

토크 변동에 의한 백래시를 가진 헬리컬 기어의 비선형 동적 해석 Nonlinear Dynamic Analysis of Helical Gears with Backlash by Torque Fluctuation

박 찬 일*
Chan IL Park

(2010년 5월 28일 접수 ; 2010년 7월 5일 심사완료)

Key Words : Helical Gear(헬리컬 기어), Backlash(백래시), Nonlinear Dynamics(비선형 동역학), Torque Fluctuation (토크 변동)

ABSTRACT

Backlashes of gears provide gears for good lubrication and for removal of the interference between teeth by the wear and manufacturing errors. The backlash is the strong nonlinear factor to gears. This study deals with nonlinear modeling of helical gears with backlash. Excitation of helical gears comes from torque variation, the tooth surface error, and the periodical change of mesh stiffness. To study the effect of torque fluctuation, equation of motion for the single degree of freedom torsional model of helical gears with the periodical change of mesh stiffness and the backlash was derived. The Newmark beta method and the Newton-Raphson method were used to obtain the nonlinear behaviors of mesh forces of helical gears. All excitation frequencies initially caused the tooth separation and single-sided impacts of the gear pair and eventually led to the normal tooth contact. However, some special excitation frequencies caused the single-sided impacts in the entire time as well as the initial time. Damping increase reduced the duration of single-sided impacts, and the backlash increase caused those in the entire time domain.

기 호 설 명

$2b$: 백래시(치직각)
 c : 감쇠
 F : 힘
 J : 질량 관성모멘트
 k : 치의 강성(치직각)
 m : 질량

T : 토크
 t : 시간
 R_b : 기초원 반경
 z : 잇수
 β_b : 기초원 나선각
 δ : 치의 변형
 θ : 비틀림 탄성 회전변위
 ω : 회전 각속도
 ϕ : 위상

* 교신저자 ; 정회원, 강릉원주대학교 기계자동차공학부
E-mail : pci@gwnu.ac.kr
Tel : (033)640-2392, Fax : (033)640-2244

아래첨자
1 : 구동기어
2 : 피동기어

이 논문 일부는 2010년 춘계 소음진동 학술대회에서 발표되었음.

1. 서 론

이 연구는 백래시를 가진 헬리컬 기어의 비선형 모델링을 다룬다. 기어의 백래시는 윤환을 원활하게 하고 제작오차나 마모 등에 의한 간섭을 제거하기 위해 설계시 부여되어야 한다. 그러나 백래시는 무부하상태나 가벼운 하중에서 치의 분리와 충격을 발생시켜 불유쾌한 기어 진동과 소음을 발생시키고 기어계의 수명에 영향을 준다. 이러한 백래시에 의한 진동과 소음의 실제적인 예는 변속기의 래틀 소음과 시트벨트와 그 밖의 기계장치에서도 발생한다.

기어계의 외적인 가진은 엔진이나 모터의 비틀림 진동에서 오는 토크의 변동이 있으며 주로 저 주파수 가진이다. 내적인 가진은 치, 축 및 베어링의 변형과 치면 오차나 수정에 의한 제작잔달오차이며 고주파수 가진을 준다. 특히 맞물리는 치의 수의 변화에 의한 치의 강성변화는 백래시와 더불어 기어계를 비선형으로 가진시키는 중요한 역할을 한다. 치의 강성 변화는 *parametrically excited system*으로 운동방정식은 변위의 성분이 주기적인 함수일 때 Hill equation, cosine함수형태로 나타내면 Mathieu equation으로 된다⁽¹⁾.

관련된 연구로 Kahraman 등은 백래시를 가진 스퍼기어의 일자유도 비틀림 모델⁽²⁾과 백래시와 베어링의 간극을 가진 스퍼기어계의 삼자유도 모델⁽³⁾의 비선형특성을 *harmonic balance method*와 수치적 방법으로 연구하였다. Theodossiadis 등은 스퍼기어 형태의 치의 강성과 백래시를 고려한 일자유도 비틀림 모델에 대해 맞물리는 기어의 접촉 조건에 따라 주기적 응답과 안정성해석을 하였고⁽⁴⁾, 변속기 모델에 기어접촉부 윤환의 탄성을 고려하여 래틀진동을 해석하였다⁽⁵⁾. Sika 등은 입력축 기어 속도 변동이 있는 치의 시변 강성과 백래시를 가진 기어의 일자유도 모델에 *perturbation method*로 해석적 해를 구하고 수치적으로 동적 응답과 하중 계수를 계산하였다⁽⁶⁾. 또한 그는 이 모델에 Newmark방법으로 불안정성⁽⁷⁾을 연구하였다. Gurken⁽⁸⁾ 등은 스퍼기어 모델로 기어의 강성, 백래시와 베어링 간극의 상호관계를 검토하였다. 국내 연구로 Cho⁽⁹⁾ 등이 스퍼기어의 백래시와 강성변화를 고려하여 모델링하고 응답특성을 계산하였다. 이와 같이 백래시에 의한

스퍼기어의 비선형 모델링은 이미 기존 연구 논문에 발표되었으나 헬리컬 기어의 모델링은 지금까지 많이 발표되지 않았다. 헬리컬 기어의 모델링으로 기어를 강체 원통으로, 축과 베어링을 강체로 가정하고 치의 강성만을 고려한 일 자유도계의 비틀림 모델이 있고 이 모델에 축과 베어링의 반경방향 강성만을 고려하면 삼 자유도계 모델을 얻을 수 있으나 이 모델로는 축방향 진동을 예측할 수 없다. 기어를 강체로 하고 헬리컬 치의 강성과 축과 베어링의 강성을 모델링하여 반경방향 거동과 축방향 거동을 모두 고려하면 12자유도계의 운동방정식을 얻을 수 있다. 헬리컬 기어의 경우 백래시와 헬리컬 치의 강성이 비틀림 진동에 가장 중요한 역할을 하므로 기어의 비선형 기본 특성을 검토할 수 있다. 그러므로 이 연구에서는 일 자유도계 비틀림 모델에 대해 토크 변동이 있을 때, 치 강성의 시간변동, 백래시를 고려하여 운동방정식을 유도하고 등가 기어 모델을 제시한다. 이 모델을 사용하여 가진 주파수, 감쇠계수, 토크 변동, 백래시의 크기를 변화시키면서 Newmark법과 Newton-Raphson의 수치해석 기법을 사용하여 헬리컬 기어 치 분리의 비선형 거동을 해석한다.

2. 헬리컬 기어의 운동방정식 및 등가 모델

토크의 변동, 치면의 오차, 치 강성의 주기적인 변화와 맞물림이 진행됨에 따라 치면을 따라서 하중의 이동은 헬리컬 기어를 가진 한다. 백래시와 치 강성의 주기적인 변화를 연구하기 위해 헬리컬 기어의 일자유도 비틀림 자유도를 가진 모델을 사용한다. 이 모델은 축과 베어링을 강체로 가정하고 헬리컬 기어는 Fig. 1과 같이 작용면을 따라 치의 맞물림 강성에 의하여 연결된 두 개의 강체 원통으로 한다.

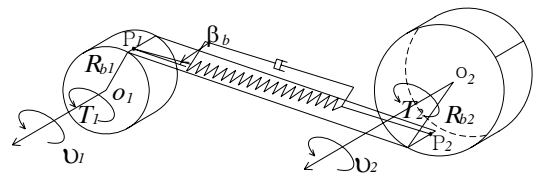


Fig. 1 Helical gear model

이 모델링에서 백래시가 없고 치면 오차를 무시하였을 때, 기어 치의 변형은 다음 식으로 주어진다.

$$\delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t) = \cos \beta_b (R_{b1}\theta_1(t) + R_{b2}\theta_2(t)). \quad (1)$$

여기서 δ_1 은 기어 1의 P₁의 변위이고 δ_2 은 기어 2의 P₂의 변위이다.

기어가 2b의 일정한 치직각 백래시를 가진다면, 치의 변형은 접촉 조건에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} \delta(t) - b & \text{if } \delta(t) \geq b \\ 0 & \text{if } |\delta(t)| \leq b \\ \delta(t) + b & \text{if } \delta(t) \leq -b \end{cases}. \quad (2b)$$

이 조건하에서 치의 하중 $F_G(t)$ 는 정상적인 접촉을 하는 식(3a)와 접촉을 하지 않는 상태인 식(3b), 반대편 치를 접촉하는 식(3c)로 주어진다.

$$F_G(t) = k(t)(\delta(t) - b) + c \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{if } \delta(t) \geq b, \quad (3a)$$

$$F_G(t) = 0 \quad \text{if } |\delta(t)| \leq b, \quad (3b)$$

$$F_G(t) = k(t)(\delta(t) + b) + c \frac{d\delta(t)}{dt} \quad \text{if } \delta(t) \leq -b. \quad (3c)$$

Fig. 1과 같이 토크 T_1 이 기어 1, 토크 T_2 가 기어

2에 작용한다면 운동방정식(4)와(5)가 얻어진다.

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - F_G(t) \cos \beta_b R_{b1}. \quad (4)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 = T_2 - F_G(t) \cos \beta_b R_{b2}. \quad (5)$$

수학적인 조작 후에 이 두 방정식들은 일 자유도 계로 줄어든다.

$$m_{eq} \ddot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b F_G(t) = m_{eq} \cos \beta_b (R_{b1}T_1 / J_1 + R_{b2}T_2 / J_2), \quad (6)$$

$$m_{eq} = \frac{J_1 J_2}{J_1 R_{b2}^2 + J_2 R_{b1}^2}.$$

부하 토크 T_2 가 식(7)과 같이 조정된다고 가정하면 식(6)은 식(8)과 같이 된다.

$$T_2 = R_{b2}T_1 / R_{b1}. \quad (7)$$

$$m_{eq} \ddot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b F_G(t) = T_1 \cos \beta_b / R_{b1}. \quad (8)$$

이 식에 치 접촉 상태에 따라 치의 맞물림 힘에 대한 식(3a), (3b), (3c)를 각각 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{If } \delta(t) \geq b, \\ m_{eq} \ddot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b c \dot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b k(t) \delta(t) \\ = T_1 \cos \beta_b / R_{b1} + \cos^2 \beta_b k(t) b, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \text{If } |\delta(t)| \leq b, \\ m_{eq} \ddot{\delta}(t) = T_1 \cos \beta_b / R_{b1}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \text{If } \delta(t) \leq -b, \\ m_{eq} \ddot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b c \dot{\delta}(t) + \cos^2 \beta_b k(t) \delta(t) \\ = T_1 \cos \beta_b / R_{b1} - \cos^2 \beta_b k(t) b. \end{aligned} \quad (9c)$$

이 연구에서는 제작 전달오차의 영향을 무시하고 외력 토크와 치의 강성이 다음 식과 같이 평균 하중 F_m 과 변동하중 F_a , 평균강성 k_m 과 강성의 조화 성분 k_{ai} 로 되어 있다고 가정한다.

$$T_1 \cos \beta_b / R_{b1} = F_m + F_a \cos(\omega t + \phi). \quad (10)$$

$$k(t) = k_m + \sum_i k_{ai} \cos(i\omega_i z_1 t + \phi_i). \quad (11)$$

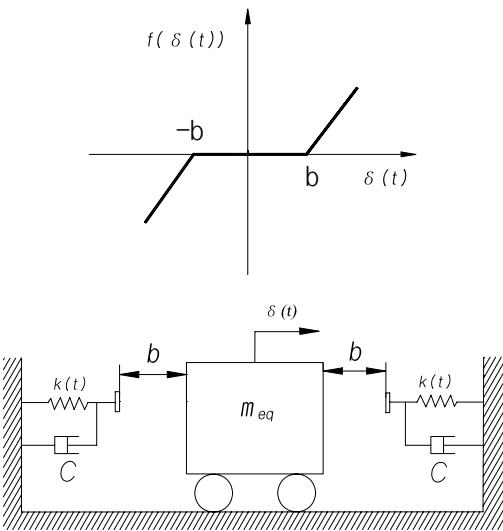


Fig. 2 Equivalent gear and backlash model

3. 해석방법

이 해석은 Newmark beta법을 사용하고 이 방법에서 운동방정식이 식 (12)와 같이 주어진다면 시간 단계(n+1)에서의 속도와 가속도는 다음 식으로 주어진다⁽¹⁰⁾.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F^{ext}. \quad (12)$$

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(x_{n+1} - x_n - \Delta t\dot{x}_n) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_n. \quad (13)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(x_{n+1} - x_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{x}_n - \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_n. \quad (14)$$

여기서 β 와 γ 는 정확도, 수치적인 안정성과 알고리즘 감쇠의 양과 같은 알고리즘의 특성을 조정하는 요소로, 이 해석에서는 수치 결과의 무조건 안정을 나타내는 $\beta=1/4$ 과 $\gamma=1/2$ 을 사용한다. 이 식들을 운동방정식에 대입하여 미지수 x_{n+1} 에 대해 해를 구한다. 초기조건으로 $x_0=0, \dot{x}_0=0$ 을 사용하고 초기 가속도는 운동방정식을 이용하면 다음 식으로 된다.

$$\ddot{x}_0 = m_{eq}^{-1} \cos\beta_b(T_1/R_{b1} - \cos\beta_b F_G(t)). \quad (15)$$

이 운동방정식은 비선형이므로 비선형식의 해 x_{n+1} 을 구하기 위해 Newton-Raphson법을 이용하여 구한다. 이 방법에 의한 근의 증분은 다음 식으로 주어진다.

$$\Delta x_{n+1} = -1/k^{eff} (k^{eff} x_{n+1}^{(i)} - F_{n+1}^{eff}), \quad (16)$$

여기서

$$k^{eff} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}m + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + k,$$

$$F_{n+1}^{eff} = (F^{ext})_{n+1}$$

$$+ m\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}x_n + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_n\right]$$

$$+ c\left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}x_n + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{x}_n + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_n\right].$$

(i+1)번째 반복계산에서 얻어진 근의 증분은 다음 식과 같이 (i)번째 근에 더해져서 (i+1)번째 근이 되고, 같은 방식으로 반복 계산 되어 근이 수렴 범위 안에 있으면 최종 해를 구한다.

$$x_{n+1}^{(i+1)} = x_{n+1}^{(i)} + \Delta x_{n+1}. \quad (17)$$

4. 해석 결과

4.1 해석기어

Table 1의 기어 제원으로 기 개발된 프로그램으로 축직각 치의 강성을 계산하여 Fig. 3(a)에 도시하고⁽¹¹⁾ 이산 후리에 변환(discrete Fourier transform)으로 계산하면, 치의 강성 조화성분의 크기와 위상이 Fig. 3(b)와 같이 얻어진다. 여기서 2차 조화 성분까지 큰 피크를 가지므로 치 강성 평균값과 이 성분만으로 함수를 구성하여 Fig. 3(a)과 같이 원래 치 강성과 비교하면 이 성분으로 근사화 될 수 있음을 알 수 있다.

수치해석방법은 Newmark beta법과 Newton-Raphson법을 해가 있는 운동방정식에 적용하여 검증하여 사용하고, 2차 조화성분으로 근사화된 치의 강성과 초기조건으로 변위와 속도로 0을 적용하여 해석한다.

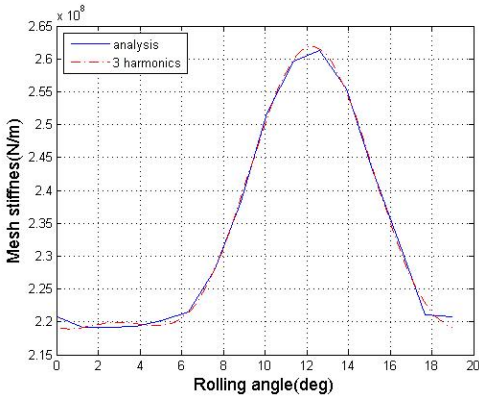
4.2 가진 회전각속도 주파수의 영향

Fig. 4에서는 운동방정식 (9)와 토크 식 (10)에서 구동기어의 가진 회전각속도 주파수 ω_1 을 변동하면

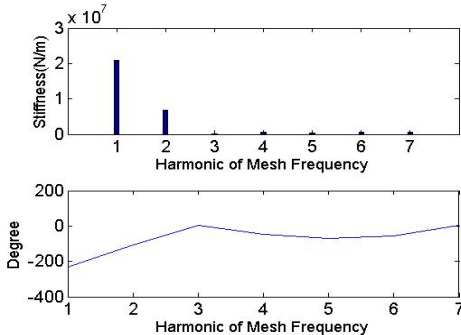
Table 1 Gear specification

	Pinion	Gear
Normal module	2.5	
Normal pressure angle(deg)	20°	
Center distance(mm)	150	
Helix angle(deg)	20°	
Average mesh stiffness(N/m)	2.34×10 ⁸	
Average torque(Nm)	49.5	
Number of teeth	56	56
Face width(mm)	20	20
Outside diameter(mm)	154.98	154.98
Pitch diameter(mm)	148.98	148.98
Addendum mod. co.	0.2075	0.2075

서 감쇠계수 $\xi=0.02$, 평균 하중에 대한 변동하중의 비 $F_a/F_m=0.25$, 백래시 $b=100\ \mu\text{m}$ 로 해석한 결과이다. 기어 치 변형과 맞물림 힘은 $\bar{\delta}=\delta/b$, $\bar{F}=F/bk_m \cos^2 \beta_b$ 로 무차원 화하여 도시한다. 가진 주파수 10 Hz와 100 Hz에서는 초기에는 치의 분리가 나타나지만 시간이 지날수록 정상상태로 가고 치의 분리가 나타나지 않고 있다. 그러나 가진주파수 1 kHz에서는 전 시간영역에서 지속적으로 치의 분리가 일어나고 진동의 크기도 급격히 커진다. 10 kHz에서는 초기에만 치의 분리가 일어나고 후반에는 진동의 크기가 작아지고 치의 분리도 일어나지 않으며, 정상적인 맞물림을 갖는다. 그러므로 어떤 주파수로 가진하든지 기어치가 틈새를 가지고 물려 있을 때는 초기의 래틀 충격이 발생하고, 특정한 주파수로 기어계를 가진하면 래틀진동이 지속적으로 일어나는 이 해석 결과는 실제 물림 현상을 잘 묘사한다.

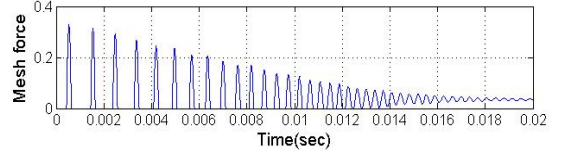
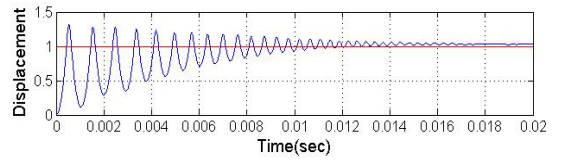


(a) Mesh stiffness(transverse)

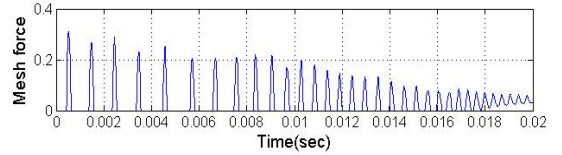
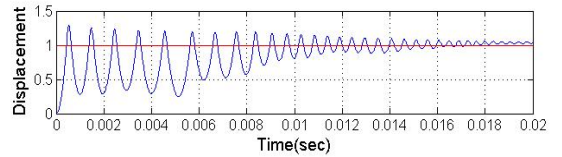


(b) DFT(discrete Fourier transform)

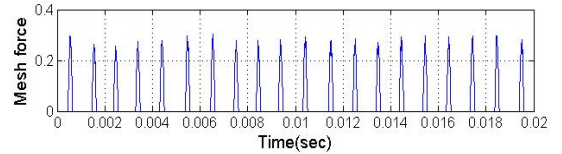
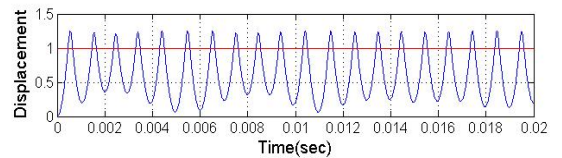
Fig. 3 Mesh stiffness and DFT



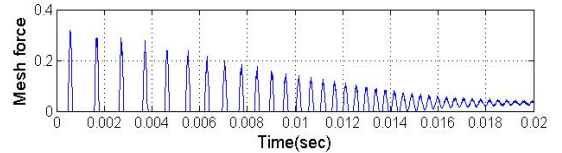
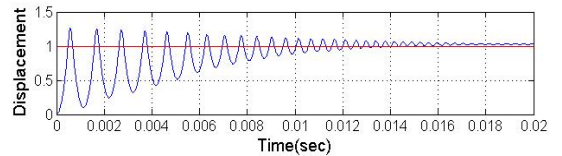
(a) $\omega_1=10\ \text{Hz}$, $b=100\ \mu\text{m}$, $\xi=0.02$, $F_a/F_m=0.25$



(b) $\omega_1=100\ \text{Hz}$, $b=100\ \mu\text{m}$, $\xi=0.02$, $F_a/F_m=0.25$

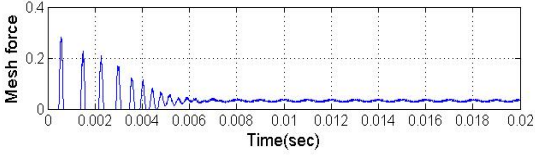
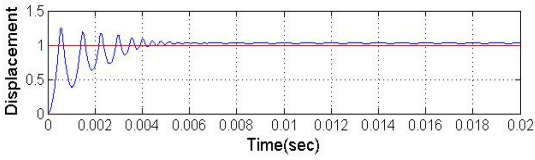


(c) $\omega_1=1\ \text{kHz}$, $b=100\ \mu\text{m}$, $\xi=0.02$, $F_a/F_m=0.25$

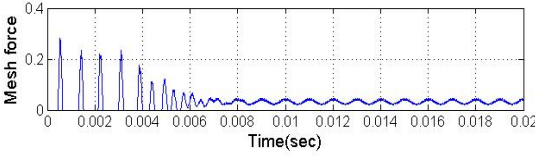
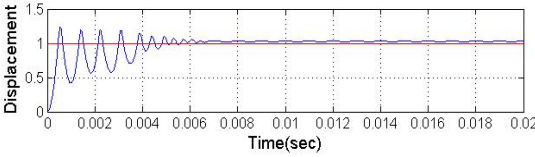


(d) $\omega_1=10\ \text{kHz}$, $b=100\ \mu\text{m}$, $\xi=0.02$, $F_a/F_m=0.25$

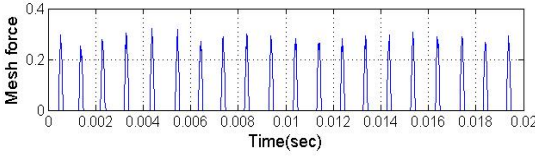
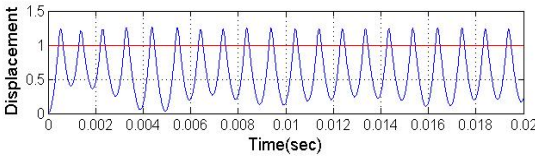
Fig. 4 Effect of the exciting frequencies



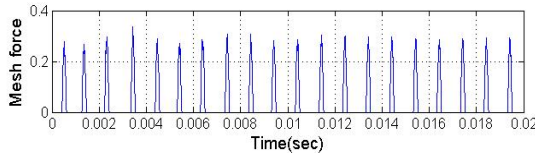
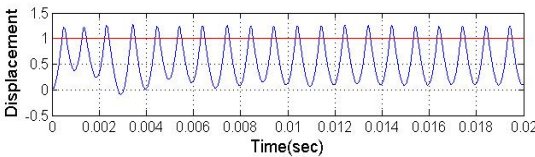
(a) $F_a / F_m = 0.1$, $\omega_1 = 1$ kHz, $b = 100 \mu\text{m}$, $\xi = 0.07$



(b) $F_a / F_m = 0.25$, $\omega_1 = 1$ kHz, $b = 100 \mu\text{m}$, $\xi = 0.07$



(c) $F_a / F_m = 0.4$, $\omega_1 = 1$ kHz, $b = 100 \mu\text{m}$, $\xi = 0.07$

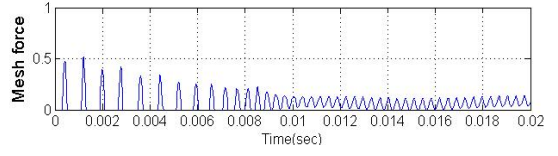
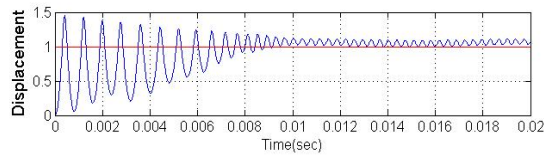


(d) $F_a / F_m = 0.55$, $\omega_1 = 1$ kHz, $b = 100 \mu\text{m}$, $\xi = 0.07$

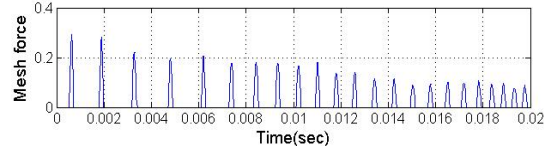
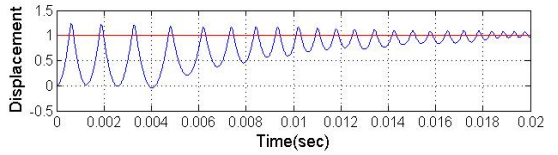
Fig. 5 Effect of the fluctuation load ratio

4.3 토크 변동 하중 비의 영향

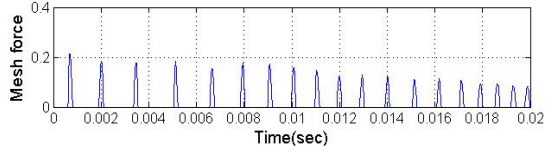
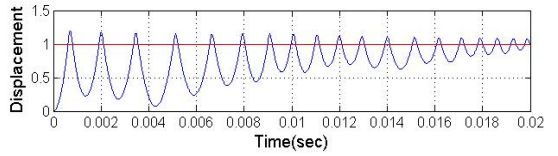
Fig. 5는 토크 식 (10)에서 평균 하중에 대한 변동하중의 비 F_a / F_m 를 0.1에서 0.55까지 변화시키고 가진 주파수 1 kHz, 백래시 $b = 100 \mu\text{m}$, 감쇠계수는 $\xi = 0.07$ 로 증가시켜 해석하였다. 그 결과 감쇠계수 $\xi = 0.02$ 일 때는 Fig. 4(c)와 같이 지속적으로 치의 분리가 일어나고 진동의 크기가 커진다. 감쇠계수가 $\xi = 0.07$ 로 증가하면 Fig. 5(b)와 같이 초기에만 치의 분리가 일어나고, 진동의 크기도 시간이 경과하면 작아져서 정상상태로 된다. 하중비가 작은 0.1, 0.25에는



(a) $b = 50 \mu\text{m}$, $\omega_1 = 100$ Hz, $\xi = 0.02$, $F_a / F_m = 0.25$



(b) $b = 150 \mu\text{m}$, $\omega_1 = 100$ Hz, $\xi = 0.02$, $F_a / F_m = 0.25$



(c) $b = 200 \mu\text{m}$, $\omega_1 = 100$ Hz, $\xi = 0.02$, $F_a / F_m = 0.25$

Fig. 6 Effect of the backlash

초기에만 치면 분리가 일어나지만, 0.4와 0.55에서는 전시간영역에서 치면 분리가 일어난다. 이는 감쇠와 변동하중의 크기가 래틀진동에 중요한 역할을 하는 것을 보인다.

4.4 백래시 크기의 영향

Fig. 6에서는 백래시의 크기 b 를 50 μm 에서 200 μm 까지 변경하면서 해석하였다. 백래시가 50 μm 에서는 초기에만 치면 분리가 일어나지만 백래시가 커지면 전시간 영역에서 치면 분리가 일어나고 하중의 크기는 다소 작아진다. 이는 백래시가 크면 초기에 기어치에 큰 충격을 주고 이 힘이 지속적으로 래틀 진동을 일으키는 것으로 사료된다. 따라서 지나친 백래시가 기어치에 충격력을 강하게 주어 기어 수명에도 영향을 미치므로 적절한 백래시 설계가 필요하다. 치면 분리가 일어난 후 기어가 백래시 크기 이상을 이동하여 반대 치면을 치면 음의 맞물림력으로 계산된다. 그러므로 이 해석 예제에서는 치면 분리를 나타내는 맞물림력이 0인 부분은 있지만, 모든 경우에 기어의 반대 치면을 치는 현상은 발생하지 않는다.

5. 결 론

이 연구는 백래시를 가진 헬리컬 기어에 적용할 수 있는 비선형 진동에 대해 연구하였다. 이를 위하여 일자유도계 비틀림 진동 모델에 대해 토크 변동이 있을 때 치 강성의 시간변동, 백래시를 고려하여 운동방정식을 유도하고, Newmark법과 Newton-Raphson법을 사용하여 헬리컬 기어의 비선형 거동을 시간영역에서 해석하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 모든 가진 주파수에서 시간 영역의 초기에 기어의 치면 분리가 발생하고, 1 kHz의 특정 가진 주파수에서만 전 시간 영역에서 치면 분리가 발생하였다. 그러므로 특정 가진 주파수는 래틀 진동을 지속적으로 유발시킨다.

(2) 기어의 감쇠 계수가 0.02에서 0.07로 증가하면 치면 분리와 치의 충격을 줄이는 역할을 하고, 평균 하중에 대한 변동하중의 비가 증가할수록 치면 분리가 전 시간영역에서 발생하였다. 그러므로 감쇠와 변동하중의 크기가 래틀진동에 중요한 역할을

한다.

(3) 백래시가 50 μm 일 때는 시간 영역의 초기에만 치면 분리가 나타나지만, 백래시가 150 μm 이상으로 증가하였을 때는 전 시간 영역에서 치면 분리가 발생하였다. 백래시가 크면 기어치에 큰 충격을 주므로 적절한 백래시 설계가 필요하다.

후 기

이 논문은 2008년도 정부재원(교육과학기술부 학술연구조성사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2008-521-D00026).

참 고 문 헌

- (1) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (2) Kahraman, A. and Singh, R., 1990, "Non-linear Dynamics of a Spur Gear Pair," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, No. 1, pp. 49~75.
- (3) Kahraman, A. and Singh, R., 1991, "Non-linear Dynamics of a Geared Rotor-bearing System with Multiple Clearances," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, No. 3, pp. 469~506.
- (4) Theodossiades, S. and Natsiavas, S., 2000, "Non-linear Dynamics of Gear-pair Systems with periodic Stiffness and Backlash," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 2, pp. 287~310.
- (5) Theodossiades, S., Tangasawi, O. and Rahnejat, H., 2007, "Gear Teeth Impacts in Hydrodynamic Conjunctions Promoting Idle Gear Rattle," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303, pp. 632~658.
- (6) Sika, G. and Velez, P., 2007, "Analytical and Numerical Dynamic Analysis of Gears in the Presence of Engine Acyclism," *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Sept. 4-7,

Las Vegas, USA, DETC2007-34068.

(7) Sika, G. and Velez, P., 2008, "Instability Analysis in Oscillators with Velocity-modulated Time-varying Stiffness-Applications to Gears Submitted to Engine Speed Fluctuations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, pp. 166~175

(8) Gurken, N. and Ozguven, H. N., 2007, "Interactions between Backlash and Bearing Clearance Nonlinearity in Geared Flexible Rotors," *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Sept. 4-7, Las Vegas, USA, DETC2007-34101.

(9) Cho, Y. S. and Choi, Y. S., "Nonlinear Dynamic Characteristics of Gear Driving Systems

with Periodic Meshing Stiffness Variation and Backlash," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 12, No. 12, pp. 921~928.

(10) Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. and Witt, R. J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis 4th ed.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, pp. 416~426.

(11) Park, C. I., 1992, "A Study on the Load Transmission and Vibration Characteristics of Gear Systems," Ph.D dissertation, Seoul National University.

(12) Park, C. I., 2010, "Nonlinear Vibration of Helical Gears with Backlash," *Proceedings of the KSNVE Twentieth Anniversary Spring Conference*, pp. 61~62.