 구성 계단의 증가로 인해 해에 포함된 미지수가 증가되면, 계산속도가 크게 저하되거나 기억용량의 부족으로 해를 구할 수 없는 경우도 발생한다(서, 2009b). 이 경우 해에 포함된 미지수의 개수는 역류파 개수에 진행파 하나를 더한 수의 2배에 계단 개수의 곱한 값이 된다. 미지수로 구성되는 연립방정식의 크기가 계산속도와 기억용량을 크게 좌우함으로 역류파와 계단의 개수 증가에 따라 계산에 미치는 영향은 쉽게 짐작될 수 있다.

대부분의 경우 역류파의 수에 따른 해의 수렴은 비교적 빠르며, 정밀한 해를 얻기 위해서는 총 미지수의 수를 증가시킬 필요가 있다. 구성 계단의 수를 증가시키면 계단지형에 의한 지형적 오차는 감소하게 되나 해저 면에서의 경계조건은 계단의 개수를 증가시켜도 실제 지형에 부여된 경계조건과 차이를 보이게 된다. 이로부터 해저면 부근에서는 고유함수 전개법으로 구한 해의 정밀도가 낮게 됨을 쉽게 유추할 수 있

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO Box 29, Seoul 425-600, Korea, snseo@kordi.re.kr)

고, 정밀도는 해저로부터 멀어질수록 높아지는 것으로 판단된다. Porter and Porter(2003)은 수심변화에 의한 선형과 변형에 관한 엄밀해를 구하기 위해 적분방정식을 사용하였고 역류파가 포함된 식으로부터 원하는 정밀도의 해를 얻을 수 있음을 보였다. 이 엄밀해와 서(2009b)가 제시한 역류파가 포함된 고유함수 전개법의 반사율은 거의 같으며 이것이 위 판단의 근거가 된다.

고유함수 전개법의 수심분포함수들을 사용하는 환경사 파랑식의 모형은 해저면에서 수직 유속성분이 0이 되어, 경사진 해저면에서는 이 경계조건을 만족할 수 없다. 그래서 최근 연구에서는 이를 보완하기 위해 해저면에서 수직성분이 존재하는 함수를 포함하여 해를 구성한다(Athanassoulis and Belibassakis, 1999; Chamberlain and Porter, 2006). 이 새로 추가된 수심분포함수는 해의 수렴속도를 증가시키고 해저면 부근에서 해의 정밀도를 크게 향상시키는 것으로 알려졌다. 새로운 수심분포함수가 포함되지 않고 역류파의 개수만을 증가시킨 경우, 반사율은 엄밀해와 거의 같게 되며 이 연구들의 결과로부터 고유함수 전개법이나 역류파를 포함하는 기존 환경사 파랑식 모형도 파고 계산의 경우 정밀한 것으로 판단된다.

최근 연구를 종합하면 지형이 복잡하여 저면 경사율이 큰 경우에는 진행파와 역류파가 연계된 모형이 필요하다. 특히 해저 부근의 유속이 중요한 경우에는 수직성분이 존재하는 분포함수를 포함하여 해가 구성되어야 한다. 그러나 이 유형의 모형은 매우 복잡하고 어렵다.

한편 서(2009b)가 보인 바와 같이 해저지형이 복잡하지 않은 단일파형의 사주지형의 경우에는 진행파만을 사용한 평면파 근사식의 해도 상당히 정확하다. 예를 들면 인접 계단에서 생성된 역류파가 충분히 약해 대상 계단의 수심이 불연속인 경계에서 그 영향을 무시할 수 있으면 평면파 근사해도 충분히 정확하기 때문에 역류파 개수의 증가에 따른 영향을 받지 않는다. 본 연구에 사용된 기법들은 엄밀한 의미에서는 위의 조건에서만 성립하나, 평면파 근사해는 관련된 엄밀해에서 으뜸 항이므로 개략적인 계산에 사용할 수도 있다. 또한 이 기법들의 계산속도는 매우 빠르고 계단의 개수를 무한히 늘릴 수 있는 장점이 있어 계산이 매우 용이하다.

본 연구에서 다루는 수치모형들은 지형이 아주 복잡한 경우 정밀도가 낮은 제약이 있으나, 계산이 빠르고 용이한 평면파 근사식을 사용하고 고유함수 전개법을 적용한 산란체법과 변환행렬법이다. 이들의 비교를 위해 해를 유도하는 기법상 특성을 분석하고 수치실험에 의한 결과를 직접 비교하여 수치상 특성도 밝히고자 한다.

2. 파랑모형

단주기 시간변동 $\exp(-i\omega t)$ 을 분리한 선형파랑에 대한 2차 원 운동은 정지해면 상에 원점을 둔 직교 좌표계를 이용한 속

도포텐셜, ϕ 의 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi &= 0, z=0 \\ \vec{n} \cdot \nabla \phi &= 0, z=-h(z) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \vec{n} 은 해저면, $z=-h(x)$ 에서 외향 법선벡터이다. 계단식 지형의 경우 각 계단의 수심 평탄 면에서 $\partial \phi / \partial z = 0$ 이 조건은 이 된다. 수심이 일정한 각 구역에서 식 (1)의 해를 변수분리법으로 구해 식 (2)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_i &= (p_i^+ e^{ik_i x} + p_i^- e^{-ik_i x}) f_i(z) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [b_{i,m}^+ e^{-k_{i,m}(x-x_{i-1})} + b_{i,m}^- e^{k_{i,m}(x-x_i)}] f_{i,m}(z), x_{i-1} \leq x \leq x_i \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 b_i^+ 와 b_i^- 는 진행파의 미지수이고 $b_{i,m}^+$ 와 $b_{i,m}^-$ 는 역류파 미지수이다. 그리고 수심분포 함수들은 식 (3)이 기본 형태이며 이로부터 변형된 다른 형태를 취할 수도 있다.

$$f_i(z) = \cosh k_i(z+h_i), f_{i,m}(z) = \cos k_{i,m}(z+h_i) \quad (3)$$

이들은 식 (1)의 z 방향에 대한 고유치 문제로부터 구한 해이고 식 (2)는 이 고유함수로 전개한 것으로 간주할 수 있다. 식 (2)와 (3)의 파수 k_i 와 $k_{i,m}$ 은 파랑분산식 (4)에서 계산할 수 있다.

$$\omega^2 = gk_i \tanh k_i h_i = -gk_{i,m} \tanh k_{i,m} h_i \quad (4)$$

속도포텐셜의 미지수는 경계 $x=x_i$ 에서의 동력학 및 정력학 정합조건을 이용하여 계산한다. 만일 평면파 근사해를 구하는 경우에는 역류파형이 존재하지 않아 진행파 미지수 2개만 존재하며 지금부터는 평면파 근사식에 대한 것만을 다루기로 한다.

본 논문에서 다룰 산란체법과 변환행렬법은 평면파 근사식을 사용할 경우 해석해를 갖는다. 그래서 계산이 매우 빠르며 기억용량은 아주 작기 때문에 주어진 지형을 많은 수의 계단으로 근사할 수 있는 것이 이들의 장점이다. 그리고 이들의 해는 각각의 계단에 대한 반사율과 투과율에 대한 식으로 표현되며 이 반사율과 투과율은 해석적으로 표현된다. 지점 $x=x_i$ 에 계단의 경계 즉 불연속 수심이 존재하는 경우 이 경계 좌우 측에서 입사하는 주어진 입사파 p_i^+ 와 p_{i+1}^- 에 의한 반사율(R_i^+ , R_i^-)과 투과율(T_i^+ , T_i^-)은 식 (5)의 산란행렬(Scattering matrix)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_i^- \\ p_{i+1}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^+ & T_i^- \\ T_i^+ & R_i^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i^+ \\ p_{i+1}^- \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 반사율과 투과율은 복소수이며 이들의 절대값은 통상적 의미의 반사율 K_R 로써 반사파고와 입사파고의 비로 정의된다. 한편 투과율 K_R 은 투과파고와 입사파고의 비가 된다.

평면파 근사해는 식 (5)의 구성 계단의 해를 이용하여 순차적인 방식으로 표현되며 이로부터 구한 미지수를 식 (2)에 대입하면 속도포텐셜이 얻어진다. 식 (5)의 우측 벡터는 입력 조건이고 좌측의 벡터는 미지수이고 미지수와 입력자료는 산란행렬에 의해 연결되어 있다. 산란행렬은 지형과 파랑의 입력자료가 주어지면 계산할 수 있다. 그리고 식 (5)는 본 논문의 기준 식으로 이 식에서와 같이 미지수가 경계 좌우 측에 존재하는 경우인 산란체법과 새로운 변수를 도입하여 미지수가 계산된 자료(여기서는 침자 i)로만 표현되는 경우 즉 변환행렬법으로 나누어지며 각각의 경우에 대해 자세히 설명하고자 한다.

미지수인 속도포텐셜의 진폭이 계산되면 해면은 동력학 수면조건인 식 (6)으로부터 구할 수 있다.

$$\eta(x) = \text{Re} \left\{ \frac{i\omega}{g} \phi(x, 0) \right\} \quad (6)$$

2.1 산란체법

계단식 지형에서 가장 단순한 하나의 계단지형을 대상으로 여기에 포함된 파랑변형의 특성은 아주 단순하다. 이 지형에 파랑이 입사하면 일부 에너지가 반사하고 나머지는 투과하게 된다. 즉 계단지형은 입사파를 지형과 파랑의 특성에 따라 분리하는 산란체로 간주할 수 있고 다수의 계단으로 구성된 지형에서는 구성 계단들 간에서 보다 복잡한 반사와 투과가 발생한다. 산란체법에 대한 물리적 의미와 유도과정은 서(2008)에 기술되어 있으며 여기서는 주요한 식만을 간추려 정리하고자 한다.

식 (3)의 진행파 고유함수를 사용한 계단 i 의 산란특성은 계단 좌우의 수심조건에 따라 변한다. 우선 우측 수심이 깊은 경우 $h_i > h_{i+1}$ 에는 식 (7)이 된다.

$$R_i^+ = e^{j2k_i x_i} \frac{1 - \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2}{1 + \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2};$$

$$T_i^- = e^{i(k_i - k_{i+1})x_i} \frac{2 \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)}{1 + \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2};$$

$$T_i^+ = e^{i(k_i - k_{i+1})x_i} \frac{2 \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)}{1 + \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2};$$

$$R_i^- = -e^{-i2k_{i+1} x_i} \frac{1 - \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2}{1 + \frac{k_{i+1} I_{i+1,i+1}}{k_i I_{i,i}} \left(\frac{I_{i+1,i}}{I_{i+1,i+1}} \right)^2} \quad (7)$$

여기서 $I_{i,j} \equiv \int_{-h_j}^0 \cosh k_i(z+h_i) \cosh k_j(z+h_j) dz$ 로 정의되며 이를 계산하면 식 (8)이 된다.

$$I_{i,j} = \begin{cases} \frac{(k_j - k_i) \sinh(k_j h_j + k_i h_i) + (k_j + k_i) \sinh(k_j h_j - k_i h_i) - 2k_i \sinh k_j (h_j - h_i)}{2(k_j^2 - k_i^2)}, & i \neq j \\ \frac{2k_i h_i + \sinh 2k_i h_i}{4k_i}, & i = j \end{cases} \quad (8)$$

한편 우측 수심이 낮은 경우 $h_i \leq h_{i+1}$ 에는 식 (9)가 된다.

$$\begin{aligned} R_i^+ &= -e^{i2k_i x_i} \frac{1 - \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}{1 + \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}; \\ T_i^- &= e^{i(k_i - k_{i+1})x_i} \frac{2 \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)}{1 + \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}; \\ T_i^+ &= e^{i(k_i - k_{i+1})x_i} \frac{2 \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)}{1 + \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}; \\ R_i^- &= e^{-i2k_{i+1} x_i} \frac{1 - \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}{1 + \frac{k_i I_{i,i}}{k_{i+1} I_{i+1,i+1}} \left(\frac{I_{i,i+1}}{I_{i,i}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

이제 다수 n 개의 계단(또는 산란체)으로 구성된 지형에서 산란특성은 다중 반사 및 투과에 의해 정해지며 이는 식 (10)으로 주어진다. 여기서 침자 s 는 다수 산란체에 의한 산란특성을 의미하며 지형은 n 개 계단으로 구성되어 있다.

$$\begin{cases} R_{s,n}^+ = R_{s,n-1}^+ + \frac{T_{s,n-1}^+ R_n^+ T_{s,n-1}^-}{1 - R_{s,n-1}^- R_n^+}, & T_{s,n}^+ = \frac{T_{s,n-1}^+ T_n^+}{1 - R_{s,n-1}^- R_n^+} \quad \text{by } p_1^+ \\ T_{s,n}^- = \frac{T_n^- T_{s,n-1}^-}{1 - R_{s,n-1}^- R_n^+}, & R_{s,n}^- = R_n^- + \frac{T_n^- R_{s,n-1}^- T_n^+}{1 - R_{s,n-1}^- R_n^+} \quad \text{by } p_{n+1}^- \end{cases}, \quad (n \geq 2) \quad (10)$$

식 (10)은 순차적 계산방식을 취하고 있으며 계단이 하나인 경우에는 식 (7)-(9)를 이용하면 산란특성을 순차적으로 계산할 수 있다. 식 (10)에 주어진 산란행렬과 입력자료 p_1^+ 와

p_{n+1}^- 는 구역 1에서 우측으로 진행하는 입사파와 구역 $n+1$ 에서 좌측으로 진행하는 입사파의 진폭에 해당한다. p_1^+ 에 대응하는 미지수 p_1^- 와 p_{n+1}^+ 는 구역 1에서 반사파와 구역 $n+1$ 에서의 투과파이다. 이와 유사하게 p_{n+1}^- 에 대응하는 반사파는 p_{n+1}^+ , 투과파는 p_1^- 이다. 이들을 식 (5)에 대입하면 n 개의 계단으로 구성된 계단지형에서 좌우측 각각의 입사파에 대한 반사파와 투과파의 진폭을 계산할 수 있다.

수심이 일정한 경우 진행파는 반사를 겪지 않고 모든 에너지가 투과된다. 이로부터 경계 좌우의 수심 차가 아주 작은 경우 반사율도 아주 작게 됨을 쉽게 예상할 수 있다. 식 (10)에서 분모가 0에 접근하면 산란행렬은 상당한 오차가 발생한다. 그러나 이러한 조건이 발생하기 위해서는 현 계단 i 의 반사율은 1이 되어야 할 뿐 아니라 이전까지의 반사율도 1이 되어야 한다. 이 조건은 완전 반사를 의미하며 수심비 h_{i+1}/h_i 가 0이거나 매우 큰 경우이다. 수심이 급격하게 변하지 않고 계단의 개수가 충분히 많은 경우 인접 수심의 차는 작기 때문에 반사율도 작으며 식 (10)의 산란행렬 각 요소는 수치적으로 안정한 특성을 갖게 된다.

2.2 변환행렬법

서론에 언급한 바와 같이 변환행렬법은 Miles(1967)의 변분근사해를 Devillard et al.(1988)이 새로운 미지 변수를 도입하여 변환한 식으로 임의 구역의 변수는 이전 구역의 변수로만 표현된다. 뒤에 보이는 바와 같이 과량진행 방향의 마지막 계단구역의 변수는 입사구역의 변수에 구성 계단의 산란특성을 곱한 것으로 표현된다. Miles의 변분근사해에서는 식 (3)의 수심분포함수 대신 표준화된 함수의 식 (11)을 사용한다.

$$\phi_i = (\tilde{p}_i^+ e^{ik_i x} + \tilde{p}_i^- e^{-ik_i x}) \chi_{i,0}(z), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

$$\chi_{i,0}(z) = \frac{\sqrt{2} \cosh k_i (z + h_i)}{\sqrt{h_i + \frac{g}{\omega^2} \sinh^2 k_i h_i}} = \frac{\cosh k_i (z + h_i)}{\sqrt{I_{i,i}}} \quad (11)$$

그래서 식 (2)로 표현된 속도포텐셜의 미지수는 다르나 서 (2009a)가 보인 바와 같이 Miles의 변분 근사해로부터 구한 물리적 변수들인 반사율과 투과율은 산란체법의 결과와 동일하다.

변환행렬법에 관한 내용은 Devillard et al.(1988)에 자세히 기술되어 있기 때문에 여기서는 계산과 관련된 주요 내용만을 정리하고자 한다. 이 방법에 도입된 새로운 변수는 식 (12)와 같다.

$$\begin{cases} \Psi_i \equiv (\tilde{p}_i^+ e^{ik_i x_i} + \tilde{p}_i^- e^{-ik_i x_i}) \chi_{i,0}(0) \\ \Omega_i \equiv -\frac{1}{k_i} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_i = -i (\tilde{p}_i^+ e^{ik_i x_i} - \tilde{p}_i^- e^{-ik_i x_i}) \chi_{i,0}(0) \end{cases} \quad (12)$$

이 식은 다음과 같이 변형할 수 있고

$$\begin{cases} \tilde{p}_i^+ e^{ik_i x_i} \\ \tilde{p}_i^- e^{-ik_i x_i} \end{cases} = \begin{bmatrix} \chi_{i,0}(0) & \chi_{i,0}(0) \\ -i\chi_{i,0}(0) & i\chi_{i,0}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} \Psi_i \\ \Omega_i \end{cases} \quad (13a)$$

$$= \frac{1}{2\chi_{i,0}(0)} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{cases} \Psi_i \\ \Omega_i \end{cases}$$

마찬가지로 구역 $i+1$ 에서의 변수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i+1}^+ e^{ik_{i+1} x_i} \\ \tilde{p}_{i+1}^- e^{-ik_{i+1} x_i} \end{cases} = \frac{1}{2\chi_{i+1,0}(0)} \begin{bmatrix} e^{-i\theta_i} & ie^{-i\theta_i} \\ e^{i\theta_i} & -ie^{i\theta_i} \end{bmatrix} \begin{cases} \Psi_{i+1} \\ \Omega_{i+1} \end{cases} \quad (13b)$$

여기서 $\theta_i = k_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$ 이다.

한편 변분근사해 역시 수심조건에 따라 구분하여 표현되며 $h_i \leq h_{i+1}$ 의 경우 평면파 근사해는 식 (14)가 된다.

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i+1}^- e^{-ik_i x_i} \\ \tilde{p}_{i+1}^+ e^{ik_{i+1} x_i} \end{cases} = \frac{1}{N_i^2 + 1} \begin{bmatrix} N_i^2 - 1 & 2N_i \sqrt{k_{i+1}/k_i} \\ 2N_i \sqrt{k_i/k_{i+1}} & 1 - N_i^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \tilde{p}_i^- e^{-ik_i x_i} \\ \tilde{p}_i^+ e^{ik_i x_i} \end{cases} \quad (14)$$

여기서 변수 N_i 는 다음 식으로 정의된다.

$$\sqrt{\frac{k_{i+1}}{k_i}} N_i = \int_{h_i}^0 \chi_{i,0}(z) \chi_{i+1,0}(z) dz = \frac{I_{i,i+1}}{\sqrt{I_{i,i} I_{i+1,i+1}}}$$

새로운 변수들에 대한 식으로 표현하기 위하여 식 (13)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 식 (15)를 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} \Psi_{i+1} \\ \Omega_{i+1} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \sqrt{\frac{k_i}{k_{i+1}}} \begin{cases} \chi_{i+1,0}(0) \\ \chi_{i,0}(0) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1/N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{cases} \Psi_i \\ \Omega_i \end{cases} \quad (15)$$

마찬가지 방법으로 $h_i > h_{i+1}$ 에 대한 식을 얻을 수 있고 이것과 식 (15)를 묶어 하나의 식으로 표현하면 기존 연구의 식과 동일하게 된다.

$$\begin{cases} \Psi_{i+1} \\ \Omega_{i+1} \end{cases} = \mathbf{R}_i \mathbf{M}_i \begin{cases} \Psi_i \\ \Omega_i \end{cases} \quad (16)$$

여기서 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \sqrt{\frac{k_i}{k_{i+1}}} \begin{cases} \chi_{i+1,0}(0) \\ \chi_{i,0}(0) \end{cases} \begin{bmatrix} N_i^{J_i} & 0 \\ 0 & N_i^{-J_i} \end{bmatrix},$$

$$J_i = \begin{cases} -1, & h_i \leq h_{i+1} \\ 1, & h_i > h_{i+1} \end{cases}$$

이 때 N_i 와 관련된 적분의 하한은 두 개의 수심 가운데 낮은 값을 사용하여야 한다. 식 (16)을 이용하여 n 개의 계단

으로 구성된 지형에서 산란특성은 식 (17)과 같이 순차적인 곱으로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{n+1} \\ \Omega_{n+1} \end{Bmatrix} = \prod_{i=1}^n \mathbf{R}_i \mathbf{M}_i \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Omega_1 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Omega_1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)에서 입사구역에서의 변수 Ψ_1 과 Ω_1 이 주어지면 식 (15)로부터 각 구성계단에 대한 행렬 \mathbf{R}_i 과 \mathbf{M}_i 를 구해 이들을 순차적으로 곱하면 마지막 계단구역에서의 변수가 얻어진다. 그러나 식 (13a)에서 알 수 있듯이 입사파랑의 복소진폭 \tilde{p}_1^+ 은 주어지나 반사파랑의 진폭 \tilde{p}_1^- 은 미지수이다. 결국 Ψ_1 과 Ω_1 은 미지수를 포함한다. 그리고 마지막 구역에서 투과파랑만이 존재하므로 $\tilde{p}_{n+1}^- = 0$ 이 된다. 이 때 투과진폭 역시 미지수이기 때문에 다음 조건식을 이용하여 이들을 계산한다.

입사파의 파봉이 $x=0$ 에 위치했을 때를 기준으로 삼아 이들 미지수와 입사파고 비인 반사율 $R_t = \tilde{p}_1^- e^{-ik_1 x_1} \chi_{1,0}(0) / [\tilde{p}_1^+ e^{ik_1 x_1} \chi_{1,0}(0)]$ 과 투과율 $T_t = \tilde{p}_{n+1}^- e^{ik_{n+1} x_{n+1}} \chi_{n+1,0}(0) / [\tilde{p}_1^+ e^{ik_1 x_1} \chi_{1,0}(0)]$ 을 이용하여 조건식을 나타낼 수 있다. 즉 이를 식 (17)에 대입하고 식 (12)를 이용하면 식 (18)을 얻는다.

$$\begin{Bmatrix} T_t \\ -iT_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1+R_t \\ -i(1-R_t) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)의 유도에 사용된 반사율과 투과율의 정의는 Rey et al.(1992)이 제시한 것이다. 위의 정의는 일견 이상하게 보일 수도 있으나 식 (18)을 사용하여야만 처음과 마지막 구역의 수심이 다른 경우에도 올바른 투과율이 얻어짐을 수치실험을 통해 확인하였다. 식 (18)의 미지수를 풀어 복소 반사율과 투과율을 나타내면 식 (19)가 된다.

$$R_t = \frac{Q_{22} - Q_{11} + i(Q_{12} + Q_{21})}{Q_{22} + Q_{11} + i(Q_{12} - Q_{21})}, \quad (19)$$

$$T_t = \frac{2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})}{Q_{22} + Q_{11} + i(Q_{12} - Q_{21})}$$

여기서 일반적인 의미의 반사율 K_R 과 투과율 K_T 은 식 (19)에서 계산된 값의 크기 즉 절대값이 된다. 행렬 Q 는 식 (16)에 의해 계산할 수 있고 이는 파랑과 지형의 특성에 따라 변하는 함수이다.

2.3 모형비교 분석

앞 두절에서 보인 바와 같이 평면과 근사식의 경우 산란체법과 변환행렬법은 해석해로 표현되고 구성 계단에서 구한 모든 산란특성이 축차적인 방법으로 해를 구성하는 공통점을 갖는다. 단일 계단에서 변분근사법과 산란체법의 반사율과 투과율은 앞에서 언급한 바와 같이 동일하고 에너지 보존법칙이 성립한다. 그러므로 에너지 손실이 없는 다중 계단지형의 반사율과 투과율인 산란체법의 식 (10)과 변환행렬법의 식

(19)로부터 계산한 파랑 에너지가 식 (20)과 같이 보존됨을 유추할 수 있고 수치실험에서 이를 확인하였다.

$$K_R^2 + K_T^2 \frac{(C_g)_{n+1}}{(C_g)_1} = 1 \quad (20)$$

여기서 C_g 는 군속도이고 위 식은 좌측 입사파에 대한 식이다.

변환행렬법은 변분근사법에 의한 단일계단의 해를 새로운 변수를 도입하여 변환하여 식 (17)과 같이 현재의 변수가 이전 변수들로만 표현하게 된다. 이는 산란특성이 유지되는 변환으로 계산상의 편리함이 있는 반면에 식 (18)과 같은 조건식을 사용하여 반사율과 투과율을 계산한다.

산란체법은 서론에 기술한 바와 같이 다중 계단지형에서 발생하는 다중 반사와 투과현상에 기초한 기법으로 내재된 물리현상을 설명할 수 있는 점이 변환행렬법과 뚜렷한 차이점이다. 그리고 식 (10)을 이용하면 반사율과 투과율이 직접 계산할 수 있다. 이러한 점에서 산란체법에 포함된 기법이 변환행렬법보다 우수한 것으로 판단된다.

3. 수치실험

본 연구의 대상인 산란체법과 변환행렬법의 수치적 특성을 파악하기 위해 파랑변형 검증에 많이 인용되는 Booij(1983)의 사면지형과 Davies and Heathershaw(1984)의 단일파형 사주지형과 Guazzelli et al.(1992)의 이중파형 사주지형에 대한 수치실험을 실시하였다. 이 절에서 도시된 모든 수치실험 결과에서 실선은 산란체법 결과(PA), 원을 갖는 점선은 변환행렬법 결과(TM) 그리고 + 기호는 수리모형 실험결과를 의미한다.

사면지형은 좌측의 수심 0.6 m, 우측 0.2 m로 일정하나 이 수심을 직선으로 잇는 사면의 폭이 변하며 좌측에서 입사하는 파랑의 주기는 2초이다. Fig. 1의 횡축은 사면경사(1:S)이며 종축은 반사율이다. 기존 연구에서는 변환행렬법은 입사와 투과 구역의 수심이 같은 경우에 적용하였으나, 본 연구에서 정의구역 좌우의 수심이 다른 경우에 대한 결과를 처음 제시한다. 두 결과에 작은 차이를 보인다. 그림의 종축은 log 척도로 표현되어 뚜렷한 차이를 보이는 우측에서도 그 차이는 비교적 작다. 특히 이 외견상 큰 차이를 보이는 우측에서 산란체법의 결과는 역류파 10개를 사용한 고유함수 전개법의 결과(서, 2008)에 보다 근접하여 산란체법이 변환행렬법보다 우수한 것으로 판단된다.

계산구역의 좌우 수심이 동일한 지형에 단일파형의 사주들이 존재하는 지형에서 파랑변형을 측정된 Davies and Heathershaw (1984)의 수리모형실험 제원은 식 (21)과 같다.

$$h(x) = h_o - A \sin(2\pi x / \lambda), 0 \leq x \leq l \quad (21)$$

여기서 h_o 는 평균수심, λ 사주의 파장, A 사주의 진폭 그리고 l 은 전체 사주의 길이이다. Table 1에 제시된 바와 같이 3개의 다

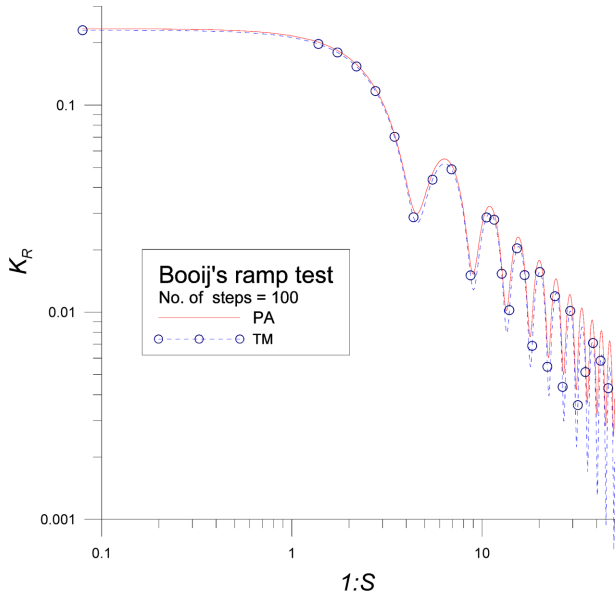


Fig. 1. Reflection coefficients for Booiij's ramp bedform. Solid line - PA; dotted line with o symbols - TM by Devillard et al. (1988).

Table 1. Experimental parameters by Davies and Heathershaw(1984)

Case	A (cm)	λ (cm)	l (cm)	h _o (cm)
DH1	5	100	200	15.6
DH2	5	100	400	15.6
DH3	5	100	1000	31.3

른 실험이 수행되었고 지형의 파장은 100 cm으로 동일하다.

Fig. 2에 위의 두 방법으로 계산한 수치모형 결과를 나타내었고 좌측은 사주가 4개의 정현파로, 우측은 10개로 각각 구성되어 있다. 수치모형 실험은 지형의 파장 당 150개의 계단을 사

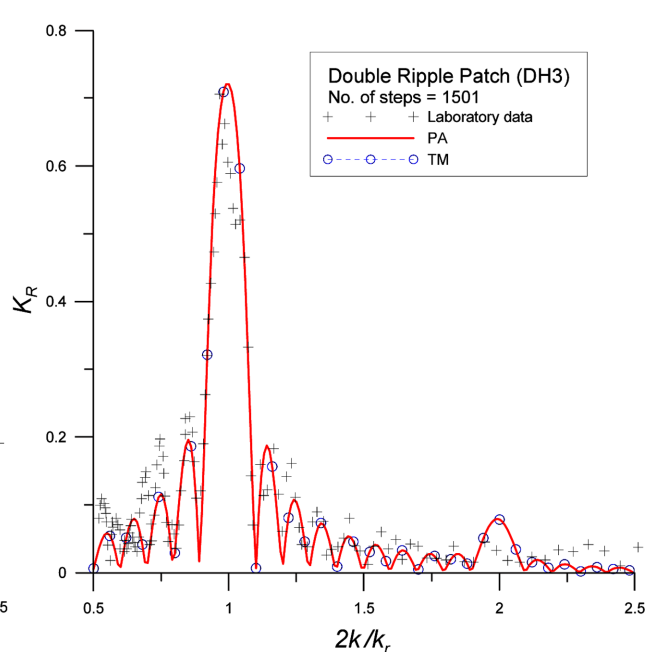
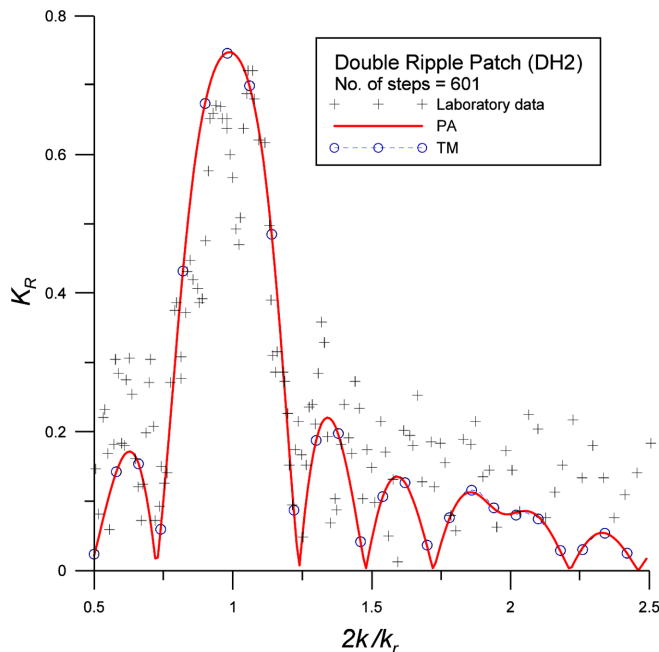


Fig. 2. Comparison of reflection coefficients for single ripple patches. Solid line - PA; dotted line with o symbols - TM by Devillard et al. (1988); + symbols - experiment data by Davies and Heathershaw (1984).

용하였고 그림의 해상도에서는 두 결과가 거의 같은 것으로 보인다. 그러나 계산된 실제 값에서는 약간의 차이가 존재한다.

그림에서 횡축은 파랑과 지형의 파수 비의 두 배이며 이 값이 1이면 지형의 파장은 파랑의 파장의 반에 해당한다. 이 경우 지형에 의해 반사된 파랑들의 위상이 같아 증폭된 Bragg scattering 반사가 발생한다. 그러나 $2k/k_r = 2$ 에서 평면 근사파 모형에 나타나는 증폭은 보다 정밀한 방법의 결과로부터 과장된 것으로 밝혀졌다(Porter and Porter, 2003; 서, 2009b).

Guazzelli et al.(1992)의 수리모형실험에 사용된 보다 복잡한 사주지형은 두 개의 상이한 진폭과 파장의 정현파가 중첩된 지형으로 이 경우 수식은 식 (22)로 주어진다.

$$h(x) = h_o - A[\sin(2\pi x/\lambda_1) + \sin(2\pi x/\lambda_2)], 0 \leq x \leq l \quad (22)$$

이 수리실험은 Table 2에 나타난 바와 같이 총 9개에 이른다. 수치실험의 계단은 긴 정현파의 파장 λ₁을 기준으로 파장 당 150개를 사용하였다.

수치실험은 Table 2의 모든 조건에 대해 실시하였고 실험 결과는 약간의 차이는 있으나 Fig. 3과 같은 해상도에서는 거의 같아 보인다. 수치실험 결과 가운데 2개를 Fig. 3에 나타내었다.

Table 2. Experimental parameters of Guazzelli et al.(1992)

Case	A (cm)	λ ₁ (cm)	λ ₂ (cm)	l (cm)	h _o (cm)		
					a	b	c
G1	1	12	6	48	2.5	3	4
G2	0.5	6	4	48	2.5	3	4
G3	1	6	4	48	2.5	3	4

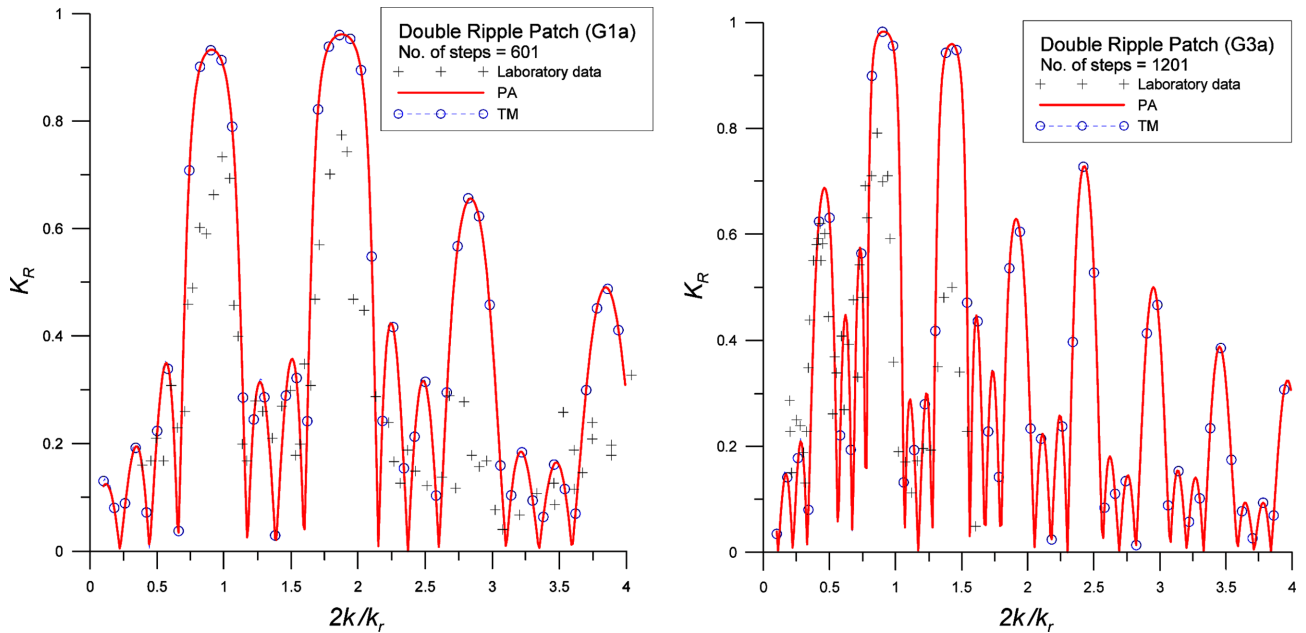


Fig. 3. Comparison of reflection coefficients for a double ripple patch. Solid line - PA; dotted line with o symbols - TM by Devillard et al. (1988); + symbols - experiment data by Guazzelli et al. (1992).

본 수치실험은 평면파 근사식을 사용한 즉 진행파만을 사용한 근사식을 이용한 것으로 역류파를 포함한 결과와 차이를 보일 수 있다. 특히 지형이 복잡하고 해저경사가 급한 Fig. 3의 경우 역류파와 진행파의 상호작용이 고려되어야 한다 (Athanasoulis and Belibassakis, 1999; Porter and Porter, 2003; 서, 2009b). 지형이 덜 복잡한 Fig. 1과 2의 경우 평면파 근사식의 결과도 비교적 정확하다. 이는 역류파의 영향이 아주 작아 진행파만의 근사로도 충분히 정확하게 파랑변형을 나타낼 수 있음을 의미한다.

4. 결 론

산란체법과 변형행렬법은 진행파만을 이용한 평면파 근사식에 근거하여 계단식 지형에 적용할 수 있다. 이 방법들은 해석해를 가지며 해는 순차적인 방법으로 표현되는 공통점을 가진다. 따라서 해의 표현법은 달라도 이들은 같아야 할 것으로 예상되어 이를 입증하는 것이 본 연구의 동기가 되었다. 이를 위해 잘 알려진 사례에 대한 수치실험을 실시하여 그 결과를 비교하였고 이들 간에는 약간의 차이가 있음이 밝혀졌다.

이 차이를 규명하기 위해 각 방법에 사용된 가정과 주요한 과정을 기술하였다. 변형행렬법은 하나의 계단지형에 대한 Miles(1967)의 변분근사해를 이용하여 이를 변형한 것으로 평면파 근사식의 경우 변분근사해는 산란체법의 해와 동일하다 (서, 2009a). 그러므로 다중 계단에 대한 변형행렬법의 해는 이론적으로는 산란체법의 해와 같아야 한다. 그러나 실제 수치실험 결과에서 차이가 발생하였고 이는 주로 내재한 수치기법에 의한 것으로 판단된다. 본 실험에서는 수치 안정성을 높이기 위해 배정도(Double precision) 값을 사용하였고 보다

정밀한 기존 결과와 비교할 때 산란체법의 해가 엄밀해에 보다 접근한 것으로 나타났다.

산란체법은 지형의 복잡한 반사와 투과에 대한 물리적 현상에 기초한 방법으로 내재된 과정을 쉽게 설명할 수 있는 장점이 있다. 이 방법들은 평면파 근사식을 사용함으로써 계산이 매우 빠르고 용이하며 지형이 복잡하지 않은 경우에는 상당히 정확하게 파랑변형을 기술할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 한국해양과학기술진흥원의 “운용해양(해양예보) 시스템 연구”, 한국해양연구원의 “해일침수범람지역 예측기술 및 재해도(Hazard Map) 작성기술 개발”과 “연안파랑 관측, 분석 및 장기산출”에서 수행된 결과의 일부입니다.

참고문헌

- 서승남 (2008). 산란체법에 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 한국해양·해양공학회논문집, 20(5), 439-451.
- 서승남 (2009a). 단일계단 지형에서 변분근사법과 고유함수 전개법에 의한 파랑변형 비교. 한국해양·해양공학회논문집, 21(2), 91-107.
- 서승남 (2009b). 분할행렬법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 대한토목학회논문집, 29(4B), 377-384.
- Athanasoulis G.A. and Belibassakis K.A. (1999). A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.*, 389, 275-301.
- Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Eng.*, 7, 191-203.

- Chamberlain, P.G. and Porter, D. (2006). Multi-mode approximations to wave scattering by an uneven bed. *J. Fluid Mech.*, 556, 421-441.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984). Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443.
- Devillard, P., Dunlop, F. and Souillard B. (1988). Localization of gravity waves on a channel with a random bottom, *J. Fluid Mech.*, 186, 521-538.
- Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M. (1992). Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.*, 245, 301-317.
- Miles, J.W. (1967). Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.*, 28, 755-767.
- O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1993). A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Applied Ocean Res.*, 15, 1-11.
- Porter, R. and Porter, D. (2003). scattered and free waves over periodic beds. *J. Fluid Mech.*, 483, 129-163.
-

원고접수일: 2010년 4월 5일

수정본채택: 2010년 5월 24일

게재확정일: 2010년 5월 28일