

계층적 B-스플라인을 이용한 스플라인 유한요소법의 국부 세분화에 관한 연구

하주환* · 김현중* · 윤성기**

* KAIST 기계공학부

Study on the Local Refinement in Spline Finite Element Method by Using Hierarchical B-spline

Zoo-Hwan Hah*, Hyun-Jung Kim* and Sung-Kie Youn**

* School of Mechanical, Aerospace and Systems Engineering, Division of Mechanical Engineering, KAIST

(Received February 22, 2010 ; Revised June 14, 2010 ; Accepted June 14, 2010)

Key Words: Spline FEM(스플라인 유한요소법), NURBS, Hierarchical B-spline(계층적 B-스플라인)

초록: 본 연구에서는 NURBS 의 국부 세분화 방법 중 하나인 계층적 B-스플라인을 이용해 스플라인 유한요소법의 국부 세분화를 수행하는 방법을 제안한다. 세분화가 필요한 영역에 전역 격자로부터 계층적으로 생성된 국소 격자를 중첩시켜 국부 세분화를 수행한다. 국소 격자의 매듭 벡터와 제어점은 전역 격자로부터 추출된 후 세분화 되는 과정을 거친다. 생성된 국소 격자에 적절한 연속성 조건을 부여 함으로써 전역 격자와 국소 격자의 연속성을 유지 한다. 제안된 방법을 이용해 수치 예제의 해석을 수행하였다. 이를 통해 기존 NURBS 기반 스플라인 유한요소법에 비해 제안된 방법의 효율성을 검증하였다.

Abstract: A new local refinement scheme for spline finite element method has been proposed; this scheme involves the use of hierarchical B-spline. NURBS has been widely used in CAD; however, the local refinement of NURBS is difficult due to its tensor-product property. In this study, we attempted to use hierarchical B-splines as local refinement strategy in spline FEM. The regions of high gradients are overlapped by hierarchically-created local meshes. Knot vectors and control points in local meshes are extracted from global meshes, and they are refined using specific schemes. Proper compatibility conditions are imposed between global and local meshes. The effectiveness of the proposed method is verified on the basis of numerical results. Further, it is shown that by using a proposed local refinement scheme, the accuracy of the solution can be improved and it could be higher than that of the solution of a conventional spline FEM with relatively lower degrees of freedom.

1. 서 론

CAD 와 CAE 는 컴퓨터의 발전과 활발한 연구를 통해 비약적인 발전을 거듭하고 있다. 이로 인해 제품의 설계와 개발단계에서 사람의 노력과 시간을 줄이는데 획기적인 역할을 하고 있다. CAD 와 CAE 는 서로 밀접한 관계를 가지고 끊임없이 정보를 주고 받지만 실제 산업 현장에서는 원활한 소통을 하는데 어려움을 겪고 있다. 이것은 CAD 와 CAE 에서 쓰이는 수학적 표현방법이 상이한 것에서 기인한다. CAD 와 CAE 의 수학적 표현방법을 통일시킨다면 많은 시간, 인력 그리고 비용을 줄일 수 있다.

최근 제안된 NURBS 기반 스플라인 유한요소법(NURBS-based spline finite element method)⁽¹⁾은 CAD 와 CAE 의 수학적 표현방법을 NURBS 로 통일함으로써 CAD 모델을 근사화 과정 없이 유한요소해석에 사용할 수 있다. 그 결과 불필요한 비용을 획기적으로 감소시킬 수 있다.

그러나 NURBS 기반 스플라인 유한요소법에서는 효율적인 국부 세분화가 불가능하다. 이것은 NURBS 곡면이 텐서 곱(tensor product) 형태로 구성되기 때문에, 세분화를 수행할 때 불필요한 제어점이 전체 곡면으로 전파되기 때문이다. 이 같은 문제를 해결하기 위해 컴퓨터 그래픽스에서는 T-스플라인⁽²⁾과 계층적 B-스플라인⁽³⁾(Hierarchical B-spline)이 제안되었다. NURBS 기반 스플라인 유한요소해석에서 T-스플라인을 이용한 국부 세분화는 연구가 진행되었으나^(4,5) 계층적 B-스플라인을 이용한 국부 세분화 방법은 아직 연구가 수행된 바 없다. 계층적 B-스플

† Corresponding Author, skyoun@kaist.ac.kr

라인을 이용한 국부 세분화 방법은 국소 격자를 중첩시켜 세분화를 수행하므로 다중-스케일(multi-scale) 문제에 적용이 용이하며 국부 세분화의 추가 및 제거가 용이할 것이라 예상된다. 하지만 계층적 B-스플라인을 이용해 국부 세분화를 수행하기 위해서는 새로운 스플라인 패치를 구성해야 하므로 T-스플라인에 비해 자유도 대비 오차감소 정도는 작을 것이라 예상된다.

본 연구에서는 계층적 B-스플라인의 개념을 이용하여 NURBS 기반 스플라인 유한요소법에서의 국부 세분화에 관한 연구를 수행한다.

2. 계층적 B-스플라인 유한요소법

2.1 계층적 B-스플라인

계층적 B-스플라인은 NURBS 의 국부 세분화를 위한 하나의 방법으로써 Forsey D. R.⁽³⁾에 의해 제안되었다. 세분화를 수행할 국소 영역의 전역 격자에 계층적으로 생성된 국소 격자를 중첩시킴으로써 세분화를 수행한다. 겹쳐진 부분에서는 전역 격자와 더 세분화된 국소 격자를 중첩시켜 형상을 표현하게 되므로 더 세밀한 표현이 가능하다.

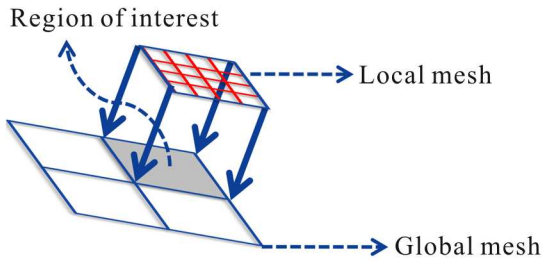


Fig. 1(a) Concept of hierarchical B-spline

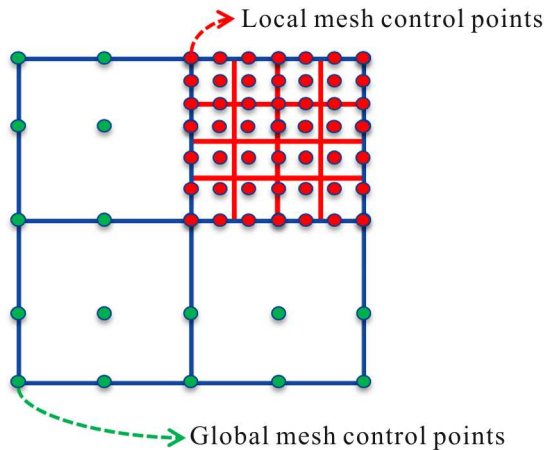


Fig. 1(b) Configuration of control points in global and local mesh

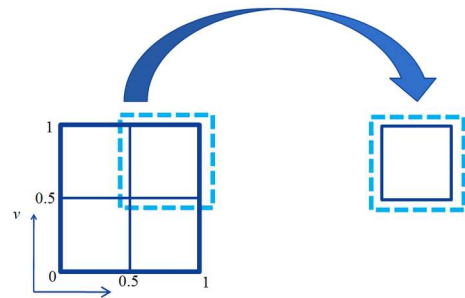
Fig. 1(a)은 계층적 B-스플라인의 개념을 도식화한 것이다. 국부 세분화를 수행할 관심 있는 영역(Region of interest)의 전역 격자(Global mesh) 위에 국소 격자(Local mesh)를 중첩시켜 관심 있는 영역에만 세분화를 수행한다. Fig. 1(b)는 Fig. 1(a)처럼 국부 세분화가 수행되었을 때 제어점과 격자를 도식화한 것이다. 관심 있는 영역에 전역 격자와 국소 격자의 제어점이 모두 존재함을 볼 수 있다.

2.2 세분화를 위한 국소 격자 구성

국소 격자는 전역 격자의 정보를 이용해서 계층적으로 생성된다. 일반적으로 스플라인 곡면을 정의하기 위해서는 제어점의 정보와 매듭 벡터의 정보가 필요하다. 그러므로 국소 격자의 형성은 전역 격자로부터 제어점과 매듭 벡터를 추출한 후 세분화 하는 과정을 거치게 된다.

2.2.1 국소 격자의 매듭 벡터 생성

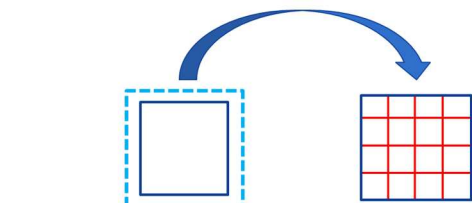
국소 격자의 매듭벡터는 국부 세분화를 수행할 영역에 해당되는 전역 격자의 매듭벡터를 추출한 다음 매듭을 추가하여 생성한다. Fig. 2 는 3 차 NURBS 기저 함수를 사용할 경우 국소 격자를 생성하는 과정을 간단한 예를 들어서 도식화 하였다.



$$U_G = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad U_{Ext} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

$$V_G = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad V_{Ext} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

Fig. 2(a) Knot extraction process



$$U_{Ext} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

$$V_{Ext} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

$$U_L = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.625 \ 0.75 \ 0.875 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

$$V_L = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.625 \ 0.75 \ 0.875 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

Fig. 2(b) Knot refinement process

Fig. 2(a)에서 \mathbf{U}_G 는 전역 격자의 매듭 벡터, \mathbf{U}_{Ext} 는 세분화할 영역에 대응되는 추출된 매듭 벡터를 뜻하며, Fig. 2(b)에서 \mathbf{U}_L 은 매듭이 추가된 국소 격자의 매듭 벡터를 뜻한다. Fig. 2(a)에서는 세분화할 영역에 해당하는 매듭 벡터(\mathbf{U}_{Ext})를 추출해오는 작업을 도식화 하였다. 점선으로 표시된 부분에 해당하는 매듭 벡터가 \mathbf{U}_{Ext} 가 된다. Fig. 2(b)에서는 추출된 매듭 벡터에 매듭 추가를 하여 국소 격자의 매듭 벡터(\mathbf{U}_L)를 생성하는 과정을 도식화 하였다. \mathbf{U}_L 에서 굵게 표시된 값은 추가된 매듭을 뜻하며 매듭 추가를 통해 국부 세분화가 수행되었다. 그리고 국소 격자의 매듭 벡터 정보로부터 국소 격자의 기저함수를 수식 (1)과 같이 생성할 수 있다.

$$B_{i,k}(u) = \sum_r \alpha_{i,k}(r) N_{r,k}(u) \quad (1)$$

$$B_{j,l}(v) = \sum_s \alpha_{j,l}(r) N_{s,l}(v)$$

여기에서 $B_{i,k}(u)$, $B_{j,l}(v)$ 는 국소 격자의 기저 함수, $N_{r,k}(u)$, $N_{s,l}(v)$ 는 전역 격자의 기저함수이다. 그리고 $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{j,l}$ 는 매듭 추가 알고리즘(knot insertion algorithm)에 의해서 결정되는 0 과 1 사이의 값을 가지는 상수이다. α 값은 수식 (2), (3)에 의해 결정된다⁽⁶⁾. 즉, 전역 격자의 기저함수는 더 많은 개수의 국소 격자의 선형 결합(linear combination)으로 재구성 된다.

$$\alpha_{i,0}(j) = \begin{cases} 1 & u_i^{Ext} \leq u_j^L \leq u_{i+1}^{Ext} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_{i,p}(j) = \frac{u_{i+p-1}^{Ext} - u_i^L}{u_{i+p-1}^L - u_i^L} \alpha_{i,p-1}(j) + \frac{u_{i+p}^L - u_{i+p-1}^{Ext}}{u_{i+p}^L - u_{i+1}^L} \alpha_{i+1,p-1}(j) \quad (3)$$

2.2.2 국소 격자의 제어점 생성

국소 격자의 제어점 생성도 앞 절의 매듭 벡터 생성과정과 비슷한 과정을 거쳐서 생성된다. Fig. 3 에 국소 격자의 제어점 생성과정을 도식화 하였다. 먼저 세분화 하려는 영역에 대응되는 제어점을

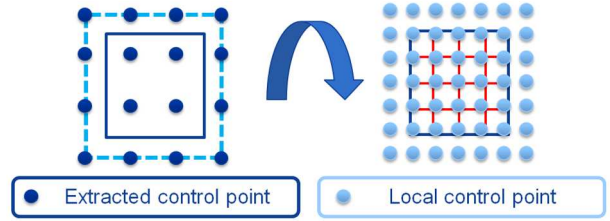


Fig. 3 Construction of control points in local mesh

추출해온 후 수식 (3)으로부터 구한 α 를 이용하여 세분화를 수행한다.

$$\mathbf{CP}_L = [\alpha_{U_L}] [\mathbf{CP}_{Ext}] [\alpha_{V_L}]^T \quad (4)$$

수식 (4)에서 \mathbf{CP}_{Ext} 는 전역 격자로부터 추출된 제어점 좌표, \mathbf{CP}_L 은 새로이 생성되는 국소 격자의 제어점 좌표이다. α_{U_L} 은 \mathbf{U}_{Ext} 와 \mathbf{U}_L 의 정보로 수식 (3)을 이용해 얻은 α 값들의 행렬 형태이다. α_{V_L} 도 \mathbf{V}_{Ext} , \mathbf{V}_L 을 이용해서 같은 과정을 거쳐 생성된다.

또한 NURBS 기저 함수에서 제어점마다 정의되는 가중치는 수식 (5)와 같이 계산된다. 가중치는 NURBS 기저 함수를 사용할 경우 각각의 제어점에 대응되는 값으로 0 과 1 사이의 값을 가진다. Fig. 3 과 같은 방법으로 전역 격자 제어점의 가중치를 이용하여 국소 격자 제어점의 가중치를 계산한다. 수식 (5)에서 α_{U_L} 과 α_{V_L} 은 수식 (4)와 같으며 \mathbf{w}_{Ext} 는 추출해온 전역 격자 제어점의 가중치이며 \mathbf{w}_L 은 새로이 생성된 국소 격자 제어점의 가중치이다.

$$\mathbf{w}_L = [\alpha_{U_L}] [\mathbf{w}_{Ext}] [\alpha_{V_L}]^T \quad (5)$$

2.3 계층적 B-스플라인 수식화

Fig. 4 는 수식화를 위한 해석영역이다. 계층적 B-스플라인을 이용한 스플라인 유한요소법에서는 기본적으로 Fish⁽⁷⁾가 제안한 s-Fem 의 수식화를 따른다. Ω_G 는 전역 격자만 존재하는 영역이고 Ω_L 은 전역 격자와 국소 격자가 동시에 존재하는 영역이다. 그리고 Γ_{GL} 은 Ω_G 와 Ω_L 의 경계를 의미한다. 아래 첨자 G 와 L 은 각각 전역 격자(global mesh)와 국소 격자(local mesh)에 해당하는 항을 표시한다.

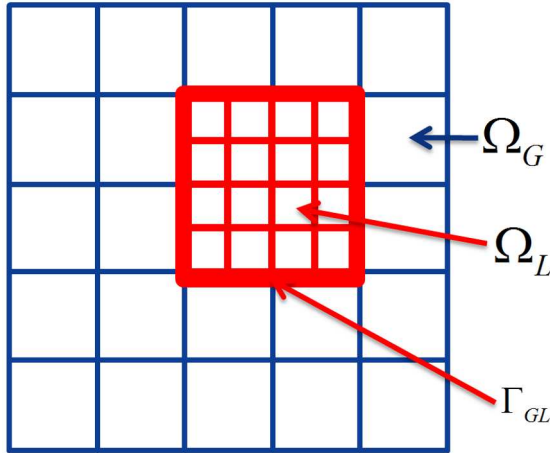


Fig. 4 Analysis domain for local refinement in spline FEM using hierarchical B-spline

변위장(displacement field) 은 전역 격자의 변위와 국소 격자의 변위의 선형 조합으로 표현된다. 이는 수식 (6)과 같다.

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_G & = \mathbf{N}_G \mathbf{d}_G & \text{on } \Omega_G \\ \mathbf{u}_G + \mathbf{0} & = \mathbf{N}_G \mathbf{d}_G + \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_{GL} \\ \mathbf{u}_G + \mathbf{u}_L & = \mathbf{N}_G \mathbf{d}_G + \mathbf{N}_L \mathbf{d}_L & \text{on } \Omega_L \end{cases} \quad (6)$$

수식 (6)에서 \mathbf{N}_G , \mathbf{N}_L 은 각각 전역 격자와 국소 격자의 기저함수를 의미하며 $\mathbf{d}_G, \mathbf{d}_L$ 은 각각 전역 격자와 국소 격자에서 존재하는 제어점의 변위이다. 그리고 변위장의 연속성을 유지시켜주기 위해서 전역 격자와 국소 격자의 경계에서는 수식 (7)과 같은 C^0 연속조건이 사용된다.

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_{GL} \quad (7)$$

이와 같은 수식화를 이용하여 강성행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG} & \mathbf{K}_{GL} \\ \mathbf{K}_{GL}^T & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{GG} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_G^T \mathbf{C} \mathbf{B}_G d\Omega \\ \mathbf{K}_{GL} &= \int_{\Omega_L} \mathbf{B}_G^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L d\Omega_L \\ \mathbf{K}_{LL} &= \int_{\Omega_L} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L d\Omega_L \end{aligned} \quad (9)$$

수식 (9)는 강성행렬의 각각의 항을 풀어쓰는 것이다. \mathbf{K}_{GG} 는 전역 격자의 강성행렬, \mathbf{K}_{LL} 은

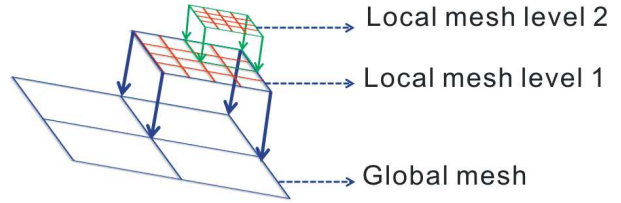


Fig. 5 Multi-level local refinement

국소 격자의 강성행렬이며 \mathbf{K}_{GL} 은 전역 격자와 국소 격자의 상호작용(interaction)과 관련된 강성행렬이다. 강성행렬의 적분 방법은 기존 NURBS 기반 스플라인 유한요소법과 동일하다.

그리고 제안된 수식화는 국소 격자에 또 국소 격자를 중첩시키는 다중 레벨(multi-level)세분화도 가능하다. Fig. 5 에 다중 레벨 세분화의 경우를 도식화 하였다. 이때 변위장과 변형률장은 수식 (10)과 같이 정의 된다. 수식 (10)에서 아래첨자 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_n$ 은 국부 세분화의 단계를 의미한다. 국소 격자 1 단계(Local mesh level 1)에 해당하는 항의 아래첨자는 \mathbf{L}_1 이 되며 국소 격자 2 단계(Local mesh level 2)에 해당하는 항의 아래첨자는 \mathbf{L}_2 가 되며 국소 격자가 n 단계일 경우 항의 아래첨자는 \mathbf{L}_n 이 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_G + \mathbf{u}_{L_1} + \dots + \mathbf{u}_{L_n} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_G + \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_{L_n} \end{aligned} \quad (10)$$

그리고 강성행렬은 다음과 같은 구조로 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG} & \mathbf{K}_{GL_1} & \dots & \mathbf{K}_{GL_n} \\ \mathbf{K}_{L_1G} & \mathbf{K}_{L_1L_1} & \dots & \mathbf{K}_{L_1L_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{L_nG} & \mathbf{K}_{L_nL_1} & \dots & \mathbf{K}_{L_nL_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_{L_1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{L_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{F}_{L_1} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{L_n} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{L_iL_j} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{L_i}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{L_j} d\Omega \quad (12)$$

2.4 연속성 조건 부과

연속성 조건은 전역 격자와 국소 격자의 경계에서 변위장의 연속성을 유지시켜주기 위해서 부과된다. 기존의 유한요소법은 절점에서 기저 함수가 Kronecker's delta 특성을 만족하므로 Γ_{GL} 과 관련된 국소 격자의 절점 변위를 제한함으로써 연속성

조건이 부여 된다. 하지만 스플라인 유한요소법에서는 패치 내부에서 Kronecker's delta 특성을 만족하지 않으므로 연속성 조건 부여를 위한 다른 방법이 필요하다. 본 연구에서는 페널티 방법⁽⁸⁾ (penalty method) 을 이용해 연속성 조건을 부과하였다. 페널티 방법을 이용한 강성행렬은 수식 (13) 과 같이 표현된다. 수식 (13)에서 β 는 페널티 계수(penalty parameter)로써 연속성 조건을 충분히 부여 할 만큼 큰 양의 수이다. 페널티 계수는 크거나 너무 크면 해의 불안정성을 초래하고 크기가 너무 작으면 연속성 조건을 잘 부과하지 못하는 특징이 있다. 본 연구에서는 탄성계수(elastic modulus)의 10^5 배를 페널티 계수로 사용하였으며 해가 안정적이고 연속성 조건도 적절히 부과되었다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GG} & \mathbf{K}_{GL} \\ \mathbf{K}_{GL}^T & \mathbf{K}_{LL} + \beta \mathbf{M}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_G \\ \mathbf{d}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_G \\ \mathbf{F}_L + \beta \mathbf{F}^p \end{bmatrix} \quad (13)$$

수식 (13)에서 \mathbf{M}^p 는 다음과 같이 표현 된다.

$$\mathbf{M}^p = \int_{\Gamma_{GL}} N_i N_j d\Gamma \quad (14)$$

수식 (14)에서 N_i, N_j 는 각각 경계(Γ_{GL})를 표현하는 기저 함수와 NURBS 곡면을 표현하는 기저 함수이다.

3. 적용 예제

본 장에서는 적용 예제를 보임으로써 제안된 방법의 유효성을 확인하고자 한다. 해석에는 3 차 NURBS 기저함수가 사용되었다. 모든 예제에 탄성계수는 10^5 , 푸아송 비는 0.3 을 사용하고 평면 응력 상태를 가정하였다.

3.1 원형 구멍이 있는 무한 평판

원형 구멍이 있는 무한 평판 문제는 정해가 존재하므로 제안된 방법의 검증이 용이하다.

Fig. 6 과 같이 정의되는 문제의 경우 정해(exact solution)는 수식 (15)와 같이 알려져 있다. 그리고 이 문제는 1/4 대칭문제이기 때문에 해석에는 1/4 모델을 사용하였다. 그리고 수식 (16)과 같은 상대 에너지 놈 오차(relative error in energy norm)를 사용하였다. 위 첨자 h 는 해석에서 구한 변형률과 응력이며 첨자가 붙지 않은 것은 정해에서 구한 값이다.

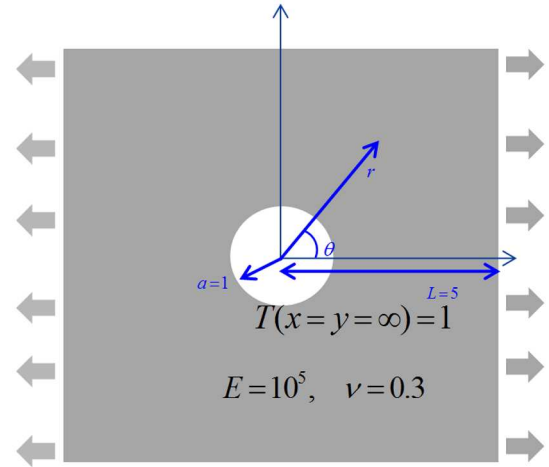


Fig. 6 Verification example 1: infinite plate with circular hole

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{T_x}{2} \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{T}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{T_x}{2} \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= -\frac{T}{2} \left(1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^h)^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \right)^{1/2}}{\left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right)^{1/2}} \quad (16)$$

Fig. 7 에 국부 세분화된 격자와 이를 이용해서 얻은 해의 오차를 도시하였다. 이를 통해 국부 세분화의 유효성을 정성적으로(qualitatively) 확인할 수 있다. **Fig. 7** 에서 국부 세분화를 수행한 부분에서 오차가 확연히 감소한 것을 볼 수 있다.

제안된 방법은 국소 격자에 또 국소 격자를 중첩시키는 다단계(multi-level)의 국부 세분화도 가능하다. **Fig. 8(a)**에서 국소 격자를 3 단계까지 중첩시켜 국부 세분화를 수행하였다. **Fig. 8(b)**는 각 단계의 격자이다. 오차가 많이 발생하는 원주 주위에 다단계의 국부 세분화를 수행하였다.

제안된 방법의 유용성 확인을 위해 기존 스플라인 유한요소법의 해와 비교하였다. 기존 스플라인 유한요소법에서는 **Fig. 8(a)**와 같은 전역 세분화 격자를 사용하였다. **Fig. 8(c)**에 기존 NURBS 기반 스플라인 유한요소법과 제안된 방법의 해를 비교하였다.

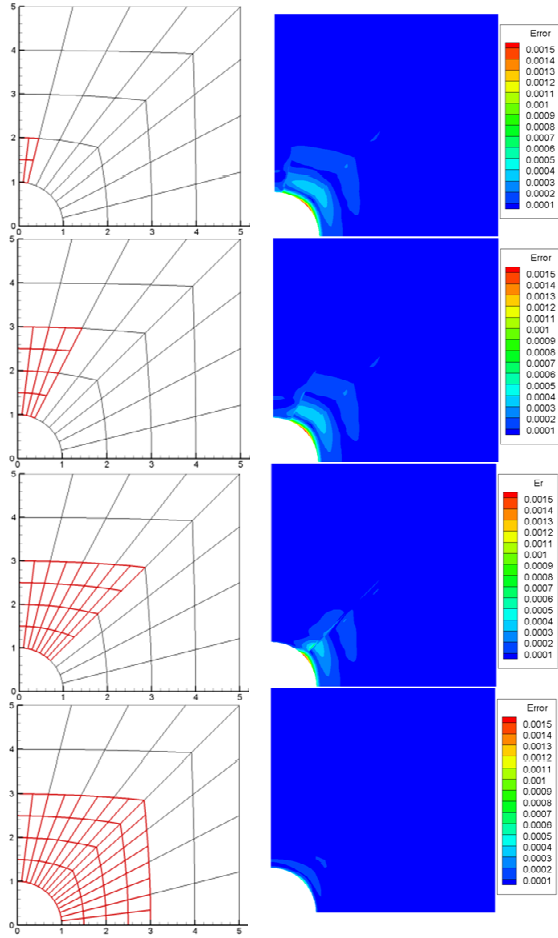


Fig. 7 Error contours of local refinement and their meshes

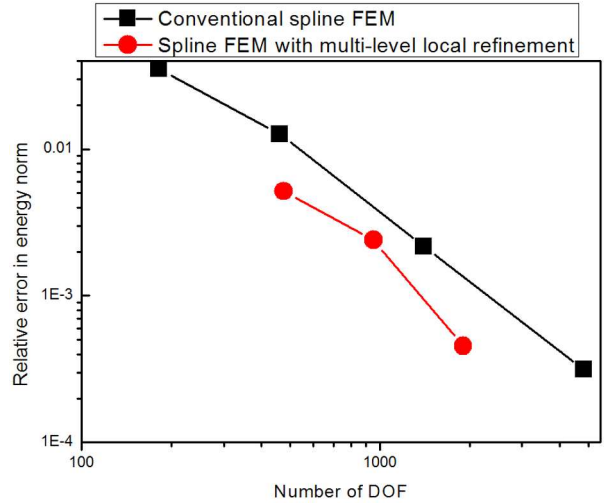


Fig. 8(c) Relative errors against the number of DOF

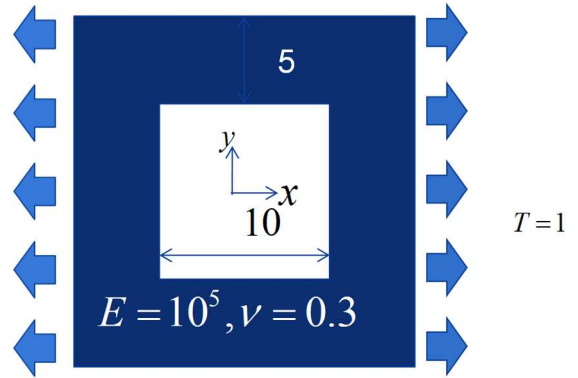


Fig. 9 Verification example 2: L-shaped domain

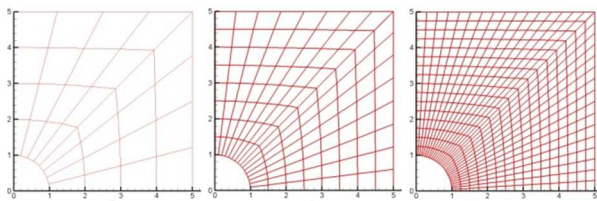


Fig. 8(a) Global refined meshes in conventional spline FEM

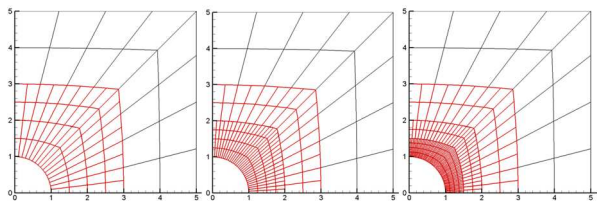


Fig. 8(b) Multi-level local refined meshes, in proposed method

원주 주위에 국부 세분화를 다중 레벨로 수행한 결과 기존의 스플라인 유한요소법에 비해 같은 자유도 대비 더 작은 오차를 얻을 수 있었다. 따라서 계층적 B-스플라인을 이용한 국부 세분화

가 성공적으로 수행되었음을 검증하였다.

3.2 L 형 평판

L 형 평판은 응력 특이성(stress singularity)이 발생하는 문제이다. L 형 평판의 문제 정의는 Fig. 9 과 같다. 대칭성을 고려하여 1/4 모델만 고려하여 해석하였다. Fig. 10 과 같이 응력 특이성을 보이는 부분에 국부 세분화를 수행하였다.

Fig. 10 은 국부 세분화 과정을 나타낸 것이다. Fig. 10(a) 는 국소 격자의 요소를 세분화하는 과정을 나타낸다. Fig. 10(b) 는 Fig. 10(a) 의 첫 번째 세분화 단계에서 응력 특이성이 나타나는 부분에 2 단계 국부 세분화를 수행한 것이며 2 단계 국소 격자의 요소 크기를 감소 시키는 과정이다. 그리고 제안된 방법의 유용성을 보이기 위해 ABAQUS(CPS4 요소 사용)와 기존 NURBS 기반 스플라인 유한요소해석의 결과와 비교하였다. Fig. 11 에 자유도 개수에 따른 von-Mises 응력의 최대값을 로그 스케일로 나타내었다.

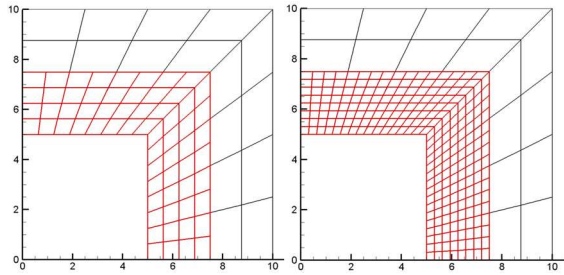


Fig. 10(a) Refinement progress in local refinement level 1

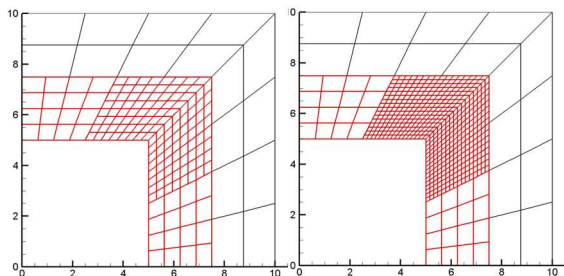


Fig. 10(b) Refinement progress in local refinement level 2

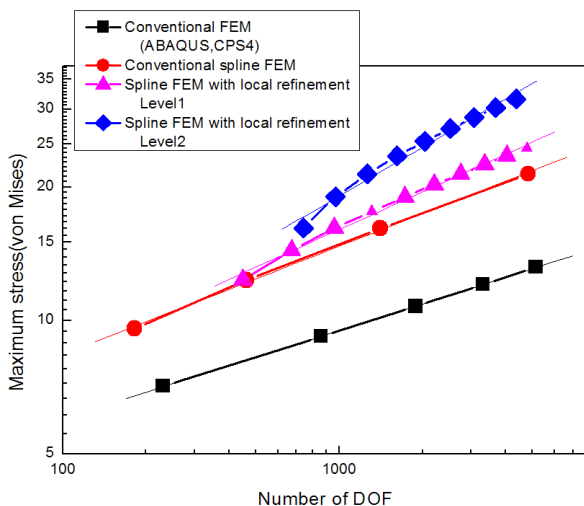


Fig. 11 Comparison of maximum stress against number of DOF

Fig. 11 을 보면 모두 응력 특이성의 성질을 보이며 자유도가 늘어날수록 최대 응력의 크기가 늘어나는 것을 볼 수 있다. 국부 세분화가 수행된 경우 응력의 최대값이 같은 수준의 자유도 대비 기존의 스플라인 유한요소법 보다 더 높은 것을 볼 수 있다. 계층적 B-스플라인을 이용한 국부 세분화 방법이 응력 특이성 성질을 더 효율적으로 포착할 수 있음을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 계층적 B-스플라인의 개념을 스플라인 유한요소법에 적용하여 효율적으로 국부

세분화 할 수 있는 방법을 제안하였다. NURBS 기저 함수를 이용하여 전역 격자 및 국소 격자의 강성행렬을 구성하였으며, 전역 격자와 국소 격자의 경계에서 연속성을 보장하기 위해 페널티 방법을 이용하였다. 그리고 정해가 있는 문제를 통해서 제안된 국부 세분화 방법의 유용성을 검증하였다. 또한 응력 특이성이 나타나는 문제에서 제안된 방법으로 국부 세분화를 수행하여 효율적으로 응력 특이 성질을 포착 할 수 있음을 보였다.

제안된 방법의 장점을 극대화 할 수 있는 연구가 진행된다면 스플라인 유한요소법의 성공적인 국부 세분화 방법이 될 것이라 예상된다.

후 기

본 연구는 한국학술진흥재단의 ‘T-스플라인 기반 CAD/CAE 통합 기법 연구’에 의하여 지원 되었음.

참고문헌

- (1) Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. and Bazilevs, Y., 2005, “Isogeometric Analysis : CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh refinement,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 4135~4195.
- (2) Sederberg, T. W., Zheng, J., Bakenov, A. and Nasri, A., 2003, “T-splines and T-NURCCs,” *ACM transactions on graphics*, Vol. 22, No. 3, pp.477~484.
- (3) Forsyth, D. R. and Bartels, R. H., 1988, “Hierarchical B-Spline Refinement,” *Computer Graphics*, Vol. 22, No. 5, pp. 205~212.
- (4) Bazilevs, Y., Calo, V.M., Cottrell, J. A., Evans, J. A., Hughes, T. J. R., Lipton, S., Scott, M. A. and Sederberg, T. W., 2010, “Isogeometric Analysis using T-Splines,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 5, pp. 229~263.
- (5) Uhm, T. K., Kim, K. S., Seo, Y. D. and Youn, S. K., 2009, “T-spline Finite Element Method for CAD/CAE Integrated Approach,” *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 33, No. 2, pp. 127~134.
- (6) Piegel, L. A. and Tiller, W., 1997, *The NURBS book (Monographs in Visual Communication)*, Springer-Verlag, New York, pp.142~161.
- (7) Fish, J., 1992, “The s-Version of the Finite Element Method,” *Computers & Structures*, Vol. 43, No. 3, pp. 539~547.
- (8) Fernández-Méndez, S. and Hureta, A., 2004, “Imposing Essential Boundary Conditions in Mesh-Free Methods,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1257~1275.