

영업용 물류센터 사용하에서 자가 물류센터의 크기 확장계획 모형

장석화[†]

인천대학교 산업경영공학과

Capacity Expansion Planning Model of Private Distribution Center Under Usability of Public Distribution Center

Chang Suk Hwa[†]

Department of Industrial and Management Engineering, University of Incheon

This paper addresses capacity expansion planning model of distribution center under usability of public distribution center. For discrete and finite time periods, demands for distribution center increase dynamically. The capacity expansion planning is to determine the capacity expansion size of private distribution center and usage size of public distribution center for each period through the time periods. The capacity expansion of private distribution center or lease usage of public distribution center must be done to satisfy demand increase for distribution center. The costs are capacity expansion cost and excess capacity holding cost of private distribution center, lease usage cost of public distribution center. Capacity expansion planning of minimizing the total costs is mathematically modelled. The properties of optimal solution are characterized and a dynamic programming algorithm is developed. A numerical example is shown to explain the problem.

Keywords : Capacity Expansion Planning Model, Distribution Center, Dynamic Programming

1. 서 론

물류센터와 대리점들로 이루어진 물류시스템에서 대리점의 제품에 대한 수요량을 물류센터에서 공급할 때 대리점의 물류수요량이 증가하면 물류센터의 공급능력을 증가시키기 위해 물류센터의 공급 크기를 확장하여야 한다. 물류수요량 증가에 맞추어 물류센터의 공급능력에 부족이 발생하지 않도록 자가 물류센터를 확장하거나, 필요시 일부 기간에 대해서 영업용 물류센터를 임대하여 사용하다가 후에 자가 물류센터를 확장할 수

도 있을 것이다. 기업에서 창고시스템 비용과 효율과의 관계에서 연간 시스템 처리량에 따라 처리량이 적으면 영업용 창고, 처리량이 중간이면 임대 창고, 처리량이 많으면 자가 창고를 사용하는 것이 경제적임을 보여주고 있다[2].

이산적인 유한기간에서 시간이 경과함에 따라 물류수요량이 동적으로 증가할 때 제품을 공급하는 물류센터의 공급크기를 적절한 기간에 적절한 크기로 확장하여야 한다. 물류센터 확장은 많은 비용이 발생하는 장기적인 문제이다. 영업용 물류센터의 임대 사용은 사용

기간만 공급능력을 증가시키게 되는 반면 자가 물류센터의 확장은 확장 이후의 기간에도 계속하여 확장된 공급크기를 유지하게 된다. 영업용 물류센터의 사용 가능하에서 자가 물류센터의 확장과 영업용 물류센터의 사용을 비용을 고려하여 경제적으로 정해야 한다. 자가 물류센터의 확장시점과 확장크기, 영업용 물류센터의 사용시점과 사용크기를 구하는 것을 물류센터 확장계획이라 정의할 때 비용을 최소화하는 물류센터의 크기 확장계획을 구해야 한다.

자가 물류센터의 확장과 영업용 물류센터의 사용과 관련하여 여러 가지 비용 요소가 있다. 자가 물류센터의 크기를 확장할 때 매 기간 물류수요량 증가에 맞추어 증가량만큼씩 확장할 수도 있고, 여러 기간의 수요량 증가분을 한 번에 확장할 수도 있다. 자가 물류센터의 크기를 확장할 때마다 확장비용이 발생하고, 물류수요량 증가에 비해 자가 물류센터의 크기를 초과되게 확장하면 사용되지 않는 물류센터의 초과시설에 대해 초과시설유지비용이 발생한다. 자가 물류센터의 크기가 부족하여 영업용 물류센터를 일시적으로 임대하여 사용할 때도 사용하는 영업용 물류센터의 사용크기의 증가 여부와 사용크기에 따른 영업용 물류센터 사용비용이 발생한다.

이산적인 유한기간 동안 물류수요량의 동적 증가에 맞추어 영업용 물류센터의 사용 가능하에서 자가 물류센터의 매 기간 확장크기를 영업용 물류센터의 매 기간 사용크기와 함께 비용을 고려하여 경제적으로 정하는 것이 이 논문의 목적이다.

용량확장 모형은 경영과학에서 긴 역사를 갖고 있다. Freidenfelds[5]과 Luss[8]은 선형의 확정적인 수요로 된 간단한 모형에서부터 확정적 및 확률적 수요를 갖는 두 개의 다른 용량 형태의 상호작용과 같은 복잡한 모형까지 수리적모형의 포괄적인 연구를 하였다. Rajagopalan[15]는 용량이 감소하는 상황에서 용량확장 문제를 연구하였다. Chand et al.[14]는 동일한 여러 설비가 사용되는 상황에서 오래된 설비의 운영비용이 증가할 때 용량확장으로 새로운 설비로 교체하는 문제에 대해 다루었다. Berman and Ganz[4]은 지리적으로 널리 퍼져 있는 서비스 공급자에 대한 용량확장 모형을 연구하였다. 저장될 수 없고, 이동될 수 없는 서비스에 대한 용량을 확장하는데 있어 유일한 면을 지적하였다. Riis and Andersen[10]는 불확실한 수요를 갖는 통신접속에서 다기간 용량확장 문제를 기존 알고리즘에 비해 계산시간을 줄일 수 있는 새로운 규칙을 연구하였다. Gaimon and Ho[6]은 가격을 줄이고 수요를 증가시키기 위해 서비스 공급자를 경쟁시킴으로써 용량확장을 연구하는데 게임이론을 사용하였다. Marin and Jaramillo[9]는 도시의 신속 전달

네트워크 설계에서 다 기간 용량확장 문제를 다루었다. 매 기간에 제한된 예산을 사용하여 라인을 설계할 때 공공 수송수요를 최대화하는 문제를 다루었다. Andre et al.[1]은 가스 수송 네트워크에서 용량확장계획의 최적화 문제를 연구하였는데, 수요를 충족시키기 위해 재강화되어야 할 파이프라인 부분의 최적 위치를 먼저 정하고, 후에 최적 크기를 정하는 방식을 적용하였다.

Wagner and Whitin[12], Zangwill[13], 그리고 Bensoussan et al.[3]은 이산형 유한기간에서 제품의 수요가 기간에 대해 동적으로 발생할 때 생산계획 문제를 모형화 하였고, 최적해의 특성과 해를 구하는 동적계획 알고리즘을 개발하였다. 이산형 유한기간에서 단일설비 확장계획 문제의 간단한 모형은 생산계획 모형에 적용하였던 방법과 유사하게 동적계획 알고리즘을 적용하여 구할 수 있다.

물류수요량 증가에 대비하여 물류센터를 확장할 때 영업용 물류센터를 사용하면서 자가 물류센터를 확장하는 모형에 대한 연구는 지금까지 행해지지 않았다. 따라서 본 연구와 직접 비교 가능한 연구는 발견하기 어려운 상황이다.

물류센터 확장계획 문제를 분석하여 수리적 모형을 세우고, 최적해의 특성을 분석하고, 그리고 동적 알고리즘을 개발하여 확장계획을 구한다. 제 2장에서는 문제를 나타내는 수리적 모형을 나타내고, 제 3장에서는 최적해의 특성과 해를 구하는 알고리즘을 개발하고, 그리고 제 4장에서는 수치적 예제를 통하여 알고리즘을 설명한다.

2. 물류센터 확장계획 모형 정식화

이산적인 유한기간에서 물류수요량이 기간에 대해 동적으로 증가할 때 제품을 공급하는 물류센터는 충분한 공급능력을 갖추기 위해 자가 물류센터를 직접 확장하거나 영업용 물류센터를 임대하여 사용한다. 물류수요량은 창고에서 제품을 보관할 공간의 수와 관련되어 있다. 물류수요량 증가는 창고에서 제품을 보관하는데 필요한 보관공간의 수의 증가를 의미한다. 자가 물류센터를 확장하거나 영업용 물류센터를 임대 사용할 때 비용을 최소화하는 경제적인 확장계획을 구한다. 물류센터의 확장계획은 주어진 계획기간 동안에 매 기간 자가 물류센터의 확장크기와 영업용 물류센터의 사용크기를 구하는 것이다.

물류센터의 시설을 확장할 때 발생하는 비용으로 확장크기와 관계없는 확장고정비용과 확장크기에 따른 확장가변비용이 있다. 또한 자가 물류센터의 확장크기가

수요 증가량보다 클 경우에 초과시설유지비용이 있다. 영업용 물류센터를 사용할 때 발생하는 비용으로 시설크기가 이전 기간에 비해 증가할 경우 사용고정비용과 사용크기에 따른 사용가변비용이 있다.

이산적인 유한기간동안 물류수요량 증가에 대비하여 자가 물류센터의 공급크기를 확장할 때 물류센터의 시설확장비용과 초과시설유지비용, 영업용 물류센터를 사용할 때 물류센터의 사용비용 등의 합을 최소화하도록 매 기간 자가 물류센터의 확장크기와 영업용 물류센터의 사용크기를 결정한다. 가정과 부호를 정의하고 수리적 모형을 나타낸다.

2.1 가정과 부호

- 1) 이산적인 유한기간에서 기간에 대해 물류수요량 증가는 동적으로 발생하고, 확정적으로 알려져 있다. 매 기간 물류수요량 증가는 직전 기간에 비해 증가한 수요량을 의미한다.
- 2) 자가 물류센터의 확장크기와 영업용 물류센터의 사용크기에 대해 제한이 없다.
- 3) 자가 물류센터의 공급능력은 이전 공급크기에 확장된 공급크기가 더해진 것으로 한다.
- 4) 영업용 물류센터의 고정비용은 물류센터 사용크기가 직전 기간에 비해 증가한 경우에만 발생한다. 동일하거나 감소한 경우는 발생하지 않는다.
- 5) 자가 물류센터와 영업용 물류센터의 위치에 따른 영향은 고려하지 않는다.
- 6) 계획기간 말에 자가 물류센터의 시설 초과크기와 시설 부족크기는 0이다.
- 7) 매 기간 자가 물류센터와 영업용 물류센터의 공급크기의 합은 수요량에 대해 부족하지 않다.

- i = 대리점을 나타내는 첨자
- N = 대리점의 수
- t = 기간을 나타내는 첨자
- T = 계획기간
- K_t = 기간 t 에서 자가 물류센터 시설 확장고정비용
- c_t = 기간 t 에서 자가 물류센터 단위당 확장가변비용
- h_t = 기간 t 에서 자가 물류센터 단위당 초과시설유지비용
- S_t = 기간 t 에서 영업용 물류센터 사용 크기 증가시 고정비용
- e_t = 기간 t 에서 영업용 물류센터 단위당 사용비용
- L_t^+ = 기간 t 말에서 자가 물류센터의 시설 초과크기
- L_t^- = 기간 t 말에서 자가 물류센터의 시설 부족크기

- r_t = 기간 t 에서 물류수요량 증가치
- x_t = 기간 t 에서 자가 물류센터의 시설 확장크기
- y_t = 기간 t 에서 영업용 물류센터 시설 사용크기

$$\delta_t(x_t) = \begin{cases} 1, & x_t > 0, \\ 0, & x_t \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_t(y_t - y_{t-1}) = \begin{cases} 1, & y_t - y_{t-1} > 0, \\ 0, & y_t - y_{t-1} \leq 0 \end{cases}$$

2.2 수리적 모형화

물류센터의 시설 확장계획의 수리적 모형을 구한다. 먼저 자가 물류센터 확장비용, 자가 물류센터 초과시설유지비용과 영업용 물류센터 사용비용 등으로 이루어진 목적함수를 구한다.

자가 물류센터 확장비용은 확장크기에 관계없이 고정으로 발생하는 확장고정비용과 확장크기에 비례하는 확장가변비용의 합이다. 자가 물류센터 초과시설유지비용은 고정비용을 줄이기 위해 미래의 물류수요량 증가를 고려하여 미리 물류센터를 확장할 경우에 일부 기간에서 필요한 물류센터 크기보다 큰 크기로 물류센터를 확장하여 유지할 경우에 발생한다. 영업용 물류센터 사용비용은 영업용 물류센터를 사용할 경우에 발생한다. 영업용 물류센터 사용비용은 직전 기간에 비해 현 기간에 물류센터 사용크기가 증가하면 고정비용에 사용크기에 비례하는 가변비용의 합으로 표현된다. 사용하는 영업용 물류센터의 시설크기 증가로 인해 고정비용이 발생할 경우에 고정비용을 줄이기 위해 미래 기간에 필요한 물류센터의 크기를 현재 기간부터 계속하여 유지할 경우에 영업용 물류센터의 사용크기에 있어서 일부 기간에 필요한 영업용 물류센터 크기보다 큰 물류센터의 크기를 사용하게 되어 영업용 물류센터의 사용비용이 증가한다.

목적함수는 이산적인 유한기간 T 동안 자가 물류센터 확장비용, 자가 물류센터 초과시설유지비용과 영업용 물류센터 사용비용 등의 합으로 다음 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\sum_{t=1}^T (K_t \delta_t(x_t) + c_t x_t) + \sum_{t=1}^T h_t L_t^+ + \sum_{t=1}^T (S_t \beta_t(y_t - y_{t-1}) + e_t y_t) \quad (1)$$

식 (1)에서 첫 번째 항은 자가 물류센터의 확장비용이고, 두 번째 항은 자가 물류센터의 초과시설유지비용이고, 그리고 세 번째 항은 영업용 물류센터의 사용비용이다.

문제의 가정과 관련하여 제약식을 구한다. 매 기간 초와 말에 자가 물류센터 시설의 초과크기 및 부족크기, 시설 확장크기 및 물류수요 증가량 등의 관계를 나타내는 제약식으로 다음의 식 (2)과 같이 표현된다. $I_t^+ > 0$ 이고, $I_t^- = 0$ 이면, 자가 물류센터 시설이 양의 초과크기인 상태를 의미하고, $I_t^+ = 0$ 이고, $I_t^- > 0$ 이면, 자가 물류센터의 시설이 수요량 증가에 비해 부족한 상태로 영업용 물류센터 사용이 필요할 수 있다.

$$I_t^+ - I_t^- = I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- + x_t - r_t, \forall t \quad (2)$$

영업용 물류센터를 사용할 경우에는 사용크기와 필요량과의 관계에 대한 제약식이 필요하고, 다음의 식 (3)과 같이 표현된다.

$$y_t - I_t^- \geq 0, \forall t \quad (3)$$

마지막 기간에서 자가 물류센터의 시설 초과크기와 부족크기가 0이 되기 위해서는 주어진 계획기간 동안 확장한 물류센터의 공급크기는 수요량의 증가량과 일치하여야 하고, 다음의 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\sum_{t=1}^T x_t = \sum_{t=1}^T r_t \quad (4)$$

매 기간 자가 물류센터의 확장크기와 영업용 물류센터의 사용크기는 비음이며, 또한 자가 물류센터 시설의 초과크기와 부족크기도 비음이다.

이산적인 유한기간 동안에 물류센터에 대한 물류수요량 증가에 대비하여 자가 물류센터 확장비용, 자가 물류센터 초과시설유지비용과 영업용 물류센터 사용비용의 합을 최소화 하는 매 기간 자가 물류센터의 확장크기(x_t)와 영업용 물류센터 사용크기(y_t)을 구하는 수리적 모형은 P1과 같다.

$$\begin{aligned} \text{P1 : Minimize } Z = & \sum_{t=1}^T (K_f \delta_t(x_t) + c_t x_t + h_t I_t^+) \\ & + \sum_{t=1}^T (S_t \beta_t (y_t - y_{t-1}) + e_t y_t) \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned} I_{t-1}^+ - I_{t-1}^- - I_t^+ + I_t^- + x_t &= r_t, \forall t \\ y_t - I_t^- &\geq 0, \forall t \\ \sum_{t=1}^T x_t &= \sum_{t=1}^T r_t \\ x_t &\geq 0, \forall t \\ y_t &\geq 0, \forall t \\ I_t^+, I_t^- &\geq 0, \forall t \end{aligned}$$

$$I_0^+ = I_0^- = 0$$

$$y_0 = 0$$

수리적 모형 P1은 일부 변수의 값이 정수를 허용하는 선형정수계획모형이다. 모형에서 변수의 수는 $6T$ 이고, 제약식의 수는 $2T+1$ 개다. 다음 장에서는 수리적 모형의 해를 구하기 위한 해의 특성을 분석하고, 동적 계획 알고리즘을 개발한다.

3. 최적해의 특성 및 알고리즘

3.1 최적해의 특성

해를 구하는 알고리즘에 필요한 최적해의 특성을 설명한다. 최적해의 특성을 해를 구하는 알고리즘에 적용하여 해를 효율적으로 구할 수 있을 것이다.

정리 1 : 기간 $t(t=1, 2, \dots, T)$ 에서 자가 물류센터의 기초 시설 초과크기, I_{t-1}^+ 와 자가 물류센터의 확장크기, x_t , 영업용 물류센터의 사용크기, y_t , 사이의 관계는 다음 식 (5)을 만족하여야 한다.

$$I_{t-1}^+ (x_t + y_t) = 0, \forall t \quad (5)$$

증명 : $I_{t-1}^+ (x_t + y_t) > 0$ 을 만족한다고 가정하자. 그러면 0보다 큰 x_t 또는 y_t 에 시설 초과크기 I_{t-1}^+ 을 포함시켜 시설 초과크기를 줄여 자가 물류센터의 초과시설유지비용을 줄이거나, 아니면 $x_t = 0$ 와 y_{t-1} 이 되도록 시설 초과크기 I_{t-1}^+ 을 증가시켜 기간 t 에서 확장비용 또는 사용비용을 줄일 수 있다. ■

정리 1은 매 기간 물류센터의 양의 기초 시설 초과크기와 자가 물류센터의 확장 또는 영업용 물류센터의 사용 등이 동시에 발생하지 않음을 의미한다. 기간 t 이전에 확장하여 양의 시설 초과크기로 하여 기간 t 의 수요량을 충분히 충족시키거나, 또는 시설 초과크기를 0으로 하고 기간 t 에 자가 물류센터를 확장하거나 영업용 물류센터를 사용하는 것이 최적 확장계획임을 의미한다.

정리 2 : 기간 $t(t=1, 2, \dots, T)$ 에 자가 물류센터의 확장과 영업용 물류센터의 사용이 동시에 발생하지 않는다. 즉 다음 식 (6)의 관계가 성립한다.

$$x_t y_t = 0 \quad (6)$$

증명 : $x_t = \theta_1 > 0, y_t = \theta_2 > 0$ 이라 하자. $\epsilon = \min(\theta_1, \theta_2)$ 로 정의하고, 새로운 두 확장계획 $x_{1t} = \theta + \epsilon, y_{1t} = \theta - \epsilon$ 과 $x_{2t} = \theta - \epsilon, y_{2t} = \theta + \epsilon$ 로 정의할 때, 세 확장계획 $(x_t, y_t), (x_{1t}, y_{1t}), (x_{2t}, y_{2t})$ 사이의 비용을 비교한다. $Z(x_t, y_t)$ 을 자가 물류센터의 확장크기 x_t 와 영업용 물류센터 사용크기 y_t 일 때 비용함수라 할 때 이는 고정비용에 선형으로 증가하는 concave 목적함수이다. 따라서 $Z(x_t, y_t) > \min[Z(x_{1t}, y_{1t}), Z(x_{2t}, y_{2t})]$ 의 관계가 성립한다. ■

정리 2에서 매 기간 자가 물류센터의 확장과 영업용 물류센터의 사용이 동시에 발생하지 않는다. 즉, $x_t y_t = 0$ 이 됨을 의미하는 것으로 매 기간 자가 물류센터 확장과 영업용 물류센터 사용 중에서 최대 하나만 발생함을 의미한다.

$I_u^+ = I_u^- = 0, I_t^+ + I_t^- \neq 0, t = u+1, \dots, v-1, I_v^+ = I_v^- = 0$ 을 만족하는 시점 u, v 을 인접한 두 제로초과점으로 정의한다. 기간 u, v 가 인접한 두 제로초과점일 때 기간 $u+1, \dots, v$ 동안 물류센터 확장계획은 정리 3의 확장계획에 의해 식 (7)과 같이 정의한다.

$$S_{uv} = [x_s = \sum_{t=u+1}^v r_t, s \in u+1, \dots, v \text{ and } x_t = 0, t = u+1, \dots, v, t \neq s] \quad (7)$$

$y_m - I_m^- = 0, y_t - I_t^- > 0, t = m+1, \dots, n-1, y_n - I_n^- = 0$ 을 만족하는 시점 m, n 을 영업용 물류센터 사용에 대한 인접한 두 제로점으로 정의한다. 인접한 두 제로초과점 u, v 에서 기간 $m, n (u \leq m < n \leq v)$ 이 인접한 두 제로점이면 기간 $m+1, \dots, n$ 동안 영업용 물류센터 사용계획은 다음 식 (8)과 같이 정의한다.

$$S'_{min} = [y_t = \sum_{i=u+1}^n r_i = t = m+1, \dots, n] \quad (8)$$

정리 3 : 기간 u, v 가 인접한 두 제로초과점이면, 기간 $u+1$ 부터 u 까지 자가 물류센터의 최적 확장은 확장계획 S_{uv} 을 따른다.

증명 : 자가 물류센터 확장계획 S_{uv} 을 따르지 않는 경우를 생각한다. S_{uv} 을 따르지 않는 경우로, 기간 s 에서 자가 물류센터의 확장크기가 $x_s' = x_s - \epsilon$ 이면, 적어도 하나의 기간 $t \in s, \dots, v$ 에서 자가 물

류센터의 시설이 부족한 $I_t^+ = 0, I_t^- > 0, y_t > 0$ 으로 $x_s' y_s > 0$ 이 되어 정리 2에 의해 최적해가 될 수 없고, $x_s'' = x_s + \epsilon$ 이면, 기간 $t = s, \dots, v$ 에서 물류센터의 시설이 양의 초과인 $I_t^+ > 0$ 으로 $I_s^+ > 0, x_s'' > 0$ 이 되어 정리 1에 의해 최적해가 될 수 없다. 따라서 정리가 증명되었다. ■

정리 3은 인접한 두 제로초과점 u, v 에 대해 기간 $u+1, \dots, v$ 중에서 단 한 번의 확장만이 발생하는 것이 최적 확장계획임을 보여준다. 확장점이 s 라면, $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 의 허용범위에서 모든 s 에 대해 비용을 구해 최소화하는 시점을 찾는다.

정리 4 : 기간 m, n 가 인접한 두 제로점이면, 기간 $m+1$ 부터 n 까지 영업용 물류센터의 최적 사용은 사용계획 S_{mn}' 을 따른다.

증명 : S_{mn}' 을 따르지 않을 경우로, 기간 $k \in \{m+1, \dots, n\}$ 에서 영업용 물류센터의 사용크기가 $y_k' = y_k - \epsilon$ 이면, 적어도 하나의 기간 $w \in \{k+1, \dots, n\}$ 에서 영업용 물류센터 사용크기 증가로 고정비용이 발생한다. 고정비용이 발생할 경우는 영업용 물류센터의 사용 비용을 줄이기 $y_k' = \sum_{l=u+1}^k r_l$ 로 하면, $y_k = I_k^-$ 가 되어 기간 m, k 가 인접한 두 제로점이 된다. $y_k'' = y_k + \epsilon$ 이면, 기간 k 에서 추가로 고정비용이 발생한다. 따라서 정리가 증명되었다. ■

인접한 두 제로초과점 u, v 에서 물류센터 확장계획이 기간 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 에서 자가 물류센터의 확장이 이루어질 경우에 확장크기는 식 (7)을 따르고, 기간 $u+1, \dots, s-1$ 에서 영업용 물류센터의 사용계획은 식 (8)을 따른다. 인접한 두 제로초과점 u, v 에서 가능한 자가 물류센터의 확장시점을 $u+1, \dots, v$ 중에서 어느 시점으로 하느냐에 따라 자가 물류센터 확장에 따른 비용과 영업용 물류센터의 사용비용이 결정된다.

영업용 물류센터 이용시 물류센터 사용크기가 증가시 발생하는 고정비용 $S_t (t=1, 2, \dots, T)$ 에 대해 $S_t > 0$ 와 $S_t = 0$ 일 경우로 나누어 생각한다. $S_t > 0$ 일 경우는 인접한 두 초과제로점이 u, v 이고, 자가 물류센터의 확장시점이 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 이면, 기간 $u+1, \dots, s-1$ 에 대해서는 영업용 물류센터 확장계획 식 (8)을 따른다. $S_t = 0$ 일 경우는 기간에 대해 영업용 물류센터 사용크기의 증가에 관계없이 사용크기에 비례하여 비용이 발생한다. 이는 매 기간 사용할 영업용 물류센터의 크기는 자가 물류센터의 부족크기에 해당하는 것으로 $y_t = I_t^-$ 이다.

인접한 두 초과제로점이 u, v 이고, 자가 물류센터의 확장시점이 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 이고, $S_t = 0$ 일 경우에 기간 $u+1, \dots, s-1$ 에서 영업용 물류센터의 사용크기는 다음 식 (9)과 같다.

$$y_t = \sum_{l=u+1}^t r_l, \quad t = u+1, \dots, s-1 \quad (9)$$

식 (9)은 기간에 대해 영업용 물류센터의 사용크기의 변화에 대해 고정비용이 발생하지 않으면 매 기간 영업용 물류센터 사용크기는 자가 물류센터의 부족크기와 일치함을 보여준다. 따라서 $S_t = 0, \forall t$ 일 경우에 영업용 물류센터의 시설 초과크기는 항상 0이 된다.

3.2 알고리즘

인접한 두 제로초과점 u, v 에서 기간 $u+1, \dots, v$ 동안 자가 물류센터의 확장에 따른 비용과 영업용 물류센터 사용에 따른 비용을 구한다. 기간 u, v 가 제로초과점이고, 기간 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 에서 자가 물류센터가 확장될 때 기간 $u+1, \dots, v$ 동안에 자가 물류센터의 확장비용과 초과시설유지비용의 합, $Z_{uv}(s)$ 는 정리 3의 물류센터 사용계획에 의해 다음 식 (10)과 같다.

$$Z_{uv}(s) = K_s + c_s \sum_{t=u+1}^v r_t + \sum_{t=s}^v h_t \left(\sum_{l=u+1}^v r_l - \sum_{l=u+1}^t r_l \right) \quad (10)$$

인접한 두 제로초과점 u, v 에서 자가 물류센터의 확장시점이 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 일 때 기간 $u+1, \dots, s-1$ 동안 영업용 물류센터의 사용이 필요하고, 영업용 물류센터의 사용과 관련하여 사용크기 증가시 고정비용과 사용가변비용의 합의 최소값을 구한다. 인접한 두 제로점 $m, n (u \leq m < n \leq s-1)$ 에서 기간 $m+1, \dots, n$ 동안 사용하는 영업용 물류센터의 크기는 동일하고, 영업용 물류센터 사용과 관련한 비용을 $Z_{mn}(u)$ 이라 하면 비용은 식 (11)과 같다.

$$Z_{mn}(u) = S_{m+1} + \sum_{t=m+1}^n e_t \sum_{l=u+1}^n r_l \quad (11)$$

기간 $u+1, \dots, s-1$ 에서 영업용 물류센터를 사용할 때, 기간 $u+1$ 부터 기간 $t (t = u+1, \dots, s-1)$ 까지 영업용 물류센터의 사용과 관련한 누적 최소비용을 $F2_t(u)$ 라 하면 $F2_t(u)$ 는 $Z_{mn}(u)$ 을 이용하여 다음 식 (12)의 순

환관계식으로 구할 수 있다.

$$F2_t(u) = \min_{u \leq m < t-1} \{ Z_{mt}(u) + F2_m(u) \}, \quad t = u+1, \dots, s-1 \quad (12)$$

$$F2_u(u) = 0$$

기간 $u+1, \dots, s-1$ 에서 영업용 물류센터를 사용할 때 영업용 물류센터의 사용과 관련한 누적 최소비용은 $F2_{s-1}(u)$ 가 된다. 인접한 두 제로초과점 u, v 에 기간 s 에서 자가 물류센터를 확장하면, 자가 물류센터 확장에 따른 비용, $Z_{uv}(s)$ 과 영업용 물류센터의 사용에 따른 비용 $F2_{s-1}(u)$ 의 합, $Z_{uv}(s)$ 은 다음 식 (13)과 같다.

$$Z_{uv}(s) = Z_{uv}(s) + F2_{s-1}(u) \quad (13)$$

인접한 두 제로초과점 u, v 에 자가 물류센터의 확장시점이 $s (u+1 \leq s \leq v)$ 일 때, 확장계획에 대한 비용 $Z_{uv}(s) (0 \leq u < s \leq v \leq T)$ 을 구하는 방식으로 가능한 범위의 모든 u, v, s 에 대해 확장계획에 대한 비용을 구한다. F_t 는 기간 $1, 2, \dots, t$ 동안 최소비용을 갖는 확장계획 비용을 나타낸다. 구한 $Z_{ut}(s)$ 을 동적계획의 순환관계식에 적용하여 다단계로 F_t 와 해를 구한다[7, 11]. 식 (14)은 동적계획으로 해를 구하는 순환관계식을 나타낸다.

$$F_t = \min_{0 \leq u < t-1, u+1 \leq s \leq t} \{ Z_{ut}(s) + F_u \}, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (14)$$

$$F_0 = 0$$

계획기간 T 동안 최소 한 기간에서 자가 물류센터의 확장이 필요하므로 확장 가능한 모든 경우의 수는 2^{T-1} 이 된다. 그러나 식 (12)와 식 (14)에서 알고리즘의 계산량은 기간의 길이 T 에 대한 함수로 정의할 때 함수 $T(T+1)(T+2)$ 에 비례한다.

물류수요량 증가에 대비하여 자가 물류센터를 확장하고 영업용 물류센터를 사용하는 문제에 대한 최적해를 구하는 절차는 다음과 같다.

- 1) $K_t, c_t, h_t, S_t, e_t, \forall t; T$ 의 값을 준다.
- 2) $F_0 = 0, F2_t(t) = 0, \forall t$ 놓는다.
- 3) $u = 0, m = 0, n = 1$ 놓는다.
- 4) $Z_{mn}(u) = S_{m+1} + \sum_{t=m+1}^n e_t \sum_{l=u+1}^n r_l$ 을 계산한다.
- 5) $m = m+1$ 으로 놓고, $m < n$ 이면 4)로 가고, $m \geq n$ 이면 다음으로 간다.
- 6) $F2_{mn}(u) = \min_{u \leq k < n-1} \{ Z_{kn}(u) + F2_k(u) \}$ 을 계산한다.
- 7) $n < T$ 이면 $m = 0, n = n+1$ 로 놓고 4)로 가고,

- $n \geq T$ 이면 $u = u + 1$ 로 놓고 다음으로 간다.
- 8) $u < T$ 이면 $m = u, n = m + 1$ 로 놓고 4)로 가고, $u \geq T$ 이면 다음으로 간다.
- 9) $u = 0, v = 1$ 로 놓는다.
- 10) $s = u + 1$ 로 놓는다.
- 11) $Z_{uv}(s) = K_s + c_s \sum_{t=u+1}^v r_t + \sum_{t=s}^v ht(\sum_{l=u+1}^v r_l - \sum_{l=u+1}^t r_l)$ 을 계산한다.
- 12) $u = s - 1$ 이면 $Z_{uv}(s) = Z_{uv}(s)$ 로 하고, $u < s - 1$ 이면 $Z_{uv}(s) = Z_{uv}(s) + F2_{s-1}(u)$ 로 한다.
- 13) $s = s + 1$ 로 놓고, $s \leq v$ 이면 11)로 가고, $s > v$ 이면 다음으로 간다.
- 14) $u = u + 1$ 로 놓고, $u < v$ 이면 10)으로 가고, $u \geq v$ 이면 다음으로 간다.
- 15) $F_v = \min_{0 \leq l \leq v-1, l+1 \leq s \leq v} \{Z_v(s) + F_l\}$ 을 구한다.
- 16) $v < T$ 이면 $v = v + 1, u = 0$ 로 놓고 10)으로 가고, $v < T$ 이면 다음으로 간다.
- 17) F_T 에서 구해진 값이 최소비용이고, 이 비용에 해당하는 해를 동적계획에서 backward 절차로 찾는다. 이 해가 최적 확장계획이 된다.

4. 수치적 예제

5-기간 동안 물류수요의 증가량이 <표 1>과 같을 때 물류센터의 확장계획 문제를 생각한다. 기간을 년으로 한다. <표 1>에서 수요량 증가량은 2번째 열에 있고, 자가 물류센터 확장비용의 고정비용과 단위당 가변비용은 3번째 열과 4번째 열에 있고, 자가 물류센터의 초과 시설유지비용은 5번째 열에 있다. <표 1>에서 영업용 물류센터의 사용크기 증가시 고정비용, 사용가변비용은 6번째 열, 7번째 열에 있다. <표 1>에서 수요 증가량은 보관공간의 수의 증가치를 의미하고, 비용의 단위는 원을 의미한다.

<표 1> 수요 증가량 및 비용요소

년	수요 증가량	자가 물류센터			영업용 물류센터	
		확장 고정비용	확장 가변비용	초과시설 유지비용	사용크기 증가 고정비용	사용 가변비용
1	70	1100	20	20	350	10
2	30	1100	22	20	350	10
3	50	1250	23	20	350	10
4	20	1100	22	20	400	10
5	60	1000	20	20	400	10

<표 2> 영업용 물류센터 사용에 대한 $F2_t(u)$

u	t m	$Z_{mt} + F2_m(u)$					
		1	2	3	4	5	
0	0	1050	2350	4850	7150	11850	
	1		2400	4400	6500	10600	
	2			4200	6100	9600	
	3				6300	9200	
	4					8800	
	$F2_t(0)$	1050	2350	4200	6100	8800	
	$t(m^*)$	0	0	2	2	4	
1	1		650	1950	3350	6750	
	2			1800	3000	5800	
	3				3150	5350	
	4					5000	
	$F2_t(1)$		650	1800	3000	5000	
	$t(m^*)$		1	2	2	4	
2	2			850	1750	4250	
	3				1950	3850	
	4					3450	
	$F2_t(2)$			850	1750	3450	
	$t(m^*)$			2	2	4	
3	3				600	2000	
	4					1800	
		$F2_t(3)$				600	1800
	$t(m^*)$				3	4	
4	4					1000	
		$F2_t(4)$					1000
	$t(m^*)$					4	

$y_m - I_m = 0, y_t - I_t > 0, t = m + 1, \dots, n - 1, y_n - I_n = 0$ 을 만족하는 두 제로점 n, m 을 가정하고, 기간 $m + 1, \dots, n$ 동안 영업용 물류센터의 사용계획과 관련한 비용

<표 3> 자가 물류센터 확장에 대한 $Z_{uv}(s)$ 의 값

이전 제로초과점 u	확장점 s	이후 제로초과점, v				
		1	2	3	4	5
0	1	2500	3700	6700	8300	14300
	2		3300	5400	6640	11100
	3			4700	5560	9340
	4				4840	7360
	5					5600
1	2		1760	3860	5100	10020
	3			3090	3950	7730
	4				3300	5820
	5					4200
2	3			2400	3260	7040
	4				2640	5160
	5					3600
3	4				1540	4060
	5					2600
4	5					2200

<표 4> Z_{uv} 의 값

		v				
u	s	1	2	3	4	5
0	1	2500	3700	6700	8300	14300
	2		4350	6450	7690	12150
	3			7050	7910	11690
	4				9040	11560
	5					11700
	Z_{uv}		2500	3700	6450	7690
1	2		1760	3860	5100	10020
	3			3740	4600	8380
	4				5100	7620
	5					7200
	Z_{uv}			1760	3740	4600
2	3			2400	3260	7040
	4				3490	6010
	5					5350
	Z_{uv}				2400	3260
3	4				1540	4060
	5					3200
	Z_{uv}					1540
4	5					2200
	Z_{uv}					

<표 5> F_v 의 값

		v				
u	s	1	2	3	4	5
0	1	2500	3700	6700	8300	14300
	2		4350	6450	7690	12150
	3			7050	7910	11690
	4				9040	11560
	5					11700
1	2		4260	6360	7600	12520
	3			6240	7100	10880
	4				7600	10120
	5					9700
2	3			6100	6960	10740
	4				7190	9710
	5					9050
3	4				7640	11060
	5					9300
4	5					9160
F_v		2500	3700	6100	6960	9050
$v(u^*s^*)$		u=0 s=1	u=0 s=1	u=2 s=3	u=2 s=3	u=2 s=5

$Z_{mm}(u)$ 을 구하고, 기간 $m+1$ 부터 $t(t=m+1, \dots, n)$ 까지 영업용 물류센터 사용과 관련된 최소비용 $F2_t(u)$ 은 식 (12)의 순환관계식을 적용하여 구하면 <표 2>와 같다.

$I_u^+ = I_u^- = 0, I_t^+ + I_t^- \neq 0, t = u+1, \dots, v-1, I_v^+ = I_v^- = 0$ 을 만족하는 제로초과점 u, v 에 대해 자가 물류센터의 확장시점이 $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 이고, 인접한 두 제로초과점 u, v

에 대해 기간 자가 물류센터 확장계획을 따르면, 기간 $u+1, \dots, v$ 동안 확장고정비용, 확장가변비용고 초과시설 유지비용의 합은 $Z_{uv}(s)$ 로 <표 3>과 같다. $s \in \{u+1, \dots, v\}$ 에서 자가 물류센터를 확장하면, 자가 물류센터 확장에 따른 비용, $Z_{uv}(s)$ 과 영업용 물류센터의 사용에 따른 비용 $F2_{s-1}(u)$ 의 합, $Z_{uv}(s)$ 는 <표 4>와 같다.

<표 4>의 $Z_{uv}(s)$ 을 이용하여 기간 1부터 v 까지 총 최소비용 F_v 을 구한다. 식 (14)을 적용하여 동적계획 순환 관계식으로 비용을 구하면, 기간 1부터 $v(v=1, 2, 3, 4, 5)$ 까지 자가 물류센터 확장비용, 초과시설유지비용과 영업용 물류센터 사용비용의 합의 최소비용 F_v 는 <표 5>와 같다.

<표 5>에서 최소비용은 $F_5 = 9,050$ 이다. 이 비용은 자가 물류센터의 확장이 기간 0에서 2까지와 2까지의 5까지 두 개의 확장계획으로 나누어 이루어진다. 기간 3, 4, 5 동안의 물류 수요 증가량을 위해서는 자가 물류센터의 확장은 기간 5에서 하고, 기간 3, 4에는 영업용 물류센터 사용함을 의미한다. 기간 5에서 자가 물류센터의 확장크기는 130이고, <표 2>에서 기간 3, 4에서 영업용 물류센터의 사용크기를 동일하게 70이다. 기간 1, 2에 대해서는 기간 1에서 자가 물류센터를 확장하고, 확장크기는 기간 1, 2의 수요증가량 100에 해당한다. 문제의 최적해를 정리하면, $x_1 = 100, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0$ 이고, 최소비용은 9,050이다.

5. 결 론

본 연구에서는 이산적인 유한기간에서 기간에 대해 물류센터에 대한 수요량이 기간에 동적으로 증가할 때 제품을 공급하는 물류센터의 확장계획문제를 다루었다. 필요에 따라 영업용 물류센터의 사용이 가능한 상황에서 자가 물류센터의 확장시점과 확장크기를 구하였다. 또한 영업용 물류센터의 사용시점과 사용크기도 함께 정하였다. 비용으로는 자가 물류센터의 확장비용, 자가 물류센터 초과시설유지비용과 영업물류센터의 사용비용 등을 고려하였고, 이들 비용의 합을 최소화하는 확장계획을 구하는 수리적 모형을 나타내었고, 최적해의 특성을 분석하고, 그리고 동적계획 알고리즘을 개발하였다.

물류센터 확장계획 문제에서 최적해가 갖는 해의 특성을 분석하였고, 최적해의 특성을 바탕으로 한 최적해 알고리즘을 개발하였다. 본 연구의 최적해 알고리즘은 최적해를 구할 수 있다는 점에서 높게 평가될 수 있을 것이다. 후에 동적계획에 바탕을 두지 않으면서 본 알고

리듬보다 효율적으로 빨리 구할 수 있는 알고리즘의 개발에 대한 연구가 필요할 수 있을 것이다. 또한 자가 물류센터 확장크기와 영업용 물류센터의 사용크기에 제한이 있는 경우에 필요에 따라 영업용 물류센터의 사용이 가능한 상황에서 자가 물류센터의 확장계획과 영업용 물류센터의 사용계획 문제를 추후에 연구할 필요가 있다.

참고문헌

- [1] Andre, J., Bonnans, F., and Cornibert, L.; "Optimization of capacity expansion planning for gas transportation networks," *European J. of Operational Research*, 197 : 1019-1027, 2009.
- [2] Ballow, R. H.; *Business Logistics Management*, Prentice-Hall, New Jersey, 1998.
- [3] Bensoussan, A., Crouchy, M., and Proth, J. M.; *Mathematical theory of production planning*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [4] Berman, O. and Ganz, Z.; "The capacity expansion problem in service industry," *Computers and Operations Research*, 21(5) : 557-572, 1994.
- [5] Freidenfelds J.; *Capacity expansion : analysis of simple models with applications*, New York, North-Holland, 1981.
- [6] Gaiman, O. and Ho, J. C.; "Uncertainty and acquisition of capacity : a competitive analysis," *Computers and Operations Research*, 21(10) : 1073-1088, 1994.
- [7] Johnson, L. A. and Montgomery, D. C.; *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*, John Wiley and Sons. Inc., New York, 1974.
- [8] Luss, H.; "Operations research and capacity expansion problems : a survey," *Operations Research*, 30(5) : 907-047, 1982.
- [9] Marin, A. and Jaramillo, P.; "Urban rapid transit network capacity expansion," *European J. of Operational Research*, 191 : 45-60, 2008.
- [10] Riis, M. and Andersen, K. A.; "Multiperiod capacity expansion of a telecommunication connection with uncertain demand," *Computers and Operations Research*, 31 : 1427-1436, 2004.
- [11] Taha, H. A.; *Operations Research 6th edition*, Prentice-Hall, International, Inc, 1997.
- [12] Wagner, H. M. and Whitin, T. M.; "Dynamic version of the economic lot size model," *Management Science*, 5 : 89-96, 1958.
- [13] Zangwill, W. I.; "A deterministic multi-period production scheduling model with backlogging," *Management Science*, 13 : 105-119, 1966.
- [14] Chand, S., McClurg, T. and Ward, J. (2000), "A model for parallel machine replacement with capacity expansion," *European J. of Operational Research*, 121, 519-531.
- [15] Rajagopalan, S.; "Deterministic capacity expansion under deterioration," *Management Science*, 38 : 525-535, 1992.