응용통계연구 (2010)
**23**(3), 487–495

# 전진 제 2종 중도절단자료에 대한 Shapiro-Wilk 형태의 지수검정

김남현[1]

[1]홍익대학교 기초과학과

(2010년 2월 접수, 2010년 5월 채택)

**요 약**

본 논문에서는 지수분포의 검정에 자주 쓰이는 Shapiro와 Wilk (1972) 통계량과 이의 단점을 보완한 Kim (2001a)의 통계량을 위치모수가 주어지고 척도모수가 미지인 지수분포에서의 전진 제 2종 중도절단자료에 적용하였다. 이를 위하여 각각의 통계량을 Stephens (1978)을 이용하여 위치모수가 주어진 경우의 검정통계량으로 수정하고, 자료를 정규화 간격(normalized spacings)을 이용하여 변환하는 방법을 사용하였다. 모의실험을 통하여 검정력을 비교한 결과 Shapiro-Wilk 통계량보다 Kim (2001a)의 통계량을 이용할 때 고려한 거의 모든 경우 더 우수한 검정력을 나타내었다.

주요용어: 적합도검정, 지수검정, Shapiro-Wilk 통계량, 정규화 간격.

## 1. 서론

지수분포는 신뢰성 이론에서 가장 널리 쓰이는 분포 중의 하나이다. 따라서 자료가 지수분포를 따르는지를 검정하는 적합도 검정의 문제는 통계학의 오랜 연구 주제였다. 이에 대한 구체적인 사항은 Shapiro (1995)와 Stephens (1986b)를 참고로 한다.

수명 실험에서 모든 개체가 고장을 일으키기 전에 검사를 종료하게 되면, 이로부터 얻어지는 자료는 절단자료(censored data)가 된다. 제 2종 우측 중도절단(Type II right censoring)은 $n$개의 단위 중 미리 정해놓은 $r$번째 고장이 관측되면 실험을 중지하게 된다. 전진 제 2종 우측 중도절단(progressively Type II right censoring)은 이러한 제 2종 우측 중도절단을 일반화 한 것으로, 각각의 고장이 관측될 때마다 몇 개의 단위를 제거할 수 있다. 이러한 전진 제 2종 중도절단의 기본 개념은 Cohen (1963, 1966)에서 비롯되었다.

본 논문에서는 지수검정에 자주 사용되는 Shapiro와 Wilk (1972) 검정통계량과 이의 단점을 보완한 Kim (2001a)의 검정통계량을 전진 제 2종 중도절단자료에 대해서 확장하려 한다. 기본 개념은 자료의 정규화 간격(normalized spacings)을 이용하는 것이다. 이러한 개념은 Tiku (1980), Balakrishnan 등 (2002), Wang (2008) 등에서도 중도절단자료에 대한 검정 통계량을 제안하기 위해 사용되었다.

2절에서는 전진 제 2종 중도절단과 이 경우 사용할 수 있는 통계량을 소개한다. 3절에서는 제안한 통계량의 검정력을 모의실험을 통하여 비교하여 보고 실제 자료에 적용해 본다. 4절에서는 간략하게 결론을 언급한다.

이 논문은 2009년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(2009-0072563).
[1](121-791) 서울시 마포구 상수동 72-1, 홍익대학교 기초과학과, 교수. E-mail: nhkim@hongik.ac.kr

## 2. 전진 제 2종 중도절단에서의 지수검정

보통의 제 1종, 제 2종 우측 중도절단(Type I, Type II right censoring)에서는 실험종료 전에 실험단위를 제거할 수 없다. 만일 수명실험을 정해놓은 시각 $t$까지만 계속한다면, 그 시간 안에 고장을 일으키는 단위의 수는 랜덤이 되며 이 경우를 제 1종 중도절단(Type I censoring)이라고 한다. 반면 $n$개의 단위 중 $r$개의 단위가 고장 날 때까지 실험을 계속한다면 이는 제 2종 중도절단(Type II censoring)이다. 즉, 수명시간의 순서통계량을 $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$이라고 할 때, 일부 자료인 $X_{(1)}, \ldots, X_{(r)}$만이 관측된다. 제 1종 중도절단에서는 고정된 $t$에 대해서 $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(r)} \leq t$이고, $r$이 랜덤이며, 제 2종 중도절단에서는 $r$이 고정된 값이다. 두 경우 모두 중도절단은 실험 종료시에만 가능하다.

이보다 좀 더 일반적인 중도절단이 전진 제 2종 우측 중도절단이다. 위와 마찬가지로 $n$개의 단위로 수명실험을 한다고 하자. 첫 번째 고장이 관측되면 $n-1$개의 단위 중 $R_1$개의 단위를 랜덤하게 제거한다. 두 번째 고장이 관측되면 나머지 $n-2-R_1$개의 단위 중 $R_2$개의 단위를 제거한다. 이러한 과정을 $m$번째 고장이 나타날 때까지 계속한다. $m$번째 고장 시 남은 $n-m-R_1-R_2-\cdots-R_{m-1}=R_m$개의 단위를 모두 제거한다. 여기서 $m(<n)$과 $(R_1, R_2, \ldots, R_m)$, $R_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{m} R_j + m = n$은 실험전에 미리 정해진다. 이 때 관측된 수명시간 $X_{(1):m:n} \leq X_{(2):m:n} \leq \cdots \leq X_{(m):m:n}$은 전진 제 2종 중도절단 자료이다. 만일 $R_1 = R_2 = \cdots = R_{m-1} = 0$이면 $R_m = n-m$이며, 이는 보통의 제 2종 중도절단이 된다. 전진 중도절단에 대한 자세한 사항은 Balakrishnan과 Aggarwala (2000)을 참고로 한다.

수명분포가 확률분포함수

$$f(x;\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0 \tag{2.1}$$

와 누적분포함수

$$F(x;\beta) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad x > 0$$

을 갖는 지수분포 $\mathrm{Exp}(0,\beta)$를 따른다고 하자. 여기서 $\beta$는 미지이다. 즉, 위치모수(location parameter)는 알려져 있고 척도모수(scale parameter)만 미지인 지수분포를 가정한다.

이 때 관측된 전진 제 2종 중도절단자료 $\mathbf{X} = (X_{(1):m:n} \leq X_{(2):m:n} \leq \cdots \leq X_{(m):m:n})$가 식 (2.1)의 $\mathrm{Exp}(0,\beta)$를 따르는지를 검정하고자한다. 즉,

$$H_0 : \mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathrm{Exp}(0,\beta) \quad vs. \quad H_1 : \mathbf{X} \stackrel{d}{\neq} \mathrm{Exp}(0,\beta) \tag{2.2}$$

을 검정한다. $\stackrel{d}{=}$는 좌변이 우변의 분포를 따름을 의미한다.

다음은 지수분포에 대한 정규화 간격을 전진 제 2종 중도절단자료로 일반화한 결과이다. $T_1, \ldots, T_m$을 전진 제 2종 중도절단자료의 정규화 간격

$$\begin{aligned}
T_1 &= nX_{(1):m:n} \\
T_2 &= (n - R_1 - 1)(X_{(2):m:n} - X_{(1):m:n}) \\
T_3 &= (n - R_1 - R_2 - 2)(X_{(3):m:n} - X_{(2):m:n}) \\
&\vdots \\
T_m &= (n - R_1 - \cdots - R_{m-1} - m + 1)(X_{(m):m:n} - X_{(m-1):m:n})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

이라고 하자. 만일 수명분포가 지수분포 $\text{Exp}(0,\beta)$를 따른다면, $T_1,\ldots,T_m$ 역시 독립이고 각각 $\text{Exp}(0,\beta)$를 따른다 (Balakrishnan과 Aggarwala, 2000). 즉,

$$T_1,\ldots,T_m \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(0,\beta)$$

이다.

만일 고려하는 수명분포가

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}},\quad x>\alpha$$

이고 $\alpha,\beta$가 모두 미지인 경우에는 즉, 이모수 지수분포 $\text{Exp}(\alpha,\beta)$를 검정하는 경우에 대표적인 통계량 중 하나는 Shapiro와 Wilk (1972)의 통계량 $W_E(n)$이다. 여기서 ( )안의 $n$은 표본 크기를 나타낸다. $X_1,X_2,\ldots,X_n$을 확률표본, $X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)}$을 이것의 순서통계량이라고 할 때

$$W_E(n)=\frac{n\left(\bar{X}-X_{(1)}\right)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}\left(X_{(i)}-\bar{X}\right)^2},\quad \bar{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

이다. $W_E(n)$는 모수 $\beta$의 두 추정량의 비로 구성된 통계량으로 양쪽 검정통계량이다. 이 통계량은 대부분의 대립가설에서 좋은 검정력을 나타내지만, 일치성(consistency)을 갖지 않는다는 단점이 있다 (Spinelli와 Stephens, 1987; Stephens, 1986a, 12절). 이러한 단점을 보완하기 위해서 Kim (2001a)에서는 $W_E(n)$의 분모를 $\beta$의 점근유효추정량(asymptotically efficient estimator, Kim (2001a)의 정리 3)인

$$\widetilde{L}_n=\frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\frac{(X_{(j)}-X_{(1)})^2}{\widetilde{v}_{jn}},\quad \widetilde{v}_{jn}=\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{n-k+1}$$

으로 대치하여

$$\widetilde{N}_E(n)=\frac{n(\bar{X}-X_{(1)})^2}{(n-1)^2\widetilde{L}_n}=\frac{n(\bar{X}-X_{(1)})^2}{(n-1)\sum_{j=2}^{n}(X_{(j)}-X_{(1)})^2/\widetilde{v}_{jn}} \tag{2.4}$$

를 제안하였다. 일반적인 분포에서 $(n-1)\widetilde{N}_E(n)\le 1+o_p(1)$이므로 $\widetilde{N}_E(n)$이 작을 때 귀무가설을 기각한다. Kim (2001b, 2002)에서는 $\widetilde{N}_E(n)$의 이론적인 성질을 규명하였다.

Stephens (1978)은 통계량 $W_E(n)$을 식 (2.2)의 검정을 위한 형태로 수정하였다. 즉, 위치모수와 척도모수가 모두 미지인 지수검정을 위한 Shapiro-Wilk 통계량을 위치모수는 알려져 있고 척도모수만 미지인 경우 이용할 수 있도록 하는 보다 합리적인 방법을 제시하였다 (Stephens, 1986a, 11절 참조). Stephens (1978)의 통계량 $W_S(\mathbf{X},n)$은

$$W_S(\mathbf{X},n)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}{n\left\{(n+1)\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right\}} \tag{2.5}$$

이다. $W_S(\mathbf{X},n)$은 확률표본 $X_1,\ldots,X_n$에 위치모수 0을 추가한 $0,X_1,\ldots,X_n$의 $(n+1)$개의 자료가 있다고 가정하고 Shapiro-Wilk 통계량을 계산한 것과 동일함을 보일 수 있다. 또한 귀무가설하에서

$$W_S(\mathbf{X},n)\overset{d}{=}W_E(n+1)$$

이므로 Shapiro-Wilk 통계량의 귀무가설에서의 분포를 그대로 이용할 수 있다.

식 (2.4)의 $\widetilde{N}_E(n)$도 Stephens (1978)과 같은 방법으로 척도모수만 미지인 경우의 통계량으로 수정하면

$$\widetilde{N}_S(\mathbf{X}, n) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n+1)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_{(i)}^2/\widetilde{v}_{j+1,n+1}\right)} \tag{2.6}$$

이다. 마찬가지로 $\widetilde{N}_S(\mathbf{X}, n) \overset{d}{=} \widetilde{N}_E(n+1)$이 성립한다.

이제 통계량 $W_S(\mathbf{X}, n)$과 $\widetilde{N}_S(\mathbf{X}, n)$을 식 (2.3)의 정규화 간격을 이용하여 전진 제 2종 중도절단자료에 대한 통계량으로 확장하자. $T_1, \ldots, T_m$의 순서통계량 $T_{(1)}, \ldots, T_{(m)}$에 대해서 식 (2.5), (2.6)의 $W_S, \widetilde{N}_S$을 계산하면

$$W_S(\mathbf{T}, m) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} T_i\right)^2}{m\left\{(m+1)\sum\limits_{i=1}^{m} T_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} T_i\right)^2\right\}} \tag{2.7}$$

$$\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m) = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} T_i\right)^2}{m(m+1)\left(\sum\limits_{i=1}^{m} T_{(i)}/\widetilde{v}_{j+1,m+1}\right)} \tag{2.8}$$

이다. $W_S(\mathbf{T}, m)$과 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 귀무가설에서의 분포는 $W_E(m+1)$와 $\widetilde{N}_E(m+1)$의 분포를 이용하면 된다.

다음 절에서는 $W_S(\mathbf{T}, m)$와 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 검정력을 여러가지 중도절단계획(censoring schemes)과 몇가지 표본크기에서 비교해 보고자 하다.

## 3. 모의실험 결과 및 적용예제

식 (2.7), (2.8)의 $W_S(\mathbf{T}, m)$과 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 검정력을 조사하기 위하여 여러가지 대립가설에서의 모의실험을 행하였다. $W_S(\mathbf{T}, m)$과 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 귀무가설에서의 분포의 분위수는 각각 $W_E(m+1)$, $N_E(m+1)$과 동일하므로 Shapiro와 Wilk (1972), 김남현 (2008)을 참고로 하였다. 고려한 대립가설은

- $(0,1)$에서의 균일분포 $U(0,1)$
- 자유도가 1, 4인 카이제곱 분포 $\chi^2(1)$, $\chi^2(4)$
- 형상모수(shape parameter)가 0.5, 2.0이고 척도모수가 1인 와이블분포 Weibull(0.5), Weibull(2.0)
- 형상모수가 0.5, 1.0이고 척도모수가 1인 로그정규분포 lognormal(0.5), lognormal(1.0)
- half Cauchy 분포
- 베타분포 Beta$(1/2, 3/2)$, Beta$(1/4, 5/12)$, Beta$(1/8, 9/56)$

이다. 즉, Weibull$(\alpha)$는 확률밀도함수

$$\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha}, \quad x > 0$$

표 **3.1.** 전진 제 2종 중도절단자료

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{(i):m:n}$ | 0.18999 | 0.77997 | 0.95993 | 1.30996 | 2.77986 | 4.84962 | 6.49999 | 7.35000 |
| $R_i$ | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | 5 |

표 **3.2.** 통계량 $W_S(\mathbf{T}, m)$, $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 검정력 비교($C_V = 1$)

| $n$ | 중도절단계획 | | Exp(0, 1) | | Beta(1/2, 3/2) | | Beta(1/4, 5/12) | | Beta(1/8, 9/56) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ |
| $n = 20$ | $m = 8$ | $R_1 = 12$ | 0.0988 | 0.1046 | 0.1738 | 0.2930 | 0.4878 | 0.7089 | 0.8211 | 0.9532 |
| | | $R_8 = 12$ | 0.0993 | 0.0999 | 0.2001 | 0.3135 | 0.5447 | 0.7454 | 0.8394 | 0.9551 |
| | | $R_1 = R_8 = 6$ | 0.0961 | 0.1035 | 0.2015 | 0.3265 | 0.5150 | 0.7335 | 0.8052 | 0.9470 |
| | $m = 12$ | $R_1 = 8$ | 0.1017 | 0.0976 | 0.1922 | 0.2904 | 0.5803 | 0.7698 | 0.9192 | 0.9853 |
| | | $R_{12} = 8$ | 0.1022 | 0.1048 | 0.2213 | 0.3213 | 0.5850 | 0.7773 | 0.8844 | 0.9708 |
| | | $R_3 = R_5 = R_7 = R_9 = 2$ | 0.0990 | 0.1017 | 0.2146 | 0.3166 | 0.6375 | 0.8159 | 0.9361 | 0.9892 |
| | $m = 16$ | $R_1 = 4$ | 0.1011 | 0.0959 | 0.1836 | 0.2818 | 0.6151 | 0.8213 | 0.9506 | 0.9949 |
| | | $R_{16} = 4$ | 0.1042 | 0.1002 | 0.1911 | 0.2911 | 0.5274 | 0.7594 | 0.8972 | 0.9805 |
| | | $R_5 = 4$ | 0.1062 | 0.1033 | 0.2059 | 0.3056 | 0.6628 | 0.8510 | 0.9624 | 0.9966 |
| $n = 40$ | $m = 10$ | $R_1 = 30$ | 0.1017 | 0.1067 | 0.2009 | 0.3363 | 0.5513 | 0.7770 | 0.8860 | 0.9808 |
| | | $R_{10} = 30$ | 0.0969 | 0.1083 | 0.2256 | 0.3542 | 0.6359 | 0.8321 | 0.9121 | 0.9866 |
| | | $R_1 = R_5 = R_{10} = 10$ | 0.1001 | 0.1033 | 0.2739 | 0.4207 | 0.7246 | 0.8988 | 0.9558 | 0.9956 |
| | $m = 20$ | $R_1 = 20$ | 0.1015 | 0.1000 | 0.2125 | 0.3324 | 0.7008 | 0.8948 | 0.9796 | 0.9991 |
| | | $R_{20} = 20$ | 0.0966 | 0.0940 | 0.2515 | 0.3885 | 0.7571 | 0.9207 | 0.9795 | 0.9989 |
| | | $R_1 = R_2 = \cdots = R_{20} = 1$ | 0.0963 | 0.0987 | 0.2528 | 0.3922 | 0.7564 | 0.9304 | 0.9821 | 0.9992 |
| | $m = 30$ | $R_1 = 10$ | 0.1001 | 0.0964 | 0.2173 | 0.3290 | 0.7996 | 0.9527 | 0.9970 | * |
| | | $R_{30} = 10$ | 0.1004 | 0.0952 | 0.2281 | 0.3476 | 0.7091 | 0.9053 | 0.9762 | 0.9990 |
| | | $R_1 = R_{30} = 5$ | 0.0960 | 0.0923 | 0.2125 | 0.3320 | 0.5681 | 0.7680 | 0.9831 | 0.9994 |
| $n = 60$ | $m = 20$ | $R_1 = 40$ | 0.0997 | 0.1023 | 0.2133 | 0.3415 | 0.5441 | 0.7537 | 0.9800 | 0.9997 |
| | | $R_{20} = 40$ | 0.1010 | 0.0992 | 0.2769 | 0.4235 | 0.6900 | 0.8675 | 0.9911 | 0.9998 |
| | | $R_1 = R_{20} = 10$, $R_{10} = 20$ | 0.0991 | 0.1027 | 0.3257 | 0.4851 | 0.7855 | 0.9316 | 0.9960 | 0.9998 |
| | $m = 40$ | $R_1 = 20$ | 0.0906 | 0.0950 | 0.2442 | 0.3766 | 0.8078 | 0.9566 | 0.9993 | * |
| | | $R_{40} = 20$ | 0.0970 | 0.0995 | 0.2717 | 0.4290 | 0.7571 | 0.9341 | 0.9943 | * |
| | | $R_1 = R_3 = \cdots = R_{39} = 1$ | 0.0974 | 0.0979 | 0.2679 | 0.4106 | 0.8126 | 0.9568 | 0.9987 | * |
| | $m = 50$ | $R_1 = 10$ | 0.0965 | 0.1007 | 0.2777 | 0.4040 | 0.8817 | 0.9818 | * | * |
| | | $R_{50} = 10$ | 0.1005 | 0.1020 | 0.2592 | 0.3914 | 0.7389 | 0.9232 | 0.9980 | * |
| | | $R_1 = R_{50} = 5$ | 0.0974 | 0.0991 | 0.2426 | 0.3699 | 0.7774 | 0.9347 | 0.9999 | * |

을 lognormal($\alpha$)는 확률밀도함수

$$\left(\sqrt{2\pi}\alpha x\right)^{-1} e^{-\frac{(\log x)^2}{(2\alpha^2)}}, \quad x > 0$$

을 갖는다.

이 중 $U(0,1)$, $\chi^2(4)$, Weibull(2.0), lognormal(0.5) 분포는 증가 고장률(increasing failure rate) 분포이고 변동계수 $C_V < 1$이다. 변동계수는 분포의 표준편차를 평균으로 나눈 값이다. 그리고 $\chi^2(1)$, Weibull(0.5), lognormal(1), half Cauchy는 감소 고장률(decreasing failure rate) 분포이고 변동계수 $C_V > 1$이다. 대립가설로 고려한 베타분포는 지수분포와 마찬가지로 $C_V = 1$이 되도록 모수(parameters)를 선택하였다.

고려한 중도절단 계획과 검정력 결과는 표 3.2～3.4에 제시하였다. 이러한 중도절단계획은 Balakrishnan 등 (2002), Wang (2008)에서도 이용되었다. 중도절단계획에 나타나지 않은 모든 $R_i$는 0이다. 예를 들어 $R_1 = 12$는 $(R_1, R_2, \ldots, R_m) = (12, 0, \ldots, 0)$을 의미한다. 유의수준은 $\alpha = 0.10$을 이용하였다. 또한 각 대립가설의 분포에서 전진 제 2종 중도절단자료를 얻기 위해서 Balakrishnan과 Sandhu

표 3.3. 통계량 $W_S(\mathbf{T},m)$, $\widetilde{N}_S(\mathbf{T},m)$의 검정력 비교(감소고장률, $C_V > 1$)

| $n$ | 중도절단계획 | | $\chi^2(1)$ $W_S$ | $\chi^2(1)$ $\widetilde{N}_S$ | Weibull(0.5) $W_S$ | Weibull(0.5) $\widetilde{N}_S$ | ognormal(1) $W_S$ | ognormal(1) $\widetilde{N}_S$ | half Cauchy $W_S$ | half Cauchy $\widetilde{N}_S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=20$ | $m=8$ | $R_1=12$ | 0.2309 | 0.3816 | 0.4312 | 0.6025 | 0.1104 | 0.1346 | 0.2936 | 0.3368 |
| | | $R_8=12$ | 0.2015 | 0.3258 | 0.2629 | 0.3943 | 0.0974 | 0.1090 | 0.0930 | 0.1007 |
| | | $R_1=R_8=6$ | 0.2174 | 0.3487 | 0.2856 | 0.4534 | 0.1010 | 0.1188 | 0.0947 | 0.0999 |
| | $m=12$ | $R_1=8$ | 0.2602 | 0.3786 | 0.5280 | 0.6683 | 0.1260 | 0.1413 | 0.4141 | 0.4463 |
| | | $R_{12}=8$ | 0.2456 | 0.3542 | 0.3580 | 0.4946 | 0.1030 | 0.1125 | 0.1075 | 0.1048 |
| | | $R_3=R_5=R_7=R_9=2$ | 0.3142 | 0.4367 | 0.5808 | 0.7043 | 0.1177 | 0.1366 | 0.3421 | 0.3587 |
| | $m=16$ | $R_1=4$ | 0.2470 | 0.3718 | 0.5762 | 0.7225 | 0.1305 | 0.1496 | 0.4850 | 0.5248 |
| | | $R_{16}=4$ | 0.2366 | 0.3669 | 0.4354 | 0.5962 | 0.0969 | 0.1061 | 0.1402 | 0.1588 |
| | | $R_5=4$ | 0.2847 | 0.4253 | 0.6107 | 0.7516 | 0.1376 | 0.1578 | 0.4714 | 0.5083 |
| $n=40$ | $m=10$ | $R_1=30$ | 0.2601 | 0.4271 | 0.4946 | 0.6656 | 0.1613 | 0.2189 | 0.3548 | 0.3999 |
| | | $R_{10}=30$ | 0.2317 | 0.3685 | 0.2703 | 0.4170 | 0.1344 | 0.1860 | 0.0970 | 0.1080 |
| | | $R_1=R_5=R_{10}=10$ | 0.2896 | 0.4469 | 0.3782 | 0.5457 | 0.1401 | 0.1977 | 0.0981 | 0.1045 |
| | $m=20$ | $R_1=20$ | 0.2864 | 0.4345 | 0.6337 | 0.7747 | 0.1724 | 0.2166 | 0.5424 | 0.5788 |
| | | $R_{20}=20$ | 0.2748 | 0.4185 | 0.4010 | 0.5640 | 0.1414 | 0.1850 | 0.1027 | 0.1001 |
| | | $R_1=R_2=\cdots=R_{20}=1$ | 0.3524 | 0.5043 | 0.6219 | 0.7577 | 0.1389 | 0.1879 | 0.1992 | 0.2178 |
| | $m=30$ | $R_1=10$ | 0.3173 | 0.4547 | 0.7577 | 0.8721 | 0.1881 | 0.2266 | 0.6777 | 0.7056 |
| | | $R_{30}=10$ | 0.3120 | 0.4605 | 0.5856 | 0.7411 | 0.1271 | 0.1655 | 0.1287 | 0.1377 |
| | | $R_1=R_{30}=5$ | 0.3145 | 0.4580 | 0.6447 | 0.7832 | 0.1312 | 0.1621 | 0.2221 | 0.2540 |
| $n=60$ | $m=20$ | $R_1=40$ | 0.2941 | 0.4591 | 0.6545 | 0.7958 | 0.2300 | 0.2966 | 0.5309 | 0.5731 |
| | | $R_{20}=40$ | 0.2881 | 0.4417 | 0.3794 | 0.5446 | 0.2137 | 0.2782 | 0.0932 | 0.0967 |
| | | $R_1=R_{20}=10$, $R_{10}=20$ | 0.3825 | 0.5442 | 0.5740 | 0.7271 | 0.2080 | 0.2723 | 0.1008 | 0.1089 |
| | $m=40$ | $R_1=20$ | 0.3510 | 0.5163 | 0.8406 | 0.9314 | 0.2313 | 0.2930 | 0.7581 | 0.7855 |
| | | $R_{40}=20$ | 0.3444 | 0.5165 | 0.6308 | 0.7914 | 0.1874 | 0.2529 | 0.1082 | 0.1132 |
| | | $R_1=R_3=\cdots=R_{39}=1$ | 0.4249 | 0.5906 | 0.8408 | 0.9239 | 0.2103 | 0.2724 | 0.5029 | 0.5394 |
| | $m=50$ | $R_1=10$ | 0.4007 | 0.5553 | 0.9005 | 0.9609 | 0.2589 | 0.3085 | 0.8316 | 0.8491 |
| | | $R_{50}=10$ | 0.3915 | 0.5478 | 0.7833 | 0.8967 | 0.1837 | 0.2373 | 0.2136 | 0.2478 |
| | | $R_1=R_{50}=5$ | 0.4004 | 0.5548 | 0.8214 | 0.9171 | 0.1861 | 0.2314 | 0.3988 | 0.4393 |

(1995)의 알고리즘을 이용하였다. 표본의 수는 $N = 10{,}000$으로 하였다. 검정력은 $N = 10{,}000$개의 표본 중 유의한 표본의 비율을 표시한 것이다. $*$는 검정력이 1임을 의미한다.

관측된 검정력에서 다음과 같은 사실을 볼 수 있다. 우선 $W_S(\mathbf{T},m)$과 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T},m)$ 통계량을 비교하면 $\widetilde{N}_S(\mathbf{T},m)$이 고려한 모든 표본크기, 중도절단계획, 대립가설에서 $W_S(\mathbf{T},m)$과 비슷하거나 더 좋은 검정력을 보여준다. 특히 베타분포와 와이블 분포, $\chi^2(1)$ 등에서는 검정력 차이가 상대적으로 크다. 이는 Kim (2001a), 김남현 (2008)에서 $C_V \geq 1$인 대립가설의 경우에만 $\widetilde{N}_E$가 $W_E$보다 우수한 검정력을 보여주었던 결과와는 다른 양상이다.

검정력은 고정된 $n$에 대해서 $m$이 커질수록, 또한 $n$이 커질수록 증가하나 $n$보다는 $m$과 더 밀접하게 움직이는 경향을 보인다. 또한 베타분포를 제외한 대부분의 분포에서 자료를 마지막($R_m > 0$)에 중도절단할 때, 즉, 보통의 제 2종 중도절단의 경우 다른 중도절단계획에서 보다 검정력이 상대적으로 떨어지는 것을 볼 수 있다. 이 경우에는 김남현 (2008)에서와 유사한 방법으로 Shapiro-Wilk 통계량을 일반화하는 것이 검정력을 높이는데 도움을 줄 것으로 보인다.

다음으로 표 3.1의 전진 제 2종 중도절단자료에 위의 방법을 적용해 보자. 이는 Nelson (1982)의 표 6.1의 자료로 34kilovolts에서 실험한 단열된 유체(insulating fluid)의 성능저하(breakdown) 시간을 나타낸다. 표 3.1에는 관측자료와 중도절단계획을 표시하였다. 이 경우 $n = 19$, $m = 8$이다. 이 자료는 Viveros와 Balakrishnan (1994), Balakrishnan 등 (2002), Wang (2008) 등에서도 고려하였다. 표 3.1의 자료에 대해서 $W_S = 0.23403$, $\widetilde{N}_S = 0.11828$을 얻으며 $W_S$의 경우 $p$값은 $p > 0.2$ (Shapiro와

표 **3.4.** 통계량 $W_S(\mathbf{T}, m)$, $\widetilde{N}_S(\mathbf{T}, m)$의 검정력 비교(증가고장률, $C_V < 1$)

| $n$ | 중도절단계획 | | $\chi^2(4)$ | | Weibull(2.0) | | lognormal(0.5) | | $U(0,1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ | $W_S$ | $\widetilde{N}_S$ |
| $n=20$ | $m=8$ | $R_1=12$ | 0.1523 | 0.2086 | 0.3268 | 0.4413 | 0.7774 | 0.8503 | 0.1456 | 0.2312 |
| | | $R_8=12$ | 0.1151 | 0.1444 | 0.1631 | 0.2298 | 0.5248 | 0.6505 | 0.0967 | 0.1052 |
| | | $R_1=R_8=6$ | 0.1189 | 0.1615 | 0.2039 | 0.2848 | 0.6259 | 0.7319 | 0.1076 | 0.1241 |
| | $m=12$ | $R_1=8$ | 0.1729 | 0.2112 | 0.4211 | 0.5046 | 0.8483 | 0.8831 | 0.2057 | 0.3031 |
| | | $R_{12}=8$ | 0.1480 | 0.1774 | 0.2638 | 0.3308 | 0.7329 | 0.7940 | 0.1229 | 0.1409 |
| | | $R_3=R_5=R_7=R_9=2$ | 0.1537 | 0.1940 | 0.3298 | 0.4131 | 0.7725 | 0.8284 | 0.1475 | 0.2095 |
| | $m=16$ | $R_1=4$ | 0.1740 | 0.2222 | 0.4428 | 0.5394 | 0.8586 | 0.8981 | 0.2420 | 0.3605 |
| | | $R_{16}=4$ | 0.1518 | 0.1952 | 0.3492 | 0.4373 | 0.8276 | 0.8744 | 0.1470 | 0.1903 |
| | | $R_5=4$ | 0.1669 | 0.2173 | 0.4286 | 0.5244 | 0.8422 | 0.8841 | 0.2273 | 0.3379 |
| $n=40$ | $m=10$ | $R_1=30$ | 0.2516 | 0.3301 | 0.5293 | 0.6336 | 0.9855 | 0.9922 | 0.1724 | 0.2775 |
| | | $R_{10}=30$ | 0.1391 | 0.1808 | 0.1992 | 0.2722 | 0.7754 | 0.8526 | 0.1032 | 0.1129 |
| | | $R_1=R_5=R_{10}=10$ | 0.1581 | 0.2177 | 0.2539 | 0.3501 | 0.8800 | 0.9273 | 0.1017 | 0.1132 |
| | $m=20$ | $R_1=20$ | 0.2771 | 0.3462 | 0.6499 | 0.7321 | 0.9943 | 0.9965 | 0.2712 | 0.4012 |
| | | $R_{20}=20$ | 0.1875 | 0.2467 | 0.3830 | 0.4682 | 0.9702 | 0.9814 | 0.1166 | 0.1306 |
| | | $R_1=R_2=\cdots=R_{20}=1$ | 0.2276 | 0.2916 | 0.4792 | 0.5743 | 0.9822 | 0.9878 | 0.1342 | 0.1803 |
| | $m=30$ | $R_1=10$ | 0.3048 | 0.3720 | 0.7347 | 0.7985 | 0.9977 | 0.9982 | 0.3624 | 0.5109 |
| | | $R_{30}=10$ | 0.2579 | 0.3213 | 0.5954 | 0.6673 | 0.9949 | 0.9972 | 0.1623 | 0.2100 |
| | | $R_1=R_{30}=5$ | 0.2768 | 0.3375 | 0.6626 | 0.7298 | 0.9963 | 0.9974 | 0.2176 | 0.2925 |
| $n=60$ | $m=20$ | $R_1=40$ | 0.3608 | 0.4363 | 0.7328 | 0.7996 | 0.9996 | 0.9997 | 0.2682 | 0.4048 |
| | | $R_{20}=40$ | 0.2075 | 0.2704 | 0.3776 | 0.4650 | 0.9877 | 0.9925 | 0.1040 | 0.1110 |
| | | $R_1=R_{20}=10$, $R_{10}=20$ | 0.2567 | 0.3351 | 0.4785 | 0.5736 | 0.9960 | 0.9981 | 0.1071 | 0.1300 |
| | $m=40$ | $R_1=20$ | 0.4188 | 0.4931 | 0.8649 | 0.9062 | * | * | 0.4386 | 0.6064 |
| | | $R_{40}=20$ | 0.3422 | 0.4265 | 0.7068 | 0.7770 | 0.9998 | 0.9998 | 0.1398 | 0.1871 |
| | | $R_1=R_3=\cdots=R_{39}=1$ | 0.3835 | 0.4654 | 0.7949 | 0.8541 | * | * | 0.2378 | 0.3455 |
| | $m=50$ | $R_1=10$ | 0.4441 | 0.5086 | 0.9031 | 0.9286 | * | * | 0.5139 | 0.6762 |
| | | $R_{50}=10$ | 0.4066 | 0.4711 | 0.8429 | 0.8835 | * | * | 0.2646 | 0.3412 |
| | | $R_1=R_{50}=5$ | 0.4275 | 0.4881 | 0.8733 | 0.9032 | * | * | 0.3537 | 0.4539 |

Wilk (1972)의 표 1에서 표본크기가 9일 때 하방 0.05, 0.10, 0.50, 0.90, 0.95 분위수는 각각 0.0633, 0.0751, 0.1415, 0.2553, 0.3005)이며 $\widetilde{N}_S$의 경우 $p \approx 0.75$(모의실험을 통해 얻어진 귀무가설에서의 하방 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90, 0.95 분위수는 각각 0.0984, 0.1036, 0.1102, 0.1150, 0.1182, 0.1201, 0.1209)을 얻는다. 이로부터 지수분포에 대한 가정을 기각할 수 없다. 이것은 이 자료를 고려한 이전의 결과와도 일치한다.

## 4. 결론

본 논문에서는 전진 제 2종 중도절단자료가 척도 모수가 미지인 지수분포를 따르는지를 검정하는 문제를 다루었다. 우선 위치 모수와 척도 모수가 미지인 경우의 검정에 이용하는 Shapiro-Wilk 통계량과 이의 단점을 보완하여 수정한 Kim (2001a)의 통계량을 고려하였다. Shapiro-Wilk 통계량은 Stephens (1978)에 의해서 위치모수가 주어져 있고 척도모수만 미지인 경우로 수정되었고 Kim (2001a) 의 통계량도 같은 방법으로 수정할 수 있다. 이 통계량들을 전진 제 2종 중도절단자료에 대해서 적용하기 위해서 정규 간격을 이용하여 자료를 변환하였다. 변환된 자료는 귀무가설하에서 역시 지수분포를 따르므로 이 자료에 대해서 위의 통계량을 계산함으로써 검정을 시행할 수 있다.

여러가지 중도절단계획과 대립가설에서 모의실험을 행한 결과 Kim (2001a)의 통계량을 수정한 $\widetilde{N}_S$가 Shapiro-Wilk 통계량을 수정한 Stephens (1978)의 통계량 $W_S$보다 전진 제 2종 중도절단자료에 대해서 고려한 거의 모든 경우에 더 좋은 검정력을 가짐을 볼 수 있었다.

## 참고문헌

김남현 (2008). 중도절단자료에 대한 수정된 Shapiro-Wilk 지수검정, <응용통계연구>, **21**, 1–9.

Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*, Birkhäuser, Boston.

Balakrishnan, N., Ng, H. K. T. and Kannan, N. (2002). A test of exponentiality based on spacings for progressively Type II censored data, In *Goodness-of-Fit Tests and Model Validity*, (Eds., C. Huber-Carol, N. Balakrishnan, M.S. Nikulin and M. Mesbah), Birkhäuser, Boston, 89–111.

Balakrishnan, N. and Sandhu, R. A. (1995). A simple simulational algorithm for generating progressive Type II censored samples, *The American Statistician*, **49**, 229–230.

Cohen, A. C. (1963). Progressively censored samples in life testing, *Technometrics*, **5**, 327–329.

Cohen, A. C. (1966). Life testing and early failure, *Technometrics*, **8**, 539–549.

Kim, N. (2001a). A modification of the W test for exponentiality, *The Korean Communications in Statistics*, **8**, 159–171.

Kim, N. (2001b). The limit distribution of a modified W-test statistic for exponentiality, *The Korean Communications in Statistics*, **8**, 473–481.

Kim, N. (2002). Consistency of a modified W-test for exponentiality, *The Korean Communications in Statistics*, **9**, 629–637.

Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

Shapiro, S. S. (1995). Goodness-of-fit test, In *Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications*, (Eds., N. Balakrishnan and A. P. Basu), Chapter 13, Langhorne, Gordon and Breach, Pennsylvania.

Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1972). An analysis of variance test for the exponential distribution (complete samples), *Technometrics*, **14**, 355–370.

Spinelli, J. J. and Stephens, M. A. (1987). Tests for exponentiality when origin and scale parameters are unknown, *Technometrics*, **29**, 471–476.

Stephens, M. A. (1978). On the W test for exponentiality with origin known, *Technometrics*, **20**, 33–35.

Stephens, M. A. (1986a). Tests based on regression and correlation, In *Goodness-of-fit Techniques* (Eds., R. B. D'Agostino and M. A. Stephens), Chapter 5, Marcel Dekker, New York.

Stephens, M. A. (1986b). Tests for the exponential distribution, In *Goodness-of-fit Techniques* (Eds., R. B. D'Agostino and M. A. Stephens), Chapter 10, Marcel Dekker, New York.

Tiku, M. L. (1980). Goodness of fit statistics based on the spacings of complete or censored samples, *Australian Journal of Statistics*, **22**, 260–275.

Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of parameters of life from progressively censored data, *Technometrics*, **36**, 84–91.

Wang, B. (2008). Goodness-of-fit test for the exponential distribution based on progressively Type II censored sample, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 125–132.

# The Shapiro-Wilk Type Test for Exponentiality Based on Progressively Type II Censored Data

Namhyun Kim[1]

[1]Department of Science, Hongik University

(Received February 2010; accepted May 2010)

**Abstract**

This paper develops a goodness of fit test statistic to test if the progressively Type II censored sample comes from an exponential distribution with origin known. The test is based on normalizing spacings and Stephens (1978)' modified Shapiro and Wilk (1972) test for exponentiality. The modification is for the case where the origin is known. We applied the same modification to Kim (2001a)'s statistic, which is based on the ratio of two asymptotically efficient estimates of scale. The simulation results show that Kim (2001a)'s statistic has higher power than Stephens' modified Shapiro and Wilk statistic for almost all cases.

Keywords: Goodness of fit, exponentiality, Shapiro-Wilk statistic, normalized spacings.

This work was supported by National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government(2009-0072563).

[1]Professor, Department of Science, Hongik University, 72-1 Sangsu-dong, Mapo-gu, Seoul 121-791, Korea. E-mail: nhkim@hongik.ac.kr