韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 2호, 2010. 5. 345-363

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 2, May. 2010. 345-363

초등학생의 비례에 관한 비형식적 지식 분석

박 상 은 (율곡초등학교)
이 대 현 (광주교육대학교)
임 해 경 (광주교육대학교)

본 연구는 비례 개념을 배우지 않은 초등학생들이 가지고 있는 비형식적 지식을 조사·분석하여, 비례 개념 지도에 대한 시사점을 얻는데 목적이 있다. 이 연구를 위해 정비례, 반비례에 관한 선행학습을 하지 않은 6학년 학생 117명을 연구대상으로 본 연구에서 개발한 정비례 7문항, 반비례 4문항을 이용하여 조사 연구를 시행하였다. 또 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 보인 비례에 관한 비형식적 지식을 심층적으로 알아보기 위하여 문제해결 전략별로 9명의 학생들을 선정한 후 면담을 시행하였다.
연구 결과, 학교에서 정비례, 반비례 개념을 배우지 않은 6학년 학생들은 정비례 문제와 반비례 문제를 해결할 때 곱셈추론전략, 비례추론 전략, 한 단위 전략 등을 사용하여 해결하였다. 학생들이 비례에 관한 비형식적 지식을 적극 활용한다는 사실은 이를 형식화하여 의미 있는 비례 개념 지도가 가능하다는 것을 시사한다.

Ⅰ. 서 론

21세기 지식 기반 정보화 사회에 적합한 인재는 숙련된 기능인보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간이라고 할 수 있다. 이런 시대 흐름을 반영하여 2007 개정교육과정은 학교 교육을 공급자 중심에서 수요자인 학생 중심으로 관점을 전환시켰으며, 제7차 교육과정에 이어 수학적 힘의 신장을 강조하였다(교육인적자원부, 2007).

수학교육에서 수학적 힘의 신장을 위하여, 수학 교실은 중요한 수학적 아이디어를 사용하여 재미있는 문제를 일상적으로 탐구하는 장소가 되어야 하고, 무엇을 배우는가보다 어떻게 배우느냐에 관심을 가져야 한다(NCTM, 1989). 이를 위해 학생들은 다양한 방법으로 문제를 해결해 보고, 탐구하고, 추측하고, 논리적으로 추론해 보며, 수학 지식들을 단편적으로 학습하기보다는 관련 지식들을 연결하여 학습함으로써 의미 있는 학습을 할 필요가 있다. 특히 의미 있는 학습을 위한 방안의 하나로 학생들이 일상적인 경험이나 직관적인 인식을 바탕으로 가지고 있는 비형식적 지식과 학교 교육을 통해 배우는 형식적 지식을 연결시켜주는 것은 중요하다.

---

* 접수일(2010년 3월 18일), 심사(수정)일(2010년 3월 29일), 게재확정일자(2010년 4월 9일)
* ZDM 분류 : C33
* MSC 2000분류 : 97C30
* 주제어 : 비형식적 지식, 비례 문제

일반적으로 비형식적 지식이란 학교 수학, 즉 체계적으로 구조화되어 있고 논리적이며 형식적인 수학에 반하는 개념으로, 학교 밖에서 학생 스스로에 의해 창안되고 구성된 지식이나 일상생활에 적응하는 과정에서 자연스럽게 전수된 지식을 의미한다. 또한 학생이 직접적인 지도 없이 학교에서 개발한 개념들과 학교에서 획득한 사전 지식도 비형식적 지식에 포함된다.

NCTM(1989)은 모든 학생들은 수학 교실에 오기 전에 그를 바탕으로 구성이 가능한 상당한 정도의 지식을 가지고 있으며, 학생들은 학교에 들어오기 이전에 적어도 그들이 사물을 직관적으로 보기 시작할 때 이미 많은 수학적 개념을 발전시킨다고 하였다. 즉, 학생들은 경험을 통해서 비형식적 지식을 구성하고 있다. 또한, NCTM(2000)에서도 학생들에게 그들의 비형식적 전략을 말하게 함으로써 교사는 그들이 함축적인 비형식적인 지식을 깨닫고 구성하도록 도와줄 필요가 있으며, 학생들의 비형식적 지식의 중요성을 말하고 있다. 그렇지만 우리나라 학생들이 수학 문제를 해결하는 데에 일상생활을 응용하는 정보가 낮은 것으로 나타난 결과를 분석한 연구보고서(한국교육과정평가원, 2004)에 따르면, 우리나라 학생들이 우위를 보인 문항은 상황을 동반하지 않은 순수 수학적 문항이거나 전형적인 상황의 문항이었다. 이는 학생들이 수학적인 개념을 형식적으로만 이해하고 있으며, 학생들이 구성한 비형식적 지식과 연결되지 않고 있음을 보여준다.

특히, 학생들은 학교 수학을 배우기 전에라도 실제적 상황 속의 수많은 경험을 통하여 비형식적 지식을 가지고 있으며, 이를 활용하고 있다. 예를 들어 비례를 학습하지 않은 학생들과 비례를 학습한 학생을 대상으로 비례 문제 해결 과정에 관한 오 개념을 분석한 연구에 따르면, 학생들은 경험적이고 직관적인 방법으로 비례 문제를 해결하였고, 비례를 학습한 6학년 학생들 역시 비례 문제 해결 과정에서 비례 전략 보다는 곱셈 전략과 한 단위 전략에 의존하고 있어 비형식적 지식을 사용하고 있었다(이영숙, 1998).

2007년 개정 수학과 교육과정에 따르면, 제7차 교육과정에서는 6학년에서 지도되었던 비와 비례에 대한 내용이 5학년으로 이동되었다. 그리고 중학교와의 연계성과 적정성 문제에 대한 대안으로 제7차 교육과정에 따라 중학교 1학년에서 지도되었던 정비례와 반비례에 대한 내용이 6학년으로 이동되어 지도하게 됨으로써 초등학교 수학에서 비와 비례에 대한 비중과 중요성이 더 확대되었다(교육인적자원부, 2007).

비례는 대수 학습에 있어서 가장 추상적인 관계를 지닌 수적인 표현으로 바꿀 수 있는 교량 역할을 할 뿐만 아니라, 함수의 토대가 되는 개념이다(이영숙, 1998). 이러한 비례는 학교 수학에서 중요한 위치에 있으나, 여전히 학교 현장에서는 형식적인 절차에 중심을 둔 알고리즘 지도에 치중하고 있어 학생들에게도 많은 어려움을 야기하는 부분이기도 하다. 이에 본 연구에서는 정비례, 반비례에 관해 초등학교 6학년 학생이 가진 비형식적 지식을 조사・분석하여 교수학적 시사점을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 비례의 지도

비례란 규칙적으로 변화하는 두 양사이의 관계를 말하며, 이는 특수한 유형의 관계 즉, 승법적 관계이다. 비례는 단위 가격, 속도, 가속도, 밀도, 농도, 힘, 효율, 환율 등 실생활에 많이 응용된다. 대개 두 비가 같을 때의 관계로 정의되는 비례 문제를 해결할 경우, 가장 일반화된 전략으로 교과서에서는 '비례식'을 이용한 한 가지 전략만으로 제시하고 있다. 그러나 비례관계와 연결되어지는 선형성의 인식은 학교 수학을 구성하는 핵심적 역할을 하며, 이로써 함수의 다양한 표현법을 이해하게 된다. 비례관계의 이해는 대수 학습에서도 매우 중요한 역할을 하며, 비례 중에서도 정비례 $y=ax$는 일차함수로 연결되어 함수의 바탕이 된다(최효진, 2005).

2007년 개정 수학과 교육과정에 의하면, 제7차 교육과정에서 6학년에서 지도되었던 비와 비례에 대한 내용이 5학년으로 이동되며, 중학교 교육내용과의 연계성과 적정성 문제에 대한 대안으로 중학교 1학년에서 지도되었던 정비례와 반비례에 대한 내용이 6학년으로 이동되었다(교육인적자원부, 2007). 이것은 초등학교 5학년 과학 교과서에서 이미 정비례 관계를 다루고 있어서 수학이 타 학문 학습의 기초 역할을 제대로 못했기 때문이며, 중학교 1학년 함수의 도입을 정비례와 반비례를 이용하지 않고 대응의 의미를 직관적인 수준에서 다루어 훨씬 간결하게 설명할 수 있게 하기 위함이다(정유진, 2009).

Freudenthal(1983)은 개념으로서 비나 지적 대상으로서의 비는 꽤 높은 발달 수준을 요구하지만, 비에 대한 느낌을 가지는 것이나 비에 대한 시각을 갖게 되는 것은 발달 초기에 이뤄진다고 말하고 있다. 그에 비해 Karplus(1981)는 비 개념의 전조로서 덧셈적 추론이 나타난다고 주장했다. 학생들이 비례 문제를 덧셈적으로 해결하려고 한다는 것은 여러 연구에서 확인되고 있다. Lesh 등(1988)도 덧셈적 추론을 전비례적(pre-proportional) 추론이라고 하면서 덧셈적 추론이 비례적 추론 발달의 초기 단계에 '자연스럽게' 나타나는 것 같다고 주장한다(정은실, 2003b에서 재인용). 이와 같이 학생들은 일상적인 경험을 통해, 또는 발달 과정의 산물로 비와 비례의 개념을 형식 교육을 받기 전이라도 어느 정도 인식하고 사용하고 있음을 알 수 있다.

2. 비형식적 지식

학생들은 수학적 지식을 학습하기 이전에 일상생활의 다양한 경험을 바탕으로 기초적인 수학적 지식을 형성하게 된다. 이를 바탕으로 일상생활에서 부딪치는 문제를 나름대로의 방법으로 해결해 나간다. 이는 형식적인 지식을 학습하지 않아도 경험을 통하여 스스로 다양한 알고리즘을 개발하거나 발명할 수 있음을 보여준다. 이렇게 학교에서 형식적으로 배우기 전에 이미 학교 밖에서 나름대

로 형성된 지식을 비형식적 지식이라 한다. NCTM(2000)에서는 비형식 지식과 관련하여 다음과 같이 제시하고 있다.

> 어린이들은 어릴 적부터 수학적 아이디어에 흥미를 가지고 있다. 일상생활의 경험을 통해서 그들은 수, 패턴, 모양, 양, 자료, 크기에 관하여 상당히 복잡한 일련의 비형식적 개념을 점차 발달시키는데, 이 개념 가운데 많은 것이 옳고 견고하다. 이와 같이 학생은 학교에 들어가기 훨씬 전에 많은 수학적 개념들을 아주 자연스럽게 배운다. … 교사는 학생에게 비형식적 전략을 말하게 함으로써, 분명하게 인식하지 못했던 비형식적 지식을 깨닫도록 하고 그것을 구성하도록 도울 수 있다(p. 21).

Baroody(1987)는 학교에서 공식적으로 가르치는 문자화된 기호와 상징체계로서의 형식적 수학과 구별하여 아동이 일상생활의 수학적 문제 사태를 경험하고 이를 비형식적으로 해결해 나가는 과정에서 얻은 직관적인 수학적 지식을 비형식적 수학이라고 하였다. 그런데 Becker & Selter(1996)는 학생들이 학교 밖에서 획득한 능력과 지식과 더불어 직접적인 '가르침'없이 학교에서 발명한 개념들도 비형식적 지식에 포함시켰다.

비형식적 지식과 관련된 연구는 자연수와 분수와 같은 수의 개념 및 연산에 주로 집중되어 왔다(박현미, 2006; 백선수, 2004; 오유경, 2009; 이선미, 2009; 최혜진, 2008; 홍은숙, 2007)). 이와 같이, 수와 연산 영역에서는 비형식적 지식과 관련된 연구가 많이 되어 왔다. 하지만 다른 영역에서의 비형식적 지식과 관련된 연구는 부족한 편이다. 특히, 개정된 제7차 수학과 교육과정을 보면, 교육 내용의 적정화에 따라 정비례, 반비례 내용이 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 이동되었다. 그러하기에 학생들이 비례에 관해 어떠한 비형식적 지식을 구성하고 있으며, 이를 토대로 어떻게 지도해야 하는지에 대한 연구가 필요하다고 볼 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상과 방법 및 절차

본 연구를 위하여 광주광역시에 소재한 Y초등학교에서 정비례와 반비례 개념을 배우지 않은 6학년 117명을 조사연구의 대상으로 선정하였다. 이 학생들을 대상으로 비례에 관한 검사 도구를 제공하여 어떤 방법으로 문제를 해결하는지 알아보았다. 그리고 학생들의 비형식적 지식에 대한 심층적인 분석을 위해 조사연구 대상자 중 9명의 학생을 선정하여 개별 면담을 실시하였다. 개별 면담을 위한 학생 선발은 조사연구 결과에 나타난 문제해결 전략을 분류한 후, 비슷한 문제 유형에 다른 전략을 사용한 경우나 특이한 전략을 사용한 학생들을 대상으로 면담에 응할 의사가 있는 학생들을 대상으로 하였다.

개별 면담 방법은 학생들이 문제지에 응답한 내용을 연구자와 함께 확인하면서, 학생들에게 자신의 생각을 설명해 보게 하거나 예를 제시하여 설명하도록 하였다. 개별 면담에서는 각 문항에 응답

할 때 어떤 생각을 하였는지를 확인하는 데에 초점을 두었다.

본 연구를 위해 먼저 제6차 6학년 1학기 수학 교과서와 제7차 7-가 단계 수학 교과서를 비롯하여 기존의 연구 문헌을 토대로 하여 문항을 개발하였다. 그리고 문항의 적절성을 확인하기 위하여 먼저 본 연구 대상이 있는 학교와 비슷한 수준의 초등학교 6학년 1개 학급을 대상으로 예비 검사를 실시한 결과와 전문가의 지도 조언을 받고 문항을 수정하였다. 최종적으로 정비례에 관한 7개의 문항, 반비례에 관한 4개의 문항을 재구성하였다.

2. 자료 수집 및 분석

연구 대상 학생들에게 개별적으로 문제를 제시하고 학생들이 검사지에 반응하도록 하여, 그 결과를 반응 유형별로 분석하였다. 또한 문제해결 전략을 분류하여 면담 대상 학생들을 선정하고 면담을 실시하였으며, 면담과정을 비디오로 녹화하여 전사한 후, 이를 바탕으로 프로토콜을 분석하였다. 각 프로토콜 자료의 분석은 3회에 걸쳐 보면서 전문가의 조언을 받아 학생들의 비형식적 지식을 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 정비례에서 나타나는 비형식적 지식

정비례 관계에 대한 비형식적 지식을 분석하기 위하여 문제 유형을 4가지로 나누어 조사하고 분석하였다.

가. 1-1번, 1-2번, 11번 분석 결과

> 1-1. 은비는 3개에 5천원인 귤을 샀습니다. 귤을 12개 사려면 얼마의 돈이 있어야 합니까?
> 1-2. 은비는 3개에 6천원인 귤을 샀습니다. 귤을 5개 사려면 얼마의 돈이 있어야 합니까?
> 11. 수진이는 평소에 2시간 동안 백과사전 20쪽씩 읽는 빠르기로 독서를 한다고 합니다. 같은 책 읽는 빠르기로 10시간 동안 책을 읽었다면, 수진이가 읽은 백과사전은 총 몇 쪽일까?

위의 세 문항은 같은 형식의 문항에 수치만 변화시켜 변화 인수는 정수이지만 단위 비율은 정수가 아닌 경우(1-1번), 변화 인수는 정수가 아니지만 단위 비율은 정수인 경우(1-2번), 변화 인수 및 단위 비율 모두 정수인 경우(11번)에 학생들이 어떠한 비형식적 지식으로 문제를 해결하는지 알아보기 위한 것이다. 문항에 따라 학생들이 반응하는 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 문항 정답 빈도수(1-1번 문항, 1-2번 문항, 11번 문항)

빈도수 \ 문항	정 비 례		
	1-1번	1-2번	11번
정답자(정답율)	109 (93.2)	110 (94.0)	107 (91.5)
오답자(오답율)	8 (6.8)	7 (6.0)	10 (8.5)

1-2번 문항이 94.0%로 가장 높은 정답 빈도수를 보였으며, 그 다음으로는 1-1번 문항이 93.2%, 11번 문항이 91.5%의 정답 빈도수를 보였다. 다른 정비례 문항에 비해 세 문항 모두 높은 정답율을 보였으며, 오답 역시 계산상 나타난 실수였다. 하지만 문항의 유형별로 학생들이 반응한 해결 전략에는 차이가 있었다. 반응한 학생들의 전략은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

1-1번 문항은 정수배를 쉽게 구할 수 있어 학생들은 비형식적으로 변화 인수를 구하였다. 이 문항에 59.6%의 학생들은 곱셈 추론 전략으로 문제를 해결하였다. 즉 3개에서 12개를 사기 위해서는 4배를 해야 한다. 따라서 5천원에서도 4배를 하면 20000원이 된다. 그 다음으로는 비례식으로 해결하는 학생들이 22.0%로 많았다. 그 외에는 Building-up 곱셈구성전략(13.8%)과 Building-up 덧셈 구성전략(4.6%)을 사용하는 학생들도 있었다.

1-2번 문항은 정수배를 쉽게 구할 수 있는 단위 비율을 구하여 한 단위 전략으로 해결하는 학생들이 70.0%로 가장 높았다. 그 다음으로는 21.8%의 학생들이 6-가 단계에서 학습되었던 비례식으로 해결하였다.

<표 Ⅳ-2> 반응한 학생들의 전략(1-1번 문항, 1-2번 문항, 11번 문항)

문항 \ 전략		비례 추론 전략	곱셈 추론 전략	한 단위 전략	Building-up 전략		기타 전략	풀이과정 없음
					덧셈 구성	곱셈 구성		
정비례	1-1번 (N=109)	24 (22.0)	**65 (59.6)**	0	5 (4.6)	15 (13.8)	0	0
	1-2번 (N=110)	24 (21.8)	0	**77 (70.0)**	0	0	7 (6.4)	2 (1.8)
	11번 (N=107)	23 (21.5)	**47 (43.9)**	19 (17.8)	10 (9.3)	0	0	8 (7.5)

11번 문항에서 가장 많은 전략을 보인 것은 곱셈 추론 전략(43.9%)이었다. 그 다음으로는 비례식으로 세워서 비례 추론 전략으로 해결하는 학생들이 21.5%로 많았다. 이와 같이, 문항의 유형은 비슷하지만 주어지는 수에 따라서 학생들이 반응하는 전략이 다름을 알 수 있다.

한편 정비례를 학습하게 될 학생들은 비례식까지 학습하고 난 후이기 때문에 비례식을 세워 문제를 해결하는 전략 역시 생각해 볼 필요가 있다. 비례식을 학습하지 않은 4학년 학생들을 대상으로 비와 비례에 대한 문제해결 과정에서 나타나는 비형식적 지식을 분석한 연구에 따르면(박수희,

2009), 본 연구와 다른 결과가 나왔다. 4학년 학생들은 아직 비례식을 배우기 전 단계이므로 주로 Building-up 구성 전략을 많이 사용하고(40.9%), 비례식으로 해결하는 학생들은 없었다. 하지만 본 연구에서 비례식을 학습한 6학년 학생들은 1-1번 문항은 22.0%, 1-2번 문항은 21.8%, 11번 문항은 21.5%로 각 문항 모두 비례식을 두 번째로 많이 사용하고 있음을 알 수 있었다.

나. 3번, 5번 분석 결과

> 3. 5분에 4㎥씩 물이 나오는 수도가 있습니다. 이 수도로 8분 동안 물을 받으면, 물의 양은 몇 ㎥이 됩니까?
> 5. 4분에 6km를 달리는 기차가 있습니다. 같은 빠르기로 10분 동안 달리면 몇 km를 갈 수 있습니까?

위의 두 문항은 변화 인수 및 단위 비율 모두 정수가 아닌 경우에 학생들이 어떠한 비형식적 지식으로 문제를 해결하는지 알아보기 위한 것이다. 문항에 따라 학생들이 반응하는 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 문항 정답 빈도수(3번, 5번 문항)

빈도수 \ 문항	정 비 례	
	3번	5번
정답자(정답율)	70 (59.8)	87 (74.4)
오답자(오답율)	47 (40.2)	30 (25.6)

3번 문항은 59.8%의 정답율을 보였고, 5번 문항은 74.4%의 정답율을 보였다. 두 문항 모두 변화 인수 및 단위 비율이 정수가 아니며, 모두 90%이상의 정답율을 보인 1-1번과 1-2번 문항보다는 정답율이 낮았다. 3번, 5번 문항에 반응한 학생들의 전략은 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 반응한 학생들의 전략(3번, 5번 문항)

문항 \ 전략		비례 추론 전략	곱셈 추론 전략	한 단위 전략	Building-up 전략		기타 전략	풀이과정 없음
					덧셈 구성	곱셈 구성		
정비례	3번 (N=70)	31 (44.3)	2 (2.8)	32 (45.7)	4 (5.7)	0	0	1 (1.4)
	5번 (N=87)	35 (40.2)	5 (5.7)	33 (37.9)	2 (2.3)	0	12 (13.8)	0

3번 문항에서 45.7%의 학생들이 한 단위 전략을 사용하고 있었다. 그 다음으로는 44.3%의 학생들이 비례식을 사용하여 비례 추론 전략으로 해결하였다. 5번 문항은 비례 추론 전략을 사용하여 해결하는 학생들이 40.2%로 많았다. 그 다음으로 보인 전략은 한 단위 전략으로 37.9%의 학생들이 해결하

였다. 1-1번, 1-2번, 11번 문항과 마찬가지로 변화 인수 및 단위 비율이 정수가 아닐 경우 역시, 비례식으로 문제를 해결하고자 하는 학생이 많음을 알 수 있다. 5번 문항에서 가장 많이 해결한 전략은 비례 추론 전략(40.2%)으로 안숙현(2008)의 연구에서의 6학년 학생들의 반응과 같은 결과가 나왔다.

다. 7번 분석 결과

7. 길이가 2m인 막대를 똑바로 세웠더니 2.8m의 그림자가 생겼습니다. 높이가 7m인 나무의 그림자의 길이는 몇 m입니까?

위의 문항은 학생들이 소수가 포함된 정비례 문제를 해결하는 데에 사용되는 전략을 알아보기 위한 것이다. 이에 따라 반응한 학생들의 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-5>와 같다. 7번 문항은 63.2%의 정답율을 보였다.

<표 Ⅳ-5> 문항 정답 빈도수(7번 문항)

문항 / 빈도수	정 비 례
	7번
정답자(정답율)	74 (63.2)
오답자(오답율)	43 (36.8)

7번 문항에 반응한 학생들의 전략은 <표 Ⅳ-6>과 같다.

<표 Ⅳ-6> 반응한 학생들의 전략(7번 문항)

전략 / 문항		비례 추론 전략	곱셈 추론 전략	한 단위 전략	Building-up 전략		기타 전략	풀이과정 없음
					덧셈 구성	곱셈 구성		
정비례	7번 (N=74)	31 (41.9)	1 (1.4)	34 (45.9)	2 (2.7)	6 (8.1)	0	0

문항의 유형별로 학생들이 반응한 해결 전략은 주로 비례 추론 전략과 한 단위 전략으로, 45.9%의 학생들은 한 단위 전략을 사용하였다. 그 다음으로 이와 비슷한 41.9%의 학생들이 비례 추론 전략을 사용하였다. 또한, 5번 문항에서 축약된 Building-up 구성전략(13.8%)을 사용한 것과 같이, 7번 문항에서도 축약된 Building-up 구성전략(8.1%)이 사용되었다. 5번 문항과 7번 문항 모두 축약된 Building-up 구성전략을 사용한 학생들이 소수 있었다. 이러한 학생과 면담한 결과는 다음과 같다.

정31-T06 왜 3번 문제는 7번, 11번 문제와 다르게 풀었어?
정31-S06 (한참을 고민하더니) 7번 문제는 10분 동안 4분이 두 번 있잖아요. 그리고 11번 문제도 7m 속에 2m가 세 번 있잖아요. 그런데 3번에서 5분은 8분 동안에 1번뿐이라서 좀 달라요.

3번, 5번, 11번 문항은 변화 인수 및 단위 비율이 정수가 아니라는 공통점이 있어 학생들은 주로 비례 추론 전략과 한 단위 전략으로 문제를 해결하였다. 하지만 이 학생의 경우에는 5번과 7번 문항은 축약된 Building-up 구성전략을 사용하였지만, 3번은 한 단위 전략을 주로 사용하고 있었다. 이는 문항에 제시된 수들과 관련이 있었다. 따라서 학생들은 문제를 해결할 때 문제에 주어진 수들끼리의 관계에 영향을 미친다고 할 수 있다.

라. 9번 분석 결과

9. 다음은 물통에 물을 받는 시간과 물의 깊이와의 관계를 조사한 표이다.
물을 받는 시간이 6분일 때, 물의 깊이는 몇 cm가 되겠습니까?

시간(분)	1	2	3	…	6	…
깊이(cm)	3	6	9	…		…

위의 문항은 표를 보면서 두 양의 변화 관계를 알 수 있는지를 묻는 문항이다. 이에 따라 학생들이 반응하는 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-7> 문항 정답 빈도수(9번 문항)

빈도수 \ 문항	정 비 례
	9번
정답자(정답율)	103 (88.0)
오답자(오답율)	14 (12.0)

9번 문항은 정답율이 88.0%로 3번(59.8%), 5번(74.4%), 7번(63.2%) 문항에 비해 정답율이 높았다. 3번, 5번, 7번 문항들은 실생활 상황을 문장제로 나타내어 해결하도록 하고 있으며, 9번 문항은 표로 제시하여 학생들이 두 변인의 변화 관계를 쉽게 파악할 수 있다. 이에 반응한 학생들의 전략은 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8> 반응한 학생들의 전략(9번 문항)

문항 \ 전략		비례 추론 전략	곱셈 추론 전략	한 단위 전략	Building-up 전략		기타 전략	풀이과정 없음
					덧셈 구성	곱셈 구성		
정비례	9번 (N=103)	4 (3.9)	28 (27.2)	0	37 (35.9)	16 (15.5)	17 (16.5)	1 (1.0)

9번 문항은 다른 문항에서는 많이 사용하지 않았던 Building-up 덧셈 구성전략을 35.9%의 학생들이 사용하고 있었다. 그 다음으로 27.2%의 학생들이 곱셈 추론 전략을 사용하고 있었다. 또한, 16.5%의 학생들이 규칙성을 찾아 식으로 나타내어 해결하기도 하였다. 이는 6학년 수학과 교과서에서 주어진 표를 보고 □, △를 사용하여 규칙을 찾아 식으로 나타내어 보는 것을 해 보았기 때문에 학생

들은 △=□×3이라고 식을 세워서 해결할 수 있었다. 다음은 3번 문항은 해결하지 못했으나 9번 문항을 해결한 학생을 면담한 결과이다.

정42-T01 그럼 다시 풀어 볼까?
정42-S02 (9번의 표를 다시 보더니 표를 그리기 시작) 1분을 먼저 구해도 돼요?
정42-T03 필요하다면 그렇게 하렴.
정42-S03 (한참을 생각하더니) 답이 6.4 아니에요?
정42-T04 어떻게 구했는지 설명해 줄래?
정42-S04 먼저 표를 이렇게 그리고요, 5분일 때는 4㎥이니깐 표에 적어요. 또 1분은 4 ÷ 5 = 0.8이니깐 1분 아래에 0.8이라고 적어요. 이제 0.8씩 더해주면 8분일 대에는 6.4㎥가 나와요. 아! 더 쉽게 하려면 0.8에 8을 바로 곱하면 6.4이에요.

이 학생은 처음에는 3번 문항을 해결하지 못했으나 다시 문제를 제시하였을 때 표를 그려서 해결하고자 하였다. 표 안에서도 기준을 찾기 위해 1분을 구했고, 규칙을 찾아 8분 일 때의 값을 구하였다. 따라서 정비례 문제를 제시할 때에도 표를 주고 규칙성을 찾게 한 후 문제를 해결할 수 있도록 하고, 이를 다양한 실생활 문제로 바꿔보게 하는 활동을 함께 한다면 학생들이 문제를 이해하는 데에 도움을 줄 것이다.

2. 정비례 개념에 대한 비형식적 지식의 시사점

조사연구와 심층 면담의 분석 결과, 정비례 개념에 대한 학생들의 비형식적 지식으로 부터 정비례 개념 지도에 대한 몇 가지 시사점을 얻을 수 있었다. 먼저, 학교 교육을 통해 정비례 개념을 학습하지 않은 학생들은 비형식적인 방법을 이용하여 정비례 문제를 해결할 수 있었다. 특히 문항에 포함된 수들의 관계가 비형식으로 문제를 해결하는 방법에 영향을 주었다. 학생들은 정비례 문항 속에 제시된 수들의 관계를 생각하여 변화 인수의 값을 찾거나 단위 비율을 구하여 비형식적으로 문제를 해결하였다.

1-1번 문항은 변화 인수가 정수이고 단위 비율은 정수가 아닌 것으로 59.6%의 학생들은 곱셈 추론 전략을 사용하였다. 1-2번 문항은 변화 인수가 정수가 아니고 단위 비율이 정수인 것으로 70%의 학생들이 한 단위 전략을 사용하였다. 또한, 변화 인수 및 단위 비율 모두 정수인 11번 문항에서는 곱셈 추론 전략(43.9%), 비례 추론 전략(21.5%), 한 단위 전략(17.8%) 등 다양한 전략이 나왔다. 반대로 변화 인수 및 단위 비율 모두 정수가 아닌 3번, 5번 문항에서도 한 단위 전략 및 비례 추론 전략, Building-up 구성 전략 등 다양한 전략이 나왔다.

따라서 학생들이 정비례 개념에 대하여 가지고 있는 비형식적 지식을 바탕으로 하여 형식적인 학교 교육으로 형식화시키기 위해서는 정비례 문제 상황에 제시된 수들의 관계를 생각하여 학생들이 비형식적인 전략을 많이 사용하는 변화 인수 및 단위 비율 모두 정수인 경우를 먼저 제시할 필요가 있다. 이를 통해 학생들이 비형식적으로 문제를 해결하고 이를 형식화하는 방안으로 두 변량 사이의

관계를 구하도록 이끌 필요가 있다.

둘째, 정비례 문제를 해결할 때 많은 학생들이 비례식을 세워 문제를 해결하려고 하였다. 이는 정비례, 반비례 개념을 학습하기 이전에 비례식을 학습하기 때문에 학생들의 비형식적 지식에 이전 단계에서 학습한 비례식으로 문제를 해결하려는 것이 포함되어 있다고 볼 수 있다. 또한, 비례식으로 문제를 해결하지 않았으나, 면담을 하는 중 비례식으로 해결한 학생들은 비례식으로 문제를 해결하는 경우가 더 쉽다고 이야기를 하였다. 따라서 정비례 개념의 지도에서 형식적인 알고리즘을 구성하는데 치중하기 보다는 학생들이 두 변량 사이의 관계에서 x값과 y값 관계에 따라 비례식을 세워 문제를 해결하면서 형식적인 정비례 관계식으로 유도하는 자연스런 결합이 이루어지도록 할 필요가 있다.

셋째, 학생들은 자신과 친숙한 용어 및 상황 속에서 문제를 잘 해결할 수 있었다. 3번 문항과 5번 문항은 모두 시간의 흐름에 따른 변화되는 양을 묻고자 하는 문제이다. 하지만 59.8%의 학생들이 해결했던 3번 문항에 비하여 5번 문항은 74.4%의 학생들이 문제를 해결할 수 있었다. 이는 5번 문항 속에서 '같은 빠르기로' 라는 용어가 학생들에게 문제를 해결하는 데에 도움을 준 것이다. 또한, '물이 나오는 수도'와 관련된 내용보다는 '속력'과 관련된 내용이 다른 과목 및 학습 내용에서 더 많이 접해 보았기 때문에 학생들에게 친숙한 문제이다. 따라서 학생들의 비형식적 지식을 형식화하기 위해서는 학생들에게 생활 속에서 많이 접해 본 상황을 먼저 제시하여 개념적 이해를 바탕으로 정비례 문제를 해결할 있도록 이끌 필요가 있다.

넷째, 표는 정비례를 이해하는데 유용한 도구였다. 9번 문항은 표에서 제시된 x값과 y값 사이의 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있었다. 이 문항은 문장제로 제시된 다른 문항들에 비해 88%의 높은 정답율을 보이고 있었다. 학생들은 문장제로 된 문제보다는 표로 제시되어 있는 문제를 더 쉽다고 생각하고 있었다. 학생들이 표를 활용하여 문제를 해결하는 데에 익숙하기 때문에 정비례의 개념을 이와 연결시킬 수 있을 것이다. 따라서 학생들이 x값과 y값의 관계를 비형식적인 지식을 활용하여 찾기 위해서 먼저 표를 제시할 필요가 있다. 이를 통해 학생들은 비형식적으로 문제를 해결하고 이를 형식화하는 방안으로 변수 사이의 관계를 알도록 이끌 필요가 있다.

3. 반비례에서 나타나는 비형식적 지식

반비례 관계에 대한 비형식적 지식을 분석하기 위하여 문제 유형을 4가지로 나누어 조사하고 분석하였다.

가. 2번 분석 결과

2. 영자의 외갓집은 1시간에 4km의 속력으로 간다면 6시간이 걸리는 거리만큼 떨어져 있습니다. 만일 1시간에 12km의 속력으로 간다면 영자의 외갓집까지 가는 데 걸리는 시간은 얼마일까요?

2번 문항은 속력과 시간에 관한 문제로 학생들의 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-9>와 같다.

<표 Ⅳ-9> 문항 정답 빈도수(2번 문항)

문항 / 빈도수	반 비 례
	2번
정답자(정답율)	**79 (67.5)**
오답자(오답율)	38 (32.5)

67.5%의 학생들이 정답을 하였으며, 다른 반비례에 관한 문제에 비해 정답 빈도수가 높은 편이었다. 또한, 이 문항의 경우에 <표 Ⅳ-10>과 같이 다양한 해결 전략으로 문제를 해결하였다. 이 문항에 대해 38명의 학생들은 곱셈 추론 전략을 사용하였고, 9명은 비례식을 세워 문제를 해결하는 비례 추론 전략을 사용하였으며, 4명의 학생들은 Building-up 덧셈 구성전략을 사용하였다. 또한, 79명 중에 17명의 학생들은 속력이 4km/h에서 12km/h로 세 배만큼 빨라지기 때문에 걸리는 시간은 세 배만큼 줄어들 것이라는 질적 추론을 통해 문제를 해결하였다.

<표 Ⅳ-10> 반응한 학생들의 전략(2번 문항)

전략 / 문항		비례 상수(거리) 구하기			질적 추론	잘못된 과정	풀이과정 없음
		곱셈 추론	Building-up 덧셈 구성	비례 추론			
반비례	2번 (N=79)	**38 (48.1)**	4 (5.1)	9 (11.4)	**17 (21.5)**	6 (7.6)	5 (6.3)

2번 문항은 실생활 속에서 친숙도가 높은 편이며, 시간과 속력을 통해 거리를 해결하는 것은 과학 교과를 통해 학습된 내용이므로 학생들의 다양한 비형식적 지식을 살펴볼 수 있었다. 학생들에게 반비례라는 개념이 익숙하지 않기 때문에 이처럼 실생활과 관련되어 있는 문제를 통해 반비례 개념을 학습하도록 할 필요가 있었다.

나. 6번 분석 결과

6. 다음은 48km를 가는데 1시간에 가는 거리를 □km, 걸리는 시간을 △시간이라 할 때, □와 △의 대응표와 관계식을 나타낸 표입니다. 6km를 가는데 몇 시간이 걸리겠습니까?

□(km)	1	2	3	…	6	…
△(시간)	48	24	16	…		…

6번 문항은 표를 보면서 반비례하는 두 양 사이의 관계를 구할 수 있는지 알아보기 위한 것이다. 이 문항에 반응하는 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-11>과 같다.

<표 Ⅳ-11> 문항 정답 빈도수(6번 문항)

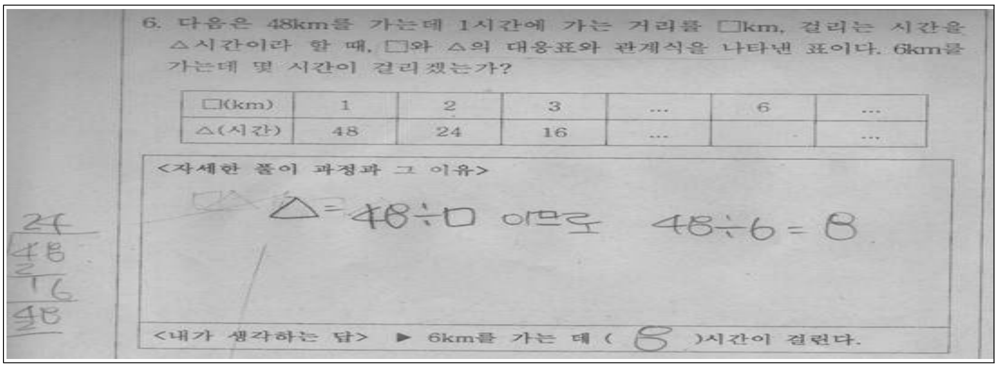
문항 / 빈도수	반 비 례
	6번
정답자(정답율)	55 (47.0)
오답자(오답율)	62 (53.0)

6번 문항에 대한 정답율은 47.0%로 낮은 편이며, 오답율이 더 높았다. 정비례 9번 문항 역시 주어진 표를 보여 대응 규칙을 찾고 해결하는 문제이며, 정비례 9번 문항은 88%의 정답율을 보여 반비례 6번 문항보다 높은 정답율을 보였다. 이는 학생들이 초등학교 과정에서 □의 값이 커질 때, △의 값도 커지는 정비례의 상황들은 많이 접해 보아 쉽게 해결할 수 있기 때문이다. 또한, 정비례 9번 문항을 해결하는 전략은 다양했지만, <표 Ⅳ-12>와 같이 6번 문항에서 보인 해결 전략은 두 가지임을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-12> 반응한 학생들의 전략(6번 문항)

문항 / 전략		비례 상수 구하기	식 세우기	잘못된 과정	풀이과정 없음
반비례	6번 (N=55)	31 (56.4)	10 (18.2)	8 (14.5)	6 (10.9)

6번 문항은 56.4%의 학생들은 비례 상수를 구하였고, 18.2%의 학생들은 규칙성을 찾아 식을 세워서 문제를 해결하였다.


6. 다음은 48km를 가는데 1시간에 가는 거리를 □km, 걸리는 시간을 △시간이라 할 때, □와 △의 대응표와 관계식을 나타낸 표이다. 6km를 가는데 몇 시간이 걸리겠는가?

□(km)	1	2	3	…	6	…
△(시간)	48	24	16	…		…

<자세한 풀이 과정과 그 이유>

△=48÷□ 이므로 48÷6=8

<내가 생각하는 답> ▶ 6km를 가는 데 (8)시간이 걸린다.

<그림 Ⅳ-1> 식 세우기(6번)

학생들은 6번 문항에 대해 규칙을 찾기 위해 많은 시도를 했음을 알 수 있었으나, □와 △ 사이의 관계를 찾기란 어려웠던 것으로 보인다. 학생들은 □와 △ 사이의 관계를 알아보고자 시도한 결과 □ × △ = 48임을 알고, 전체가 48km라고 생각하였다. 여기에서의 전체는 변하지 않는 값인 비례 상수를 의미한다. 또한, <그림 Ⅳ-1>과 같이 □와 △사이의 관계식을 세워 문제를 해결하기도 하였다.

반비례 문항에서 식을 세워 문제를 해결하는 경우는 6번 문항뿐이었다. 따라서 반비례의 개념을 형성하고 이를 식으로 나타낼 때 표를 활용할 필요를 느꼈다. 표를 제시하여 문제를 해결하고자 할 때, 정비례 상황인 9번 문항은 해결하였으나, 반비례 6번 문항은 해결하지 못한 학생을 대상으로 면담하였다.

반22-T01 왜 처음에는 풀 수 없다고 했었니?
반22-S01 처음에는 48에서 24로, 16으로,,, 줄어드니까 빼기나 나누기를 하려고 했었거든요. 근데 둘 다 안 되니까 못 푸는 문제인 줄 알았어요. 갑자기 1과 48을 곱하면 48이고, 2와 24를 곱하면 48이 되는 것을 알았어요. 그래서 6에다가 얼마를 곱해야 48이 되는지 생각하니 8이 나왔어요.
반22-T02 이런 문제 풀어 본 적 없어?
반22-S02 음... 예전에 퀴즈 푸는 책에서는 본 것 같기도 하고,,
반22-T03 (9번 문항을 보여주며) 이 문제는 풀어 본 적 있어?
반22-S03 9번은 교과서에서 풀었잖아요.

이 학생은 정비례를 나타내는 9번 문항의 표에는 익숙하기 때문에, 반비례를 나타내는 6번 문항의 표를 해결하는 데에 힘들어 하였다. 또한, 정비례 9번 문항은 곱셈을 해야 하니 더 쉽고, 반비례 6번 문항은 나눗셈을 해야 하므로 더 어렵다고 하였다.

다. 8번 분석 결과

8. 기계 20대로 8시간이 걸려서 할 일을 5시간에 끝마치려면, 기계는 몇 대가 필요하겠습니까?

8번 문항은 전체 일의 양을 알아보고 걸린 시간에 따른 필요한 기계수를 대응표로 만들어 해결하는 문제이다. 8번 문항에 반응한 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-13>과 같다.

<표 Ⅳ-13> 문항 정답 빈도수(8번 문항)

문항 / 빈도수	반 비 례
	8번
정답자(정답율)	8 (6.8)
오답자(오답율)	109 (93.2)

117명의 학생 중에서 8명의 학생만이 8번 문항을 해결할 수 있었으며, 가장 낮은 정답율을 보였다. 8명의 학생들이 보인 전략 역시 두 가지일 뿐이며, 대부분의 학생들이 같은 오류를 보이고 있음을 알 수 있었다. 8번 문항에 반응한 학생들의 전략은 <표 Ⅳ-14>와 같다. 이 문제를 해결한 학생들 중 6명은 비례 상수를 구하여 해결하였다. 학생들은 걸린 시간과 필요한 기계수의 관계를 대응표로 나타낼 수는 없지만, 두 수의 곱(비례상수)이 160으로 일정하다는 것을 알고 160 ÷ 5(시간)를 구할 수

있었다.

<표 Ⅳ-14> 반응한 학생들의 전략(8번 문항)

문항 \ 전략		비례 상수 구하기	곱셈 추론 전략
반비례	8번 (N=8)	6 (75.0)	2 (25.0)

8시간에서 5시간으로 1.6배가 감소하는 것이므로 그 만큼의 기계가 필요함을 알고, 20대의 기계에 1.6배를 곱한다. 소수의 학생들이지만 문제를 통해 한 쪽이 2배, 3배, …로 변함에 따라 다른 쪽은 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, …로 변하고 있음을 알고 있었다.

라. 10번 분석 결과

> 10. A라는 신발 공장에서는 2대의 신발 만드는 기계로 100켤레의 신발을 만드는데 20일이 걸린다고 합니다. 이 공장에서 신발 만드는 기계를 8대로 늘린다면 100켤레의 신발을 만다는 데 며칠이 걸리겠습니까?

위의 문항은 100켤레의 신발을 만들기 위한 전체의 일의 양을 이해하고, 기계의 수가 변할 때 일하는 데에 걸리는 시간을 구하는 문제이다. 10번 문항에 대한 학생들의 정답 빈도수는 <표 Ⅳ-15>와 같다.

<표 Ⅳ-15> 문항 정답 빈도수(10번 문항)

빈도수 \ 문항	반 비 례
	10번
정답자(정답율)	56 (47.9)
오답자(오답율)	61 (52.1)

47.9%의 학생들이 문제를 해결하였으며, 8번 문항에 비해 정답율이 높음을 알 수 있다. 또한, 8번 문항을 해결한 학생들이 반응한 전략은 두 가지이지만 10번 문항을 해결한 학생들이 반응한 전략은 <표 Ⅳ-16>과 같았다.

<표 Ⅳ-16> 반응한 학생들의 전략(10번 문항)

문항 \ 전략		곱셈추론 전략	한 단위 전략	Building-up 곱셈 구성전략	풀이과정 없음
반비례	10번 (N=56)	35 (62.5)	5 (8.9)	9 (16.1)	7 (12.5)

10번 문항은 곱셈 추론 전략은 62.5%, 한 단위 전략은 8.9%, Building-up 구성 전략은 16.1%로 다른 반비례 문제에 비해 학생들은 다양한 전략으로 문제를 해결하고 있었다. 4학년을 대상으로 비와 비례에 대한 문제해결 과정에서 나타나는 비형식적 지식을 조사한 결과와 비교해 보면, 본 연구와 마찬가지로 36.3%의 정답을 보인 학생들 중에 11.5%의 학생들이 곱셈 추론 전략으로 문제를 해결하고 있다고 하였다(박수희, 2009)

그렇지만 8번 문항과 10번 문항은 일하는 데에 걸리는 시간과 기계의 수와의 관계를 묻는 문제임에도 불구하고, 8번 문항은 117명 중 8명의 학생만이 문제를 해결하였고, 10번 문항은 117명 중 56명의 학생들이 문제를 해결하였다. 또한, 10번 문항을 해결하기 위해서 학생들은 곱셈 추론 전략, 한 단위 전략, Building-up 곱셈 구성전략 등 다양한 방법을 사용하고 있었다. 학생들의 풀이 과정을 살펴보면 변하지 않은 조건(100켤레)을 또 하나의 변인으로 여기고 문제를 해결하는 데에 사용하였다. 즉, 문제 속에 조건 혹은 변인들이 많을수록 학생들은 다양하게 문제를 해결하고자 하였다.

4. 반비례 개념에 대한 비형식적 지식의 시사점

조사연구와 심층 면담의 분석 결과, 반비례 개념에 대한 학생들의 비형식적 지식으로 부터 반비례 개념 지도에 대한 몇 가지 시사점을 얻을 수 있었다. 먼저, 학생들은 정비례 문제에 비해 반비례 문제를 해결하는 데에 어려움을 갖고 있었다. 이것은 문제 상황이 일상에서 친숙한 정도에 따른 것으로 판단된다. 따라서 학생들이 반비례 개념에 대하여 가지고 있는 비형식적 지식을 바탕으로 하여 형식적인 학교 교육으로 형식화시키기 위해서는 학생들과 관련이 있는 반비례 상황의 문제를 많이 개발하고, 이를 통해 먼저 학생들에게 익숙한 용어로 문제를 제시할 필요가 있다. 즉 학생들이 비형식적으로 일상의 경험으로부터 반비례 문제를 해결하고, 이를 형식화하는 방안으로 학교 수학은 두 변량 사이의 반비례 관계를 도입하도록 할 필요가 있다.

둘째, 정비례 문제를 표로 제시한 9번 문항은 88.0%의 학생들이 문제를 해결할 수 있었으며, 문장제보다 높은 정답율을 보였다. 이와 반대로 반비례 문제를 표로 제시한 6번 문항은 47.0%의 정답율을 보이고 있었다. 이것은 학생들이 일상에서 정비례 상황을 주로 경험하기 때문으로 판단된다. 따라서 다양한 문제 상황을 통해 정비례 상황과 반비례 상황을 많이 접해 볼 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다.

셋째, 문제 속의 다양한 조건을 제시할 필요가 있음을 알 수 있었다. 6.8%의 정답율을 보인 8번 문제에 비해 기계의 수에 따른 걸리는 시간에 관한 문제로 10번 문항을 제시하였을 때, 47.9%의 높은 정답율을 보였다. 학생들의 해결 과정을 보면, 10번 문제를 해결할 때 변하지 않은 조건으로 제시한 100켤레를 활용하고 있는 것을 알 수 있었다. 따라서 학생들이 반비례 개념에 대하여 가지고 있는 비형식적 지식을 바탕으로 하여 형식적인 학교 교육으로 형식화시키기 위해서는 문제에 제시되는 조건을 단계적으로 추가하여 자신의 비형식적 지식을 더 많이 활용할 수 있도록 할 필요가 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 비례의 개념에 대해 배우지 않은 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식을 조사하고 분석하여, 교수학적 시사점을 찾는데 목적이 있다. 이러한 목적을 달성하기 위해 비례를 정비례와 반비례로 나누어 학생들의 비형식적 지식에는 어떤 것들이 있는지와 학생들의 비형식적 지식을 비례 개념 지도에 어떻게 활용할 수 있는가에 대해 연구하였다.

연구 문제를 해결하기 위하여 정비례, 반비례에 관한 선행학습을 하지 않은 광주광역시 소재 Y초등학교 6학년 학생들 117명을 연구대상으로 6학년 학생들에게 적절하다고 판단되는 정비례, 반비례 문제를 제시하여 조사연구를 실시하였다. 그리고 학생들의 문제해결 전략에 따라 분류하여 비형식적 지식을 심층적으로 분석하기 위해 9명의 학생들을 선정한 후 면담을 실시하였다.

정비례, 반비례에 관한 초등학교 6학년 학생의 비형식적 지식에 대해 이상에서 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 정비례, 반비례에 대한 형식적 교육을 배우지 않은 상당수의 6학년 학생들이 자신의 비형식적 지식을 이용하여 정비례, 반비례 문제를 해결할 수 있었다. 둘째, 정비례 문제를 해결하는 빈도수가 반비례를 해결하는 빈도수보다 더 높았다. 셋째, 정비례 문제를 해결하는 데에 곱셈 추론 전략, 비례 추론 전략, 한 단위 전략, Building-up 구성전략 등 다양한 전략을 사용하였으나, 반비례 전략을 사용하는 데에는 사용된 전략이 한정되었다. 넷째, 학생들은 정비례 문제를 해결하는 데 6-가 단계에서 학습한 비례 추론 전략을 많은 학생들이 적용하여 해결하였다. 이는 비례식으로 문제를 해결하는 것 역시 학생들에게 비형식적 지식으로 사용됨을 알 수 있다.

다섯째, 학생들의 정비례, 반비례에 대한 비형식적 지식을 형식화하기 위해서 문제 속의 수들을 다양하게 제시하여 학생들이 비형식적 지식을 활용하여 문제를 해결할 수 있도록 할 필요가 있었다. 또한, 학생들에게 친숙한 용어나 상황을 제시하여 개념을 이해하도록 도울 필요가 있었다. 여섯째, 표를 활용하여 정비례, 반비례 개념을 이해시킬 필요가 있었다.

본 연구에 덧붙여 다양한 형태의 비례 문제를 이용하여 학생들의 비례에 관한 비형식적 지식을 좀 더 살펴볼 필요가 있다. 또한 5학년이나 7학년 학생들을 대상으로 비례에 관한 비형식적 지식을 조사해 볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2002). 초등학교 교사용 지도서, 수학 6-가. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부.

박수희 (2009). 비와 비례에 대한 문제해결 과정에서 나타나는 초등학생 4학년 학생들의 비형식적 지식 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

박현미 (2006). 자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. 서울교육대학교 석사학위논문.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발. 한국교원대학교 박사학위논문.

안숙현 (2008). 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. 한국교원대학교 석사학위논문.

오유경 (2009). 분수 개념에 대한 초등학생들의 비형식적 지식 분석: 1~3학년을 중심으로. 대구교육대학교 석사학위논문.

이영숙 (1998). 비례 문제 해결 전략과 오류에 대한 분석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

이선미 (2009). 나눗셈에 관한 비형식적 지식의 형식화 지도방안 연구. 경인교육대학교 석사학위논문.

정유진 (2009). 제 7차 수학과 교육과정과 개정 수학과 교육과정의 비교·분석. 경성대학교 석사학위논문.

정은실 (2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. 수학교육학연구, 5(4), pp.521-440.

정행기 (2000). 비례 문제의 문제 상황과 내용 친숙성에 따른 초등학생의 비례 논리 발달 조사. 한국교원대학교 석사학위논문.

최효진 (2005). 중학교 1학년 학생들의 비례 문제 해결 전략과 함수 개념과의 관계. 이화여자대학교 석사학위논문.

최혜진 (2008). 자연수의 곱셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. 서울교육대학교 석사학위논문.

홍은숙 (2007). 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식. 서울교육대학교 석사학위논문.

Baroody, A. J., & Coslick, P. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatric, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp.511-564). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive Processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg(Eds.), *Rational number*(pp.131-156). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Techers of Mathematics.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W.(1993). *Street mathematics and school mathematics.* Victoria: Cambridge University Press.

An Analysis of Elementary School Students' Informal Knowledge In Proportion

Park, Sang Eun

Yulgok Elementary School, Bom-sil, 284, Dong Gu, Gwang-Ju, Korea
E-mail : psehe@hanmail.net

Lee, Dae Hyun

Department of Mathematics Education, Gwangju National University of Education,
1-1, Punghyang-dong, Buk-ku, Gwangju 110-230, Korea.
E-mail : leedh@gnue.ac.kr

Rim, Hae Kyung

Department of Mathematics Education, Gwangju National University of Education,
1-1, Punghyang-dong, Buk-ku, Gwangju 110-230, Korea.
E-mail : hkrim@gnue.ac.kr

The purpose of this study is to investigate and analyze informal knowledge of students who do not learn the conception of proportion and to identify how the informal knowledge can be used for teaching the conception of proportion in order to present an effective method of teaching the conception. For doing this, proportion was classified into direct and inverse proportion, and 'What are the informal knowledge of students?'were researched.

The subjects of this study were 117 sixth-graders who did not have prior learning on direct and inverse proportion. A total eleven problems including seven for direct proportion and four for inverse proportion, all of them related to daily life.

The result are as follows; Even though students didn't learn about proportion, they solve the problems of proportion using informal knowledge such as multiplicative reasoning, proportion reasoning, single-unit strategy etc. This result implies mathematics education emphasizes student's informal knowledge for improving their mathematical ability.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words: Informal Knowledge, proportion