

# 손실 매질에 대한 Isotropic-Dispersion 유한 차분식의 2D Crank-Nicolson FDTD 기법

## 2D Crank-Nicolson FDTD Method Based on Isotropic-Dispersion Finite Difference Equation for Lossy Media

김 현 · 고 일 석\* · 육 종 관

Hyun Kim · Il-Suek Koh\* · Jong-Gwan Yook

### 요 약

기존 Crank-Nicolson FDTD 기법(CN FDTD 기법)의 비등방성 분산 특성을 개선하기 위한 CN ID-FDTD 기법을 제안하였다. 제안한 CN ID-FDTD 기법은 공간 미분 연산을 위해 기존 CN FDTD 기법의 centered 유한 차분식(Finite Difference equation: FD 연산식)이 아닌 isotropic-dispersion 유한 차분식(ID-FD 연산식)<sup>[1],[2]</sup>을 이용한다. 본 논문에서는 손실 매질에 대한 CN ID-FDTD 기법의 분산 관계식을 유도하였고, 이 분산 관계식을 이용해 ID-FD 연산식에서 분산 오차(dispersion error)를 줄이는 가중치(weighting factor)와 보정값(scaling factor)을 제시하였다. 그리고 해석 결과의 정확성 비교를 통해 CN ID-FDTD 기법에서는 기존 CN FDTD 기법의 단점이었던 비등방성 분산 오차가 확연하게 감소하는 것을 확인하였다.

### Abstract

The Crank-Nicolson isotropic-dispersion finite difference time domain(CN ID-FDTD) scheme is proposed based on isotropic-dispersion finite difference(ID-FD) equation<sup>[1],[2]</sup>. The dispersion relation of CN ID-FDTD is derived for lossy media by solving the eigenvalue problem of iteration matrix in spatial spectral domain, in addition, the weighting factors and scaling factors of the CN ID-FDTD scheme are presented for low dispersion error. The CN ID-FDTD scheme makes the dispersion error drastically reduced and shows accurate numerical results compared to the conventional Crank-Nicolson FDTD method.

Key words : FDTD, Low Dispersion FDTD, Isotropic-Dispersion FDTD Scheme, Crank-Nicolson Scheme

### I. 서 론

K. Yee에 의해 FDTD 기법<sup>[3]</sup>이 제안된 이후, FDTD 기법은 다른 전자기 수치 해석 기법에 비해 구현이 쉽고 full wave 시뮬레이션이 가능하다는 장점으로

로 인해 다양한 분야의 전자기 문제 해석에 적용되어 왔다<sup>[4]</sup>. 하지만 FDTD 기법은 전자기장이 계산 공간상에서 전파하여 나아갈 때 진행 방향에 따라 다른 파수(wavenumber)를 가지는 비등방성 분산 특성(anisotropic dispersion characteristic)의 분산 오차로 인

「본 연구는 “지식경제부 및 정보통신산업진흥원의 대학 IT연구센터 지원사업(NIPA-2010-(C1090-1011-0006))”과 “방위사업청과 국방과학연구소(UD100002KD)”의 지원으로 수행되었음.»

「본 연구의 3D에 관해 확장한 내용을 IEEE Transactions on Antennas and Propagation에 제출하여 심사 중임<sup>[5]</sup>」

연세대학교 전기전자공학과(Dept. of Electrical and Electronics Engineering, Yonsei University)

\*인하대학교 정보통신대학원(Graduate School of Information and Communication, Inha University)

· 논문 번호 : 20100423-050

· 교신저자 : 고일석(e-mail : ikoh@inha.ac.kr)

· 수정완료일자 : 2010년 6월 23일

해 계산의 정확도가 떨어진다<sup>[4]</sup>. 따라서 위상에 민감한 문제나 계산 공간이 큰 전자기 문제에서는 분산 오차를 줄이기 위해 셀 크기(cell size)와 시간 증분(time-step)을 작게 해야 하고, 그 결과 해석 과정에서 많은 메모리와 계산 시간이 필요하게 된다. 이러한 비등방성 분산 특성을 해결하기 위해 많은 기법들이 제시되었는데, 그 중 하나가 ID-FD 연산식<sup>[1],[2],[6]-[8]</sup>이다. ID-FD 연산식은 기존 Yee 격자<sup>[3]</sup>상에서 미분 지점을 중심으로 모든 축방향상의 샘플링 지점을 이용하는 유한 차분식의 선형함으로 지금까지 explicit FDTD 기법에 대해 2차원(2D)<sup>[1],[2]</sup>과 3차원(3D)<sup>[8]</sup> ID-FD 연산식이 제안되어 ID-FDTD 기법의 유효성과 정확성을 보였다.

한편, FDTD 기법은 기법의 안정도(stability)에 따라 explicit FDTD 기법과 implicit FDTD 기법으로 분류할 수 있는데, explicit FDTD 기법은 기법의 안정도를 위해 Courant-Friedrich-Lewy 조건(CFL 조건)을 만족하는 시간 증분을 사용하여 업데이트해야 한다. 하지만 implicit FDTD 기법은 CFL 조건보다 큰 시간 증분을 가지고 계산을 하여도 기법의 안정도가 무조건 안정(unconditionally stable)이기 때문에 전체 해석 시간을 줄일 수 있는 장점을 가지게 된다<sup>[9]</sup>. 하지만 implicit 기법의 경우, 시간 증분을 늘릴수록 비등방성 분산 특성에 의한 분산 오차가 점점 커지게 되고<sup>[10],[11]</sup>, 이 오차로 인해 implicit FDTD 기법을 적용한 전자기 문제 해석의 경우 그 결과의 정확성을 보장할 수 없는 치명적인 단점이 있다.

이에 본 논문에서는 2D explicit FDTD 기법에서 등방성 분산 특성을 보였던 ID-FD 연산식<sup>[5]</sup>을 implicit FDTD 기법에 적용해 비등방성 분산 특성을 해결하고, 그 결과 정확한 해석이 가능함을 보였다. 그래서 기존 implicit FDTD 기법 중 하나인 CN FDTD 기법<sup>[11]</sup>을 기반으로 한 CN ID-FDTD 기법을 제안하였다. 이 논문은 비손실 매질에 대한 분산 특성과 안정도 분석을 보인 기존 연구<sup>[12]</sup>를 손실 매질에 대해 확장하여 비손실 매질에 대한 기법의 특성을 포함하였다. 또한 제안한 기법의 구현을 통해 전자기 문제를 해석함으로써 제안한 CN ID-FDTD 기법의 정확성을 보였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 CN ID-FDTD 기법의 업데이트식을 기반으로 분산 관계식, 보정값 및 가중치, 기법의 안정도 등을

분석하였다. 3장에서는 구현된 2D CN ID-FDTD 기법을 적용해 직사각형 공진기를 해석함으로써 제안한 기법의 유효성을 보였다.

## II. 2D CN ID-FDTD 기법

CN FDTD 기법은 맥스웰 방정식을 계산하기 위해 전기장의 공간에 대한 미분식을 시간 영역의 산술 평균값을 사용해 식을 업데이트 한다<sup>[11]</sup>. 기존 CN FDTD 기법은 시간과 공간에 대한 미분 연산을 위해 centered FD 연산식을 사용하는데 반해, 제안한 2D CN ID-FDTD 기법은 시간에 대해서는 기존 CN FDTD 기법과 동일한 centered FD 연산식을 사용하고 공간에 대해서는 2D ID-FD 연산식<sup>[1],[2]</sup>,  $\tilde{\partial}_u^{ID}$ 를 이용한다.

$$\tilde{\partial}_u^{ID} = \frac{1}{sc_{1,u}} [(1-\alpha) \tilde{\partial}_u^{(1)} + \alpha \tilde{\partial}_u^{(2)}], \quad (1)$$

식 (1)에서  $u=x, y$ 이고,  $\tilde{\partial}_u^{(1)}$ 과  $\tilde{\partial}_u^{(2)}$ 는 각각 centered FD 연산식과 6개의 샘플링 지점을 이용한 FD 연산식을 나타낸다. 그리고  $sc_{1,u}$ 는 보정값이고,  $\alpha$ 는  $\tilde{\partial}_u^{(1)}$ 과  $\tilde{\partial}_u^{(2)}$ , 두 연산자에 대한 가중치이다<sup>[1]</sup>. 계산 공간이 복소 유전율(complex permittivity),  $\epsilon' + \sigma/j\omega$ 과 투자율(permeability),  $\mu$ 를 가지는 매질이라고 가정하였을 경우 2D CN ID-FDTD 기법의 업데이트 식은 다음과 같다.

1) 압페어 법칙:

$$\begin{aligned} E_{z|I,J}^{n+1} &= \frac{2\epsilon' - sc_2 \times \sigma \Delta t}{2\epsilon' + sc_2 \times \sigma \Delta t} E_{z|I,J}^n \\ &- \frac{\Delta t}{(2\epsilon' + sc_2 \times \sigma \Delta t)} (\tilde{\partial}_y^{ID} H_{z|I,J}^{n+1} + \tilde{\partial}_y^{ID} H_{z|I,J}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{(2\epsilon' + sc_2 \times \sigma \Delta t)} (\tilde{\partial}_x^{ID} H_{y|I,J}^{n+1} + \tilde{\partial}_x^{ID} H_{y|I,J}^n) \\ &- \frac{2\Delta t}{(2\epsilon' + sc_2 \times \sigma \Delta t)} J_{z|I,J}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

2) 패러데이 법칙:

$$\begin{aligned} H_{z|I,J+1/2}^{n+1/2} &= H_{z|I,J+1/2}^n \\ &- \frac{\Delta t}{2\mu} (\tilde{\partial}_y^{ID} E_{z|I,J+1/2}^{n+1/2} + \tilde{\partial}_y^{ID} E_{z|I,J+1/2}^n), \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} H_{y|I+1/2,J}^{n+1/2} &= H_{y|I+1/2,J}^n \\ &+ \frac{\Delta t}{2\mu} (\tilde{\partial}_x^{ID} E_{z|I+1/2,J}^{n+1/2} + \tilde{\partial}_x^{ID} E_{z|I+1/2,J}^n), \end{aligned} \quad (3-2)$$

여기에서  $sc_2$ 는 손실항  $\sigma$ 를 보정하여 수치 복소 파수(numerical complex wavenumber)의 분산 오차를 줄이는 역할<sup>[6],[7]</sup>을 하고  $\Delta t$ 는 시간 증분,  $\Delta x$ 와  $\Delta y$ 는  $x, y$  축의 셀 크기를 나타낸다. 또한 위첨자는 시간 영역의 인덱스이고, 아래 첨자는 Yee 격자로 이산화된 공간 영역의 인덱스를 나타낸다.

### 2-1 분산 관계식(Dispersion Relation)

2D CN ID-FDTD 기법에 대한 분산 관계식은 전기장과 자기장을 좌표 공간  $I, J$ 에서 수치 복소 파수의 영역인 공간 스펙트럼 영역으로 변환시킴으로써 구할 수 있다<sup>[13]</sup>. 따라서 식 (2)와 (3)을 수치 복소 파수에 대해 푸리에 변환하면 두 식은 공간 스펙트럼 영역에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} A_{CN,L} \vec{F}^{n+1} &= A_{CN,R} \vec{F}^n \\ \Rightarrow \vec{F}^{n+1} &= A_{CN,L}^{-1} A_{CN,R} \vec{F}^n = A_{CN} \vec{F}^n, \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서  $\vec{F}^n$ 는 식 (5)와 같이 표현되는, 전자기장으로 구성된 벡터이다.

$$\vec{F}^n = \begin{pmatrix} \hat{E}_z^n & \hat{H}_x^n & \hat{H}_y^n \end{pmatrix}^T, \quad (5)$$

이 식에서 위첨자  $T$ 는 벡터의 전치(transpose)를 의미한다. 식 (4)에서  $A_{CN}$ 은 공간 스펙트럼 영역에서 CN ID-FDTD 기법의 한 계산 단계에 대한 반복 행렬(iteration matrix)로서 이는 식 (6)과 같이 표현된다.  $\hat{\gamma}_x$ 와  $\hat{\gamma}_y$ 는 계산 공간상 전자기장의 수치 복소 파수인  $\hat{\gamma}$ 의  $x, y$ 방향의 성분으로 각각  $\hat{\gamma}_x = \hat{\gamma} \cos \phi$ 와  $\hat{\gamma}_y = \hat{\gamma} \sin \phi$ 으로 정의되고,  $\phi$ 는 전자기장의 진행 방향을 나타낸다. 이  $\hat{\gamma}_x$ 와  $\hat{\gamma}_y$ 는 복소수로 식 (8)과 같이 수치 감쇠 상수(numerical attenuation constant),  $\hat{a}_{x(y)}$ 와 수치 위상 상수(numerical phase constant),  $\hat{k}_{x(y)}$ 로 표현된다.

$$\hat{\gamma}_{x(y)} = \hat{a}_{x(y)} + j \hat{k}_{x(y)}. \quad (8)$$

이 때 각주파수,  $\omega$ 의 전자기장을 가정하면  $\vec{F}^n$ 는 다음과 같은 관계식을 가지고

$$\vec{F}^n = \begin{pmatrix} \hat{E}_z & \hat{H}_x & \hat{H}_y \end{pmatrix}^T e^{j\omega \Delta t}, \quad (9)$$

따라서 식 (4)는 다음과 같은 관계식을 가져야 한다.

$$\vec{F}^{n+1} = e^{j\omega \Delta t} \vec{F}^n = A_{CN} \vec{F}^n. \quad (10)$$

이 때 식 (10)이 성립하려면 식 (11)과 같은 조건이 만족해야 하고, 이 조건을 통해 손실 매질에 대한 2D CN ID-FDTD 기법의 분산 관계를 구할 수 있다.

$$\det(e^{j\omega \Delta t} I_3 - A_{CN}) = 0, \quad (11)$$

여기에서  $I_3$ 는 3차 항등 행렬이고,  $\det(M)$ 은 행렬  $M$ 의 행렬식(determinant)을 나타낸다. 이와 같은 방법으로 구한 2D CN ID-FDTD 기법의 분산 관계식은 식 (12)와 같이 정리된다.

$$T = K_x^2 + K_y^2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} T = & - \left( \frac{\epsilon'}{\Delta t} \tan \frac{\omega \Delta t}{2} - j \frac{sc_2 \sigma}{2} \right) \\ & \times \frac{\mu}{\Delta t} \tan \frac{\omega \Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

식 (12)에서  $\sigma=0$ 으로 가정하면 비손실 매질에 대한 CN ID-FDTD 기법의 분산 관계식<sup>[12]</sup>이 되고,  $\alpha=0$ 와  $sc_2=1$ 일 경우에 대해서는 손실 매질에 대한 기존 CN FDTD 기법<sup>[11]</sup>과 동일한 분산 관계식이 된다. 분산 관계식에 적용되는 보정값( $sc_{1u}, sc_2$ )과 가중치( $\alpha$ )는 2-2절에 기술한 방법을 이용하여 구한다. CN ID-FDTD 기법의 분산 특성을 분석하기 위해 식 (12)의 분산 관계식을 자유 공간과 손실 매질에 대한 분산 오차를 계산하였다. 그림 1과 2를 통해 확인할 수 있듯이 CN ID-FDTD 기법의 분산 관계는 기

$$A_{CN} = A_{CN,L}^{-1} A_{CN,R} = \begin{bmatrix} \epsilon' \Delta t^{-1} + sc_2 \times \sigma / 2 & -K_y & K_x \\ K_y & \mu \Delta t^{-1} & 0 \\ -K_x & 0 & \mu \Delta t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon' \Delta t^{-1} - sc_2 \times \sigma / 2 & K_y & -K_x \\ -K_y & \mu \Delta t^{-1} & 0 \\ K_x & 0 & \mu \Delta t^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$K_u = \frac{1}{sc_{1,u} \Delta u} \sinh \left( \frac{\hat{\gamma}_u \Delta u}{2} \right) \left[ (1-\alpha) + \alpha \cosh^2 \left( \frac{\hat{\gamma}_u \Delta u}{2} \right) \right]. \quad (7)$$

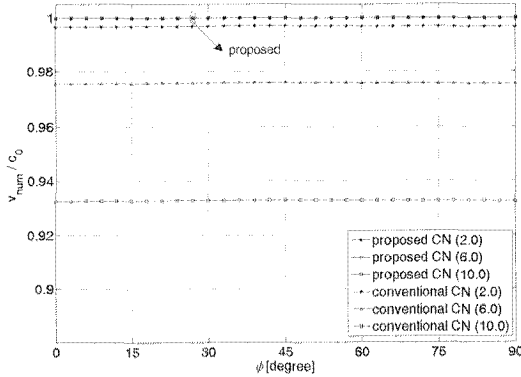


그림 1. 전파 방향에 따른 2D CN ID-FDTD 기법의 위상 속도(자유 공간, 50 CPW, 주파수는 100 MHz, 괄호 안의 숫자는  $S_{2D}$ 를 의미)

Fig. 1. Normalized phase velocity of 2D CN ID-FDTD scheme along the propagation direction with several Courant number(free space, 50 CPW, and frequency: 100 MHz. The numbers in the parentheses is  $S_{2D}$ ).

존 CN FDTD 기법과는 달리 매우 작은 분산 오차 특성을 보였다. 그림 1과 2는 Courant-Friedrich-Lewy 수 (Courant 수,  $S_{2D}$ )에 따른 자유 공간에서 CN ID-FDTD 기법의 분산 특성이고, 이 때  $S_{2D}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$S_{2D} = c_0 \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}. \quad (14)$$

그림 1은 전파 방향에 따른 수치 위상 속도(numerical phase velocity,  $v_{num}$ )를 계산한 것이고, 그림 2는 모든 전파 방향 중 자유 공간의 전파 속도,  $c_0$ 에 대한 최대 오차를 계산한 것으로 이때 최대 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\max |1 - v_{num}/c_0| \quad \text{for } 0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}. \quad (15)$$

그 결과 그림 1과 2를 통해 제안한 CN ID-FDTD 기법은 기존 CN FDTD 기법과는 달리 Courant 수에 상관없이 전자기장의 위상 속도가 등방성 분산 특성과 아주 작은 분산 오차를 유지하는 것을 확인할 수 있었다 ( $\approx 10^{-12}$  @ 50 CPW(cells per wavelength)). 이 때 주파수 100 MHz를 기준으로 셀 크기를 계산하였다. 또한 손실 매질에 대해 제안한 CN ID-FDTD 기법의 분산 특성을 계산하였는데, 그림 3처럼 기존

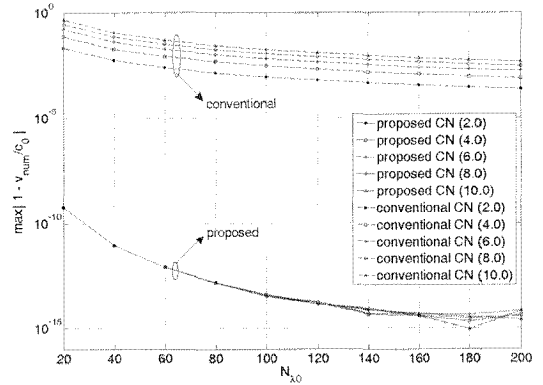


그림 2. CPW에 따른 2D CN ID-FDTD 기법에서 위상 속도의 최대 오차(자유 공간, 주파수는 100 MHz, 괄호 안의 숫자는  $S_{2D}$ 를 의미)

Fig. 2. Maximum errors of normalized phase velocity of 2D CN ID-FDTD scheme as the function of CPWs with several Courant number(free space and frequency: 100 MHz. The numbers in the parentheses is  $S_{2D}$ ).

CN FDTD 기법의 큰 오차와는 달리 제안한 기법은 감쇠 상수와 위상 속도의 오차가 확연하게 줄어들어 손실 매질에 대한 explicit ID-FDTD 기법<sup>[6],[7]</sup>처럼 복소 파수가 등방성 특성을 보였다.

그림 2와 3에서 CN FDTD 기법은 작은  $S_{2D}$ 에 대해서도 분산 오차가 큰데, 그 이유는 다음과 같다. 비손실 매질에 대한 CN FDTD 기법의 경우 축방향으로 진행되는 수치 위상 상수는 식 (16)과 같이 표현된다.

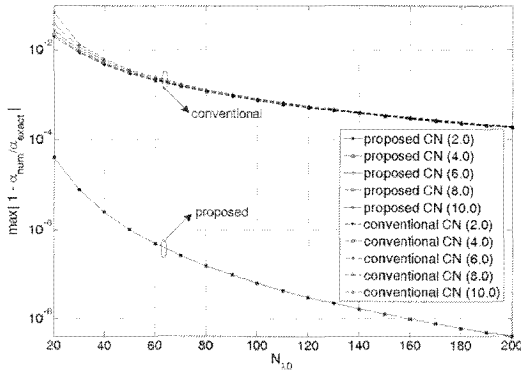
$$\widehat{k}_u = \frac{2}{\Delta u} \sin^{-1} \left( \frac{\Delta u}{c_0 \Delta t} \tan \frac{\omega \Delta t}{2} \right). \quad (16)$$

여기에서  $S_{2D} \rightarrow 0$ 는  $\Delta t \rightarrow 0$ 이기 때문에 식 (16)의 우변은 다음과 같이 근사화될 수 있다.

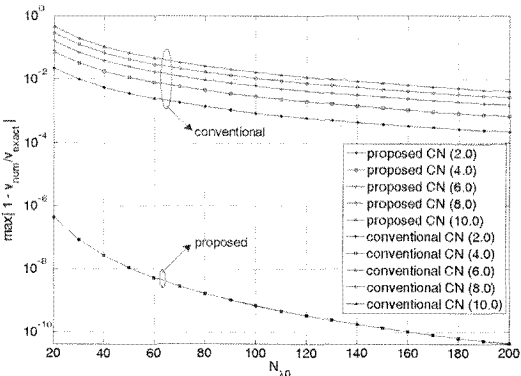
$$\widehat{k}_u = \frac{2}{\Delta u} \sin^{-1} \left( \frac{\Delta u}{2} \frac{\omega}{c_0} \right). \quad (17)$$

식 (17)에서 보면 정확한 수치 상수인  $\omega/c_0$ 와 오차가 항상 존재하게 된다. 즉,  $S_{2D}$ 를 아무리 작게 하더라도 셀 크기에 의한 오차는 항상 존재하게 된다. 그러므로 공간 영역의 샘플링 비율을 높여  $\Delta u \rightarrow 0$ 으로 하면  $\sin^{-1}(x) \approx x$ 의 관계에 의해 식 (17)은 다음과 같이 정리된다.

$$\widehat{k}_u \approx \frac{\omega}{c_0}. \quad (18)$$



(a) 감쇠 상수  
(a) Attenuation constant



(b) 위상 속도  
(b) Phase velocity

그림 3. 손실 매질의 경우 2D CN ID-FDTD 기법의 복소 파수의 최대 오차 ( $\epsilon'=1.5$ ,  $\sigma=0.001$ ,  $\mu_r=1$ . 주파수는 100 MHz. 괄호 안의 숫자는  $S_{2D}$ 를 나타냄)

Fig. 3. Maximum errors of normalized wave-number of 2D CN ID-FDTD scheme as the function of CPWs with several Courant number in lossy media ( $\epsilon'=1.5$ ,  $\sigma=0.001$ , and  $\mu_r=1$ . frequency: 100 MHz, the numbers in the parentheses is  $S_{2D}$ )

따라서 기존 CN FDTD 기법을 이용해 분산 오차를 줄이려면 시간과 공간 영역에서 샘플링 비율을 높여 시간 증분과 셀 크기를 매우 작게 해야 한다. 이에 반해 제안한 CN ID-FDTD는 최적화된 보정값과 가중치를 이용해 분산 오차를 줄일 수 있어 계산 시간과 메모리에서 이득을 가지게 된다.

## 2-2 보정값과 가중치(Scaling and Weighting Factors)

식 (1)의 ID-FD 연산식을 적용하기 위해서는 두 FD 연산식의 선형합에 대한 가중치와 매질 내의 파수를 조정해 줄 보정값이 필요하다. 이 둘로 인해 ID-FDTD 기법들<sup>[1],[2],[6]~[8]</sup>은 계산 공간상에서 전자기장은 등방 분산 특성과 동시에 정확한 파수를 가지게 한다. 우선 2D CN ID-FDTD 기법의 보정값은 앞서 보고한, 손실 매질에 대한 explicit ID-FDTD 기법<sup>[6],[7]</sup>과 유사하게 분산 관계식, 식 (12)에서 축방향( $\phi=0^\circ, 90^\circ$ )의 파수를 정확한 값,  $\gamma_{exact}$ 로 설정해 줌으로써 결정된다. 식 (12)에서  $\phi=0^\circ, 90^\circ$ 일 경우 식 (12)에서  $\alpha$ 가 사라져 가중치에 상관없이 파수가 고정되기 때문이다<sup>[1],[2],[6],[7]</sup>. 우선  $x$ 축 방향의 파수를 살펴보면, 식 (12)에서  $\phi=0^\circ$ 로 정한 뒤 보정값  $sc_{1,x}$ 와  $sc_{2,x}$ 를 이용해  $\gamma_{exact}$ 가 되도록 보정할 수 있고, 보정값과  $\gamma_{exact}$ 는 식 (19)와 같은 관계식을 갖게 되고

$$T = \left[ \frac{1}{sc_{1,x}\Delta x} \sinh\left(\frac{\gamma_{exact}\Delta x}{2}\right) \right]^2 \quad (19)$$

이는 보정값( $sc_{1,x}$ ,  $sc_{2,x}$ )에 대한 이원 일차 연립 방정식으로 해를 다음 식 (20), (21)과 같이 정확하게 구할 수 있다.

$$sc_{1,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t \tan \frac{\omega\Delta t}{2}} \sqrt{-\frac{1}{\epsilon'\mu} \text{Re}[S_{exact,x}^2]} \quad (20)$$

$$sc_{2,x} = -\frac{2sc_{1,x}\epsilon'}{\sigma\Delta t} \tan \frac{\omega\Delta t}{2} \frac{\text{Im}[S_{exact,x}^2]}{\text{Re}[S_{exact,x}^2]} \quad (21)$$

이때  $S_{exact,x}^2 = \sinh^2(\gamma_{exact}\Delta x/2)$ 이고,  $\text{Re}[z]$ 와  $\text{Im}[z]$ 는 각각  $z$ 의 실수부와 허수부를 가리킨다. 이와 같은 유사한 방법으로  $y$ 축에 대한 보정값을 구할 수 있다. 한편, 손실항에 대한 보정값  $sc_{2,u}$ 는 식 (21)에서 알 수 있듯이  $sc_{1,u}$ 에 대한 함수로서 정사각형 셀이 아닌 직사각형 셀일 경우  $sc_{2,x} \neq sc_{2,y}$ 이다. 따라서 업데이트 식 (2)에 사용되는  $sc_2$ 는 이들의 산술 평균값을 사용한다<sup>[14]</sup>.

위와 같은 방법으로 보정값을 결정한 뒤 CN ID-FDTD 기법에 대한 가중치를 결정해야 한다. 손실 매질의 경우, 식 (12)는 가중치,  $\alpha$ 에 대한 이차 방정식으로 변형된다<sup>[6],[7]</sup>. 하지만 이 식은 계수가 복소수인 형태로  $\alpha$ , 역시 복소수로 계산되어 실수 영역에서 정의되는 ID-FD 연산식을 이용해 FDTD 기법을 구현하는 것은 어렵다. 따라서 손실 매질에 대한

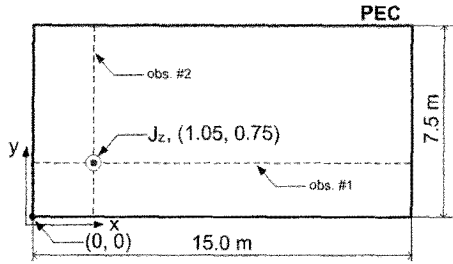


그림 4. 모의 실험의 직사각형 공진기  
Fig. 4. The geometry of a rectangular cavity in numerical results.

explicit ID-FDTD 기법<sup>[6],[7]</sup>과 같이 비손실 매질의 가중치를 이용해 CN ID-FDTD 기법을 구현하였다.

### 2-3 안정도 분석(Stability Analysis)

제한한 CN ID-FDTD 기법의 안정도를 분석하기 위해 비손실 매질은 가정한 수치 복소 파수,  $\widehat{\gamma}_x = j\widehat{k}_x$ 와  $\widehat{\gamma}_y = j\widehat{k}_y$ 에 대한 푸리에 분석<sup>[15]</sup>을 수행하였다. 비손실 매질을 가정하고( $\sigma=0$ ) 업데이트 식 (2)와 (3)을 공간 스펙트럼 영역으로 변환하면

$$[1 + c_0^2 \Delta t^2 (K_x^2 + K_y^2)] \xi^2 - 2[1 - c_0^2 \Delta t^2 (K_x^2 + K_y^2)] \xi + [1 + c_0^2 \Delta t^2 (K_x^2 + K_y^2)] = 0. \quad (22)$$

이때  $\xi$ 는 매 업데이트에 따라 커지는 진폭 계수(amplitude factor)를 나타낸다. 식 (22)는  $\xi$ 에 대한 이차방정식이기 때문에 근의 공식에 의해 진폭 계수,  $\xi$ 는

$$\xi = \frac{(1 - \Sigma) \pm j2\sqrt{\Sigma}}{1 + \Sigma}, \quad (23)$$

이 때  $\Sigma = c_0^2 \Delta t^2 (K_x^2 + K_y^2)$ .  $\xi$ 를 위상 형태로 바꾸면 식 (24)와 같이 항상 크기가 1이 되는 것을 확인할 수 있다. 따라서 CN ID-FDTD 기법은 무조건 안정(unconditionally stable)하다.

$$|\xi| = 1, \quad \angle \xi = \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\Sigma}}{1 - \Sigma}. \quad (24)$$

### III. 모의 실험 결과

제한한 2D CN ID-FDTD 기법의 타당성을 검증하기 위해 그림 4와 같은 직사각형 공진기(rectangular

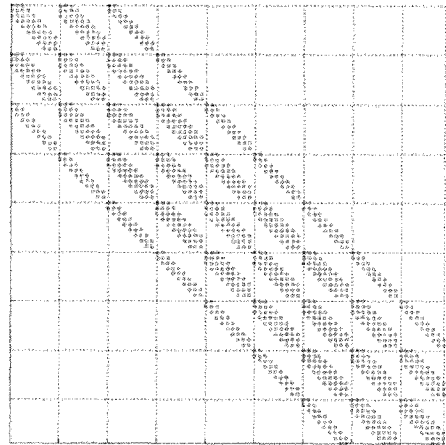


그림 5. Penta-diagonal 블록 행렬 형태의 2D CN ID-FDTD 기법의 계수 행렬

Fig. 5. Coefficient matrix of penta-diagonal block matrix for 2D CN ID-FDTD scheme.

cavity)에서 전기장의 크기를 계산하였다.  $TM_z$  모드를 가정하였고, 공진기의 크기는 15 m×7.5 m이고, 직사각형 왼쪽 하단을 원점으로 가정하였을 경우 전류원  $J_z$ 는 (1.05, 0.75)에 위치해 있다. 공진기 내부의 매질은 자유 공간을 가정하였고, 전체 계산 공간은 0.05 m×0.05 m의 정사각형 셀로 분산화하였다. 인가되는 파형은 변조 가우시안 펄스(modulated Gaussian pulse)로 중심 주파수는 100 MHz이고, 주파수 폭(frequency bandwidth)은 최대 크기 대비 -150 dB가 되는 주파수 폭으로 1 kHz로 가정하여 협대역 신호를 인가하였다. 그 이유는 공진 주파수를 피해 evanescent 모드인 100 MHz에서 전기장 분포를 계산하기 위해서이다. 2D CN ID-FDTD 기법은 선형 시스템 형태로 표현되는데, 시스템의 계수 행렬(coefficient matrix)은 그림 5와 같은 penta-diagonal 블록 행렬을 가지게 된다. 따라서 본 논문에서는 이 선형 시스템을 계산하기 위해 sparse linear solver 중 하나인 SuperLU<sup>[16]</sup>를 이용하였다. 이 때 맥스웰 방정식을 풀기 위한 전체 업데이트 식의 순서도는 그림 6과 같고,  $t = (n+1)\Delta t$ 에서 미분한 값을 다음 업데이트 할 때인  $t = (n+2)\Delta t$ 일 때도 사용하기 때문에 미분한 값을 저장해 빠른 계산을 하였다.

전기장은  $x$ 축을 따라 놓인 관측선 1, (0.0~15.0, 0.75)과  $y$ 축을 따라 놓인 관측선 2, (1.05, 0.0~7.5)에서 각각 제한한 CN ID-FDTD 기법과 기존 CN

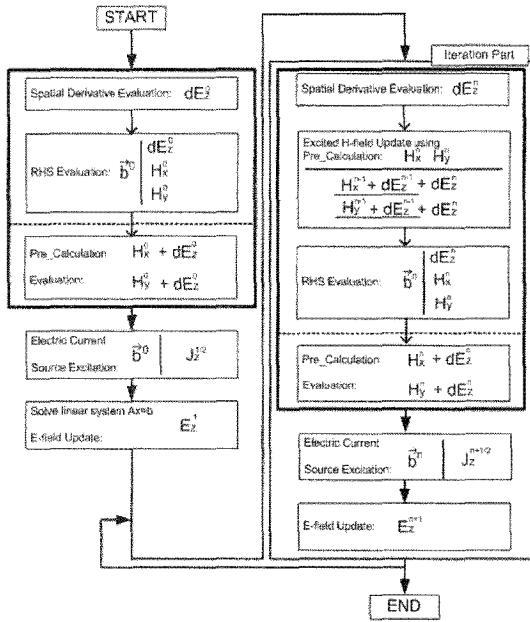


그림 6. 2D CN ID-FDTD 기법의 업데이트 식에 대한 순서 흐름도  
 Fig. 6. Flow chart for the update equation of 2D CN ID-FDTD scheme.

FDTD 기법의 계산 결과를 비교하였다. 전류원을 교차점으로 하는 관측선 1과 2에서 전기장의 분포는 실수부가 0의 값을 가지기 때문에 허수부만 비교하였다. 그 결과, CN ID-FDTD 기법은 CN FDTD 기법과 달리 정확한 값과 위상은 동일하지만,  $S_{2D}$ 에 따라 크기가 증가하는 형태의 전기장을 계산해냈다. 이 증가비는  $\Delta t$ 와 선형 비례의 관계를 가지는데  $\Delta t$ 에 대한 비는 식 (25)로 표현된다. 식 (25)와 같은 수식이 나오는 자세한 과정은 부록으로 첨부하였다.

$$r(\Delta t) = 1.01 \times \frac{\Delta x \Delta y}{\sin c(\omega \Delta t / 2)}, \quad (25)$$

식 (25)에서  $\sin c(x) = \sin(x)/x$ 이다. 식 (25)로 전기장 값을 보정해 준 결과, 그림 7에서 보듯이 CN ID-FDTD 기법은  $S_{2D}$ 에 상관없이, 큰 시간 증분(explicit FDTD 기법보다 12배 정도 큰 시간 증분)을 가지고 업데이트 식을 계산하여도 정확한 결과값을 도출할 수 있음을 확인할 수 있었다.

#### IV. 결론

본 논문은 2D explicit FDTD 기법에 적용되어 우

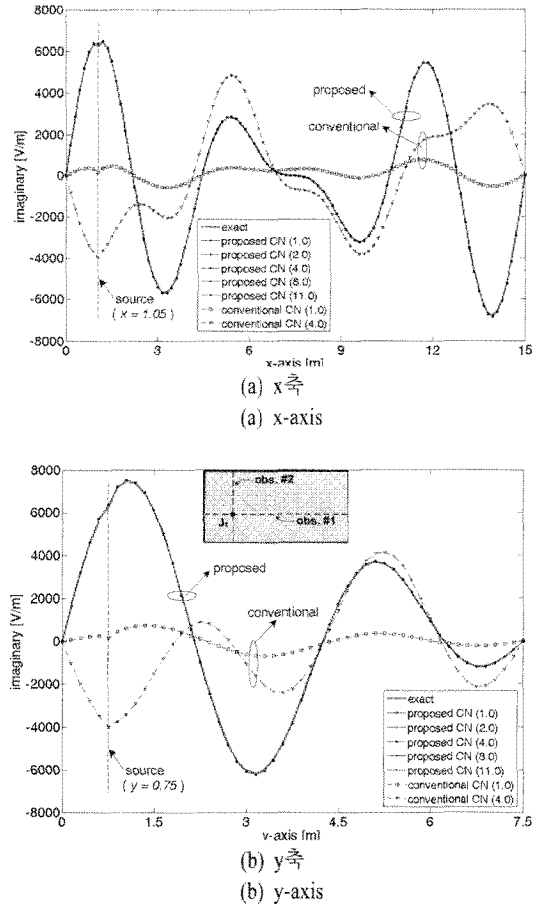


그림 7. 식 (25)로 보정한 2D CN ID-FDTD 기법으로 계산한 전기장의 허수부. 표의 숫자는  $S_{2D}$ 를 나타냄

Fig. 7. Imaginary parts of electric field intensities scaled by the ratio function of (25) after calculation of CN ID-FDTD scheme and the number in legend denotes to the  $S_{2D}$ .

수한 등방성 분산 특성을 보인 2D ID-FD 연산식이 implicit FDTD 기법 중 하나인 CN FDTD 기법에서도 등방성 분산 특성이 구현됨을 보였다. 이는 기존 2D CN FDTD 기법과 제안한 2D CN ID-FDTD 기법의 분산 특성을 비교·분석하여 2D CN ID-FDTD 기법의 경우 비등방성 특성에 의한 분산 오차가 확연하게 줄어드는 것을 확인하였다. 또한 제안한 2D CN ID-FDTD 기법은 시간 증분에 상관없이 등방성의 분산 특성이 유지되었다. 2D CN ID-FDTD 기법을 위한 ID-FD 연산식의 가중치는 비손실 매질의 가중치

를 사용하였고, 셀 크기와 손실항을 보정하는, 두 개의 보정값은 손실 매질에 대한 분산 관계식으로부터 유도하였다. 제안한 기법의 업데이트를 위한 선형 시스템을 구현하기 위해 본 논문에서는 SuperLU 알고리즘을 이용하여 sparse 선형 시스템 문제를 풀었다. 그리고 구현된 알고리즘을 이용해 해석한 결과, 제안한 2D CN ID-FDTD 기법은 시간 증분과 관계없이 (약 CFL 조건의 12배 정도 큰 시간 증분) 직사각형 공간기상의 전기장 분포를 정확하게 해석하는 것을 확인하였다.

부 록

자유 공간상 CN ID-FDTD 기법에서 암페어 법칙에 관한 업데이트 식 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & -\frac{\epsilon}{\Delta t}(E_{z,l,j}^{n+1} - E_{z,l,j}^n) \\ & = -\frac{1}{2}(\partial_y^{ID} H_{x,l,j}^{n+1} + \partial_y^{ID} H_{x,l,j}^n) \\ & \quad + \frac{1}{2}(\partial_x^{ID} H_{y,l,j}^{n+1} + \partial_x^{ID} H_{y,l,j}^n) - J_{z,l,j}^{n+1/2}, \end{aligned} \tag{I.1}$$

여기서 전자기장과 전류원은 공간과 시간에서 샘플링된 값이기 때문에 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \overline{E}_z(t, x, y) \\ & = E_z(t, x, y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \\ & \quad \delta(t - n\Delta t) \delta(x - l\Delta x) \delta(y - j\Delta y), \end{aligned} \tag{I.2}$$

여기서  $E_z$ 와  $\overline{E}_z$ 는 각각 연속값(continuous field)과 샘플링 값이고,  $\delta(x)$ 는 Dirac-delta 함수이다. 식 (I.2)에서 보면 샘플링 값은 Dirac-comb 신호와 연속값의 곱 형태로 이뤄지는데, 이 Dirac-comb 신호의 푸리에 변환은 다음과 같다<sup>[17]</sup>.

$$\begin{aligned} & F_t \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \right\} \\ & = \frac{1}{\Delta t} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{N}{\Delta t}\right), \end{aligned} \tag{I.3}$$

이 때  $F_t\{g(t)\}$ 는  $g(t)$ 에 대한 푸리에 변환을 나타낸다. 이와 같은 관계를 이용해 식 (I.2)를 푸리에 변환하면

$$\begin{aligned} & \widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) \\ & = F_t \{ F_x \{ F_y \{ \overline{E}_z(t, x, y) \} \} \} \\ & = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \times \\ & \quad \left[ \widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) * \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \right. \\ & \quad \left. \delta\left(f - \frac{N}{\Delta t}\right) \delta\left(\frac{\overline{k}_x}{2\pi} - \frac{l}{\Delta x}\right) \delta\left(\frac{\overline{k}_y}{2\pi} - \frac{j}{\Delta y}\right) \right] \end{aligned} \tag{I.4}$$

여기서 \*는 컨벌루션(convolution)을 의미한다. 여기서 시간 증분과 셀 크기가 Nyquist 조건보다 작고 스펙트럼의 영역을  $[-\pi, \pi]$ 로 제한하면 식 (I.4)는 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$\widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta t} \widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y). \tag{I.5}$$

한편, 전류원  $J_z$ 는 전자기장,  $E_z, H_{x,y}$ 와는 달리 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \overline{J}_z\left(t + \frac{\Delta t}{2}, x, y\right) \\ & = J_z\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \\ & \quad \times \delta(x - l\Delta x) \delta(y - j\Delta y), \end{aligned} \tag{I.6}$$

그리고 이에 대한 푸리에 변환 뒤 스펙트럼 영역을  $[-\pi, \pi]$ 로 제한하면

$$\begin{aligned} & \widehat{J}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) \\ & = \frac{1}{\Delta t} e^{j\omega\Delta t/2} e^{j\overline{k}_x l \Delta x + j\overline{k}_y j \Delta y} \widehat{J}_z(\omega). \end{aligned} \tag{I.7}$$

식 (I.5), (I.7)을 이용해 식 (I.1)을 푸리에 변환하면

$$\begin{aligned} & j\omega\epsilon \widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) = \left( \frac{1}{\omega\Delta t} \tan \frac{\omega\Delta t}{2} \right)^{-1} \\ & \quad \times (K_y \widehat{H}_x(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) - K_x \widehat{H}_y(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y)) \\ & \quad - \frac{\Delta x \Delta y}{\sin c(\omega\Delta t/2)} e^{j\overline{k}_x l \Delta x + j\overline{k}_y j \Delta y} \widehat{J}_z(\omega). \end{aligned} \tag{I.8}$$

한편,  $(x', y')$ 에 놓인 전류원을 고려한 맥스웰 방정식의 주파수 영역 암페어 법칙은 식 (I.9)와 같이 표현되는데

$$\begin{aligned} & j\omega\epsilon \widehat{E}_z(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) \\ & = j\overline{k}_y \widehat{H}_x(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) - j\overline{k}_x \widehat{H}_y(\omega, \overline{k}_x, \overline{k}_y) \end{aligned}$$



$$-e^{j\bar{k}_x x' + \bar{k}_y y'} \hat{J}_z(\omega). \quad (I.9)$$

이 식에서 수치 파수  $\bar{k}_x$ 와  $\bar{k}_y$ 는 CN ID-FDTD 기법의 보정값에 의해 정확한 값이 되도록 보정되었으므로 식 (I.8)은 식 (I.9)와 유사한 형태의 암페어 법칙을 갖는다. 하지만 전류원은 식 (I.10)에 의해 증폭되어 인가되는 것을 확인할 수 있다.

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\sin c(\omega \Delta t / 2)}. \quad (I.10)$$

그런데 분산 오차 등으로 인해 이 수식으로 정확하게 보정되지 않고 약 1.01 정도의 상수를 곱한 식 (25)와 같은 함수를 사용해야 정확히 일치함을 확인할 수 있었다. 연속된 시간과 공간상에서 Dirac-delta 함수로 정의된 전류원은 Dirac-delta 함수의 정의에 따라 전류원이 존재하는 공간 영역의 면적과 시간 영역의 크기가 0가 된다. 하지만 시간과 공간 영역이 분산화된 FDTD 기법에서 이러한 전류원의 Dirac-delta 함수는 어느 정도의 면적을 가지는 필라멘트 모델<sup>[18]</sup>로 표현되는데, 본 논문에서는 앞서 유도한 과정을 통해 식 (I.10)과 같은 시간, 공간상의 면적을 계산하였다. 이는 2차원 공간에 관한 수식이고, 1차원과 3차원의 경우 공간상의 샘플링을 가정하고 비슷한 과정을 통해 유도할 수 있다.

### 참 고 문 헌

[1] I. Koh, H. Kim, J. Lee, J. Yook, and C. Pil, "Novel explicit 2-D FDTD scheme with isotropic dispersion and enhanced stability", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 11, pp. 3505-3510, Nov. 2006.

[2] 고일석, 김 현, 육종관, "등방성 분산 특성과 개선된 시간 증분을 가지는 2차원 시간 영역 유한 차분법", *한국전자과학회논문지*, 17(2), pp. 165-170, 2006년 2월.

[3] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 14, no. 3, pp. 302-307, May 1966.

[4] A. Taflove, S. Hagness, *Computational Electrodynamics: the Finite-Difference Time-Domain Method*,

2nd Edition, Norwood, MA: Artech House, 1995.

[5] H. Kim, I. Koh, and J. Yook, "Implicit ID-FDTD algorithm based on crank-nicolson scheme: update equations, dispersion relation, and stability analysis", *Submitted for Publication in IEEE Trans. Antennas and Propagation*.

[6] I. Koh, H. Kim, and J. Yook, "New scaling factors of 2-D Isotropic-Dispersion Finite Difference Time Domain(ID-FDTD) algorithm for lossy media", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 2, pp. 613-617, Feb. 2008.

[7] 고일석, 김 현, 육종관, "손실 매질에 대한 2차원 등방 시간 영역 유한 차분법", *한국전자과학회 논문지*, 18(6), pp. 664-673, 2007년 6월.

[8] W. Kim, I. Koh, and J. Yook, "3D Isotropic Dispersion(ID)-FDTD algorithm: update equation and characteristic analysis", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 58, no. 4, pp. 1251-1259, Apr. 2008.

[9] T. Namiki, "A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 10, pp. 2003-2007, Oct. 1999.

[10] H. Kim, I. Koh, and J. Yook, "2D ADI-FDTD based on isotropic dispersion finite difference scheme", *IEEE Antennas Propagation Society International Symposium*, pp. 3732-3735, Jun. 2007.

[11] G. Sun, C. W. Trueman, "Unconditionally stable crank-nicolson scheme for solving the two-dimensional Maxell's equation", *IEE Electronics Letters*, vol. 39, pp. 595-597, Apr. 2000.

[12] H. Kim, I. Koh, and J. Yook, "2D CN-FDTD based on isotropic dispersion finite difference scheme", *IEEE Antennas Propagation Society International Symposium*, pp. 3728-3731, Jun. 2007.

[13] A. P. Zhao, "Analysis of numerical dispersion of the 2-D alternating-direction implicit FDTD method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, no. 4, pp. 1156-1164, Apr. 2002.

[14] W. Kim, I. Koh, and J. Yook, "3-D isotropic dispersion FDTD algorithm for rectangular grid",

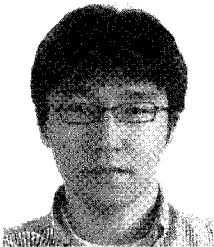
*Accepted for Publication in IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2010.

[15] G. Sun, C. W. Trueman, "Analysis and numerical experiments on the numerical dispersion of two-dimensional ADI-FDTD", *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 2, pp. 78-81, 2003.  
 [16] J. W. Demmel, S. C. Eisenstat, J. R. Gilbert, X. S. Li, and J. W. H. Liu, "A supernodal approach to sparse partial pivoting", *SIAM J. Matrix Ana-*

*lysis and Applications*, vol. 20, no. 3, pp. 720-755, 1999.

[17] J. G. Proakis, D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 3rd Edition, Prentice hall, NJ, 1996.  
 [18] G. Waldschmidt, A. Taflove, "The determination of the effective radius of a filamentary source in the FDTD mesh", *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 10, no. 6, pp. 217-219, Jun. 2000.

김 현



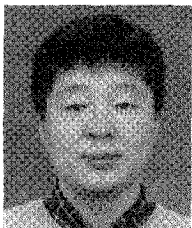
2002년 8월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학사)  
 2005년 2월: 연세대학교 전기전자공학과 (공학석사)  
 2005년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 박사과정  
 [주 관심분야] FDTD 등 마이크로파 수치 해석, EMI/EMC

육 종 관



1987년: 연세대학교 전자공학과 (공학사)  
 1989년: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1998년: University of Michigan 전기전자공학과 (공학박사)  
 1997년 1월~1998년 10월: University of Michigan Research Fellow  
 1998년 11월~1999년 2월: Qualcomm Inc. Senior Engineer  
 1999년 3월~2000년 2월: 광주과학기술원 조교수  
 2000년 3월~현재: 연세대학교 전기전자공학과 교수  
 [주 관심분야] 마이크로파 구조 해석 및 설계, RF MEMS, 박막공진 구조

고 일 석



1992년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학사)  
 1994년 2월: 연세대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1994년 1월~1996년 4월: LG 전자 연구원  
 2002년 8월: The University of Michigan at Ann Arbor 전기 및 전산과 (공학박사)  
 2004년 5월~2004년 2월: Research Fellow at University of Michigan at Ann Arbor  
 2004년 3월~2010년 3월: 인하대학교 정보통신대학원 교수  
 2010년 4월~현재: 인하대학교 전자공학 교수  
 [주 관심분야] Theoretical Electromagnetic, Numerical Analysis, Scattering