

확산모형 전이확률밀도의 급수근사법과 그 계수

이은경¹ · 최영수² · 이윤동³

¹이화여자대학교 통계학과, ²한국외국어대학교 수학과, ³서강대학교 경영학부

(2010년 2월 접수, 2010년 3월 채택)

요약

확산모형은 최근 금융현상의 연구 등에 자주 사용되는 모형이다. 본 연구에서는 확산모형의 추정에서 중요한 역할을 하는 전이확률밀도를 구하는 방법과 이를 급수전개 방식으로 근사하는 기존 연구들을 검토하여 보고, 급수전개법에서의 계수를 손쉽게 구할 수 있는 방법을 고려하게 된다. 급수전개법 계산과정에서 중요한 허미타항식에 딥킨연산자를 반복적으로 적용하는 과정을 손쉽게 계산할 수 있는 알고리즘을 제안한다.

주요용어: 확산모형, 전이확률밀도, 거사노프정리, 딥킨연산자, 허미타항식.

1. 서론

확산모형은 금융현상의 확률적 해석을 위하여 자주 사용되는 수리적 모형으로 다음과 같이 정의된다. 확산과정 X_t 는, 추세계수 $a_t = a(\theta, t, X_t)$ 와 확산계수 $b_t = b(\theta, t, X_t)$ 를 갖는 확률편미분방정식

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t \quad (1.1)$$

의 해로서 주어지는 연속형 표본경로를 갖는 연속시간 마코프 확률과정이다. 이에 대한 엄격한 수리적 표현과 그 해가 존재할 조건은 Kloeden과 Platen (1999, p.36)과, Oksendal (2003, p.68)에서 찾을 수 있다. 추세계수 a_t 와 확산계수 b_t 의 형태에 따라 다양한 확산과정이 정의된다. 특히 추세계수와 확산계수가 $a_t = a(\theta, X_t)$ 이고 $b_t = b(\theta, X_t)$ 인 형태로, t 에 대하여 직접 영향을 받지 않으면서 특정한 수리적 조건 (cf. Oksendal, 2003, p.114, p.149)을 만족하는 경우를 이또확산과정(Ito diffusion process)이라 한다. 본 연구에서는 이또확산과정만을 주로 고려하게 된다.

금융현상의 설명을 위해 최근까지 다양한 형태의 (이또)확산모형이 제안되고 연구되었다. Chan 등 (1992)과 Ahn과 Gao (1999)에는 이들 모형들에 대하여 잘 정리되어 있다. 대표적인 확산모형으로는 Cox (1975)가 제안한 CEV 모형, Ornstein-Uhlenbeck(OU) 확률과정에 해당하는 Vasicek (1977) 모형, Cox 등 (1985)에 의해 제안된 CIR 모형 등이 있다. OU 확률과정과 CIR 모형에 대한 자세한 사항은 Ait-Sahalia (1999)에서 찾을 수 있다. Chan 등 (1992)이 제안한 CKLS 모형은 확률편미분방정식

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t)dt + \sigma_0 X_t^\gamma dW_t$$

본 연구는 한국연구재단(NRF)의 중점연구소 지원사업 (2009-0093827), 2009학년도 한국외국어대학교 교내학술연구비, 서강대학교 2009년 교내연구비의 지원에 의하여 수행되었음.

³교신저자: (121-742) 서울시 마포구 신수동 1번지, 서강대학교 경영학부, 부교수.

E-mail: widylee@sogang.ac.kr

을 만족하는 확산확률과정으로 정의되고, 이자율 기간구조 연구에서 자주 사용되는 모형이다. 이외에도 최근의 연구들에서 제안되는 다양한 확산모형들은 그 모형의 형태가 복잡하고 다수의 모수를 통하여 정의되는 특성을 보여주고 있다.

이도확산모형의 특성은 전이확률밀도(transition density)를 이용하여 표현된다. 전이확률밀도 $p^t(x_0, x)$ 는, 확률과정이 $X_0 = x_0$ 인 조건으로부터 $X_t = x$ 로 변화될 조건부 확률밀도를 의미한다. 즉,

$$P(X_t \in dx | X_0 = x_0) = p^t(x_0, x)d\lambda(x)$$

이다. 여기서 $\lambda(\cdot)$ 는 르베그측도(Lebesgue measure)이다. 확률과정 X_t 가 확률편미분방정식 (1.1)을 만족할 때, 어떤 함수 $f(t, X_t)$ 에 대한 미분소 $df(t, X_t)$ 는 이도보조공식(Itô Lemma)에 의하여 다음과 같이 나타난다.

$$df(t, X_t) = [(D_t + \mathcal{A}_x)f](t, X_t) dt + [\mathcal{B}_x f](t, X_t) dW_t, \quad (1.2)$$

여기서 D_t 와 D_x 는 각각 t 와 x 에 대한 편미분 연산자 $(\partial/\partial t)$ 와 $(\partial/\partial x)$ 이고, \mathcal{A}_x 는 디킨(Dynkin) 연산자로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_x f](t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[f(t, X_h) - f(t, X_0) | X_0 = x] \\ &= a(t, x) [D_x f](t, x) + \frac{1}{2} b^2(t, x) [D_x^2 f](t, x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

또한 \mathcal{B}_x 는 $[\mathcal{B}_x f](t, x) = b(t, x)[D_x f](t, x)$ 인 성질을 갖는 연산자로 정의된다.

확산모형은 시간연속적인 모형인데 반하여, 확산과정을 관측해서 얻게 되는 값들은 이산시간 자료이다. 따라서 관측된 자료로부터 확산모형을 추정하기 위한 방법으로 최대우도추정법을 적용하려한다면 각 모형에 따른 전이확률밀도를 구체적으로 구할 수 있어야 한다. 그러나 일부 단순모형의 경우를 제외하고 확산모형의 전이확률밀도를 구하는 과정은 그리 단순하지 않다. 때문에 많은 연구들에서 확산모형의 전이확률밀도를 근사하는 다양한 방법을 제시하고 있다 (Ref., Brandt와 Santa-Clara, 2001; Durham과 Gallant, 2001; Elerian, 등, 2001; Eraker, 2001; Nicolau, 2002).

본 연구에서는 확산모형을 근사하기 위하여 제안된 여러 방법 중에서 Ait-Sahalia (1999, 2002, 2006)에 의하여 제안된 급수전개법을 중심으로 살펴보게 된다. 특히 급수전개법에서는 디킨연산자를 반복적으로 적용하여 급수항들을 얻게 되는데, 본 연구에서는 반복적인 디킨연산자의 계산을 편리하게 할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 다음 절에서는 확산모형 전이확률밀도의 급수전개에 필요한 기본적인 정리들에 대하여 살펴보게 될 것이다. 그 다음 절에서는 Ait-Sahalia가 제안한 급수전개법의 내용을 검토하게 된다. 그 다음으로는 반복적인 디킨연산자 계산과 관련된 알고리즘을 제안하게 된다.

2. 거사노프정리와 전이확률밀도

확률편미분방정식 (1.1)의 추세계수 a_t 와 확산계수 b_t 는 특정 모수들을 포함하는 형태로 정의된다. 확률과정에 대한 관측값들로부터 이러한 모수들을 알아내는 추론 과정에 대하여 생각해 보기로 하자. 추정대상이 되는 모수들의 집합을 일반적으로 θ 라고 나타내기로 하자. 추정하고자 하는 모형에 따라서 θ 는 달리 정의된다. 예를 들어 CKLS 모형은 모수 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_0, \gamma)$ 를 통하여 정의된다. 추세계수 a_t 와 확산계수 b_t 가 θ 의 함수임을 명시하기 위하여, 필요에 따라 $a(\theta, \cdot)$ 나 $b(\theta, \cdot)$ 와 같은 방법으로 나타낸다.

추세계수가 $a(\theta, \cdot)$ 이고 확산계수가 $b(\theta, \cdot)$ 로 주어지는 확률편미분방정식 (1.1)은 확률과정 X_t 에 대한 연속된 시구간에서의 확률분포를 특정 하는데 반하여, 모형의 추정을 위하여 자료로 제공되는 값

$\{X_{t_i}\}_{i=0}^n$ 들은 이산적인 시점 $\{t_i\}_{i=0}^n$ 에서 관측된 값들이다. 주어진 자료는 이산 시점에서 얻어진 자료인데 반하여, 주어진 모형은 연속 시간 모형이므로, 관측되지 않은 많은 시점에서의 자료가 결측치가 되는 그런 경우에 대한 추론 방법이 필요하다. 이를 위하여 사용되는 대표적인 추정방법으로는, 크게 우도 중심의 추정법과 적률 중심의 추정법으로 나눌 수 있다. 우도 중심의 추정법은 확산모형으로부터 다양한 방법을 통하여 이산 시점들 사이에서의 전이확률밀도를 구하고 그에 관측자료를 대입하는 방법을 이용한다. 적률 중심의 추정법에는, 일반화 적률추정법(Generalized Method of Moments; GMM), 시뮬레이션 적률추정법(Simulated Method of Moments; SMM) 등의 방법이 있다. 적률추정법은 우도추정법과 달리 정확한 우도를 알 필요 없고, 모형으로 가정되는 분포의 적률과 자료에서 얻어지는 표본 적률 사이의 관계만 일치시키면 되므로, 제시된 모형과 자료가 정확하게 일치하지 않아도 사용할 수 있는 강건한(robust) 추론법으로, 전통적으로 널리 사용되어온 확산모형 추정방법이다. 우도추정법과 적률추정법 이외에도 비모수적추정법이나 간접추정법(indirect inference) 등의 방법이 연구되고 제안되기도 하였다. 앞서 최근 활용이 제안되는 확산모형은 그 모형이 점점 더 복잡해지고 더 많은 모수들이 개입이 되어 있다는 점을 언급하였다. 이에 따라 확산모형에 대한 추정법도, 모형에 대한 민감한 추정이 가능한, 우도추정법이 점차 중요시 되고 있다. 대표적인 우도추정법 중의 하나로 Ait-Sahalia (1999)는 근사적 최대우도추정법(Approximated Maximum Likelihood Estimation method; AMLE)을 제안하였다. 우도추정법은 크게 유한차분 근사법을 이용한 접근법과 거사노프정리(Girsanov theorem)를 이용한 방법으로 나눌 수 있다. Pederson (1995)은 유한차분 근사법과 시뮬레이션 방법을 이용한 우도추정법을 제안하고 있다. Ait-Sahalia (1999)과 Beskos 등 (2006)은 거사노프정리에 근거한 방법이다. 거사노프정리를 이용한 우도추정법들은 확산모형의 추정을 위하여 다음과 같은 확산계수 안정변환을 고려하고 있다.

확산계수 안정변환은 확산계수가 $b(x) = \sigma_0\sigma(x)$ 와 같이 x 의 함수로 주어진 경우,

$$h(x) = \int^x \frac{du}{\sigma(u)} \tag{2.1}$$

와 같이 부정적분으로 얻어지는 함수 $h(\cdot)$ 를 이용하여, $Y_t = h(X_t)$ 인 변환을 통하여 얻어지는 확산확률과정 Y_t 는

$$dY_t = a(Y_t)dt + \sigma_0 dW_t \tag{2.2}$$

와 같이 확산계수가 상수가 되는 특성을 갖는다. 여기서

$$a(h(x)) = \frac{a(x)}{\sigma(x)} - \frac{\sigma_0^2}{2} \sigma'(x) \tag{2.3}$$

인 관계가 있다. 초기값 조건 $X_0 = x_0$ 이 주어진 경우에서 X_t 의 분포를, $\mathcal{P}(x_t|x_0)$ 라 하고, 초기값이 $Y_0 = y_0$ 로 주어진 조건하에서의 Y_t 의 분포를, $\mathcal{Q}(y_t|y_0)$ 라 하면, X_t 와 Y_t 사이에 함수적 관계가 성립되어 있는 경우에 변수 각각에 대한 확률측도 사이에는 $\mathcal{P}(x_t|x_0) = \mathcal{Q}(y_t|y_0)$ 인 관계가 있으므로,

$$\frac{d\mathcal{P}(x_t|x_0)}{d\lambda(x_t)} = \frac{d\mathcal{Q}(y_t|y_0)}{d\lambda(y_t)} \frac{d\lambda(y_t)}{d\lambda(x_t)}$$

인 관계가 성립한다. 따라서 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도 $p^t(x_0, x_t)$ 와 변환된 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^t(y_0, y_t)$ 사이에는

$$p^t(x_0, x_t) = \frac{q^t(h(x_0), h(x_t))}{\sigma(x_t)}$$

인 관계가 성립한다. 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도는 확산계수 안정변환을 통하여 얻어진 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^t(y_0, y_t)$ 로부터 곧바로 구해진다. 이때 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도는 거사노프정리로부터 얻어진다.

거사노프정리는, 확산과정 $Y_s = \{Y_s | s \in (0, t)\}$ 에 대한 확률척도 Q 와 Y_s 가 브라운운동(Brownian motion)이 되게 하는 중립확률척도 W 에 대하여,

$$M_t = \frac{dQ(y_t, y_s | y_0)}{dW(y_t, y_s | y_0)}$$

라고 정의하면,

$$\log M_t = \int_0^t a(y_s) dy_s - \frac{1}{2} \int_0^t a^2(y_s) ds \quad (2.4)$$

인 관계가 있음을 말한다.

이때 $A(y) = \int_0^y a(v) dv$ 라 하고 이또보조정리를 적용하면,

$$dA(Y_t) = a(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} a'(Y_t) dt$$

이고

$$A(y_t) - A(y_0) = \int_0^t a(y_s) dy_s + \frac{1}{2} \int_0^t a'(y_s) dt$$

이므로, $g(y) = (a^2(y) + a'(y))/2$ 라 할 때,

$$\log M_t = A(y_t) - A(y_0) - \int_0^t g(y_s) ds \quad (2.5)$$

인 관계로 표현된다. 또한 $M_t = M_t(y_0, y_t, y_s)$ 는

$$M_t = \frac{dQ(y_t | y_0)}{dW(y_t | y_0)} \cdot \frac{dQ(y_s | y_0, y_t)}{dW(y_s | y_0, y_t)}$$

와 같이 나타나므로,

$$\frac{dQ(y_t | y_0)}{dW(y_t | y_0)} = \frac{dQ(y_t | y_0)}{dW(y_t | y_0)} \cdot \int dQ(y_s | y_0, y_t) = \int M_t dW(y_s | y_0, y_t)$$

이다. 첫번째 등호는 적분값이 1이 되므로 당연히 성립하는 것이고, 두번째 등호는 앞서 얻은 M_t 에 대한 관계식을 대입하여 얻어진다. 이로부터 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^t(y_0, y_t)$ 는

$$q^t(y_0, y_t) = \frac{dW(y_t | y_0)}{d\lambda(y_t)} \cdot \frac{dQ(y_t | y_0)}{dW(y_t | y_0)} = \mathcal{N}_t(y_t - y_0) \cdot \int M_t dW(y_s | y_0, y_t)$$

과 같이 표현된다. 여기서 $\mathcal{N}_t(y)$ 는 평균이 0이고 분산이 t 인 정규분포의 확률밀도함수이다. 즉, \bar{W}_s , $s \in (0, t)$ 를 $\bar{W}_0 = y_0$ 이고 $\bar{W}_t = y_t$ 인 브라운다리(Brownian bridge) 확률과정이라고 하면,

$$\begin{aligned} q^t(y_0, y_t) &= \mathcal{N}_t(y_t - y_0) \cdot E \left[M_t \left(y_0, y_t, \bar{W}_s \right) \right] \\ &= \mathcal{N}_t(y_t - y_0) \cdot e^{A(y_t) - A(y_0)} \cdot E \left[e^{-\int_0^t g(\bar{W}_s) ds} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

이다. 위의 식 (2.6)은 Rogers (1985)와 Dacunha-Castelle과 Florens-Zmirou (1986)에 제시된 결과와 일치한다.

3. 전이확률밀도 급수근사법

Ait-Sahalia (2002)는 $q^t(y_0, y)$ 를 함수적으로 근사하는 방법으로 다음과 같은 두 가지 방법을 제안하였다. 하나는 위의 식 (2.6)에서 $E[e^{-\int_0^t g(\tilde{W}_s) ds}]$ 부분을 급수형태

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(y|y_0) \frac{t^k}{k!}$$

와 같이 표현하고 그 유한함으로 근사하는 방법이다. 여기서 $c_0(y|y_0) = 1$ 이고, 모든 $j \geq 1$ 에 대하여

$$c_j(y|y_0) = j(y - y_0)^{-j} \int_{y_0}^y (w - y_0)^{j-1} \left[g(w) c_{j-1}(w|y_0) + \frac{1}{2} D_w^2 c_{j-1}(w|y_0) \right] dw$$

이다. 다른 하나는 $e^{A(y_t) - A(y_0)} \cdot E[e^{-\int_0^t g(\tilde{W}_s) ds}]$ 부분을 급수형태로 전개하여 그 유한함으로 근사하는 방법이다. 다음에서 두번째 방식의 전개방법을 구체적으로 살펴보기로 하자.

먼저 $Y_t \sim q^t(y_0, y_t)$ 라 하고,

$$z(y_t) = t^{-\frac{1}{2}}(y_t - y_0)$$

에 대하여, $Z = z(Y_t)$ 와 같이 변환된 Z 는 $q_Z^t(y_0, z) = t^{1/2} q^t(y_0, y_0 + t^{1/2} z)$ 인 분포를 따르고, $q_Z^t(y_0, z)$ 는 다음 성질을 갖는다.

- (1) $t \rightarrow 0$ 임에 따라서, $q_Z^t(y_0, z) \rightarrow \phi(z)$ 이다.
- (2) $q_Z^t(y_0, z) = \phi(z) \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j H_j(z)$ 이다.
- (3) $\eta_j = \eta_j(t, y_0) = 1/j! E[H_j(Z)]$ 이다.

여기서 $\phi(z)$ 는 표준정규분포의 확률밀도함수이고, $H_j(z)$ 는 허미타항식(Hermite polynomial)이다. 즉, $H_j(z)$ 는 다음 관계식으로 부터 생성되는 다항식이다.

$$(-D_z)^j \phi(z) = H_j(z) \phi(z) \tag{3.1}$$

이다. $H_0(z) = 1, H_1(z) = z, H_2(z) = z^2 - 1$ 이고

$$H_{j+1}(z) = zH_j(z) - jH_{j-1}(z)$$

인 순환적 관계가 있다($j > 0$). 허미타항식을 Ait-Sahalia (1999)의 논문에서와 같이 $(D_z)^j \phi(z) = H_j(z) \phi(z)$ 인 형태로 정의하기도 하고, 혹은 $(D_z)^j e^{-z^2} = H_j(z) e^{-z^2}$ 인 형태로 정의하기도 한다. 이후에서 언급되는 허미타항식은 식 (3.1)에 따라 정의된다. 이와 같이 정의되는 허미타항식은

$$\langle H_i, H_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_i(z) H_j(z) \phi(z) dz = i! \cdot I(i = j)$$

인 성질을 갖는다. 여기서 $I(A)$ 는 A 가 참이면 1이고, 거짓이면 0인 값을 갖는 함수이다. 즉, 허미타항식들의 집합 $\{H_j\}_{j=0}^{\infty}$ 는 함수공간에서의 완비직교기저(complete orthogonal basis)를 형성한다. 임의의 함수 $f(z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j H_j(z),$$

여기서 $\{H_j\}_{j=0}^{\infty}$ 에 의하여 생성되는 함수공간 상으로의 사영의 성질에 따라

$$\eta_j = (\langle H_j, H_j \rangle)^{-1} \langle H_j, f \rangle$$

이다. 이때 $f(z) = [\phi(z)]^{-1} q_Z^t(y_0, z)$ 라 하면, $\langle H_j, f \rangle = E[H_j(Z)]$ 이므로, $\eta_j = E[H_j(Z)]/j!$ 인 결과를 얻게 되고, 위의 (2), (3)과 같은 결과를 얻는다. 여기서

$$m_j(s) = E[H_j(z(Y_s)) | Y_0 = y_0]$$

라고 정의하면, η_j 의 정확한 의미는 $\eta_j = m_j(t)/j!$ 이다. 함수 $m_j(s)$ 대한 Taylor 전개를 이용하면,

$$m_j(t) = \sum_{k=0}^K \left[\mathcal{A}_y^k H_j(z(y)) \right]_{y_0} \frac{t^k}{k!} + E \left[\mathcal{A}_y^K H_j(z(Y_s)) | Y_0 = y_0 \right] \frac{t^{K+1}}{(K+1)!} \quad (3.2)$$

을 얻는다. 이로부터 Z 에 대한 전이확률밀도 $q_Z^t(y_0, z)$ 는 다음과 같이 정의되는 급수 $q_{(J,K)}^t(y_0, z)$ 로 근사된다.

$$q_{(J,K)}^t(y_0, z) = \phi(z) \sum_{j=0}^J \eta_j^K H_j(z),$$

$$\eta_j^K = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^K \left[\mathcal{A}_y^k H_j(z(y)) \right]_{y_0} \left(\frac{t^k}{k!} \right).$$

위의 근사식 $q_{(J,K)}^t$ 를 구하기 위해서는 허미타항식에 디킨연산자를 반복적으로 적용하여 $\mathcal{A}_y^k H_j(z(y))$ 에 대한 계산을 명확한 형태로 표현할 수 있어야 한다. Ait-Sahalia (2002)는 초기 몇개항에 대하여, η_j^K 들을 나열하고 있으나, 그 일반적인 항을 구하는 방법을 제시하지 못하고 있다. 다음 절에서는 일반항을 구하기 위한 효율적인 알고리즘을 살펴보게 될 것이다.

4. 디킨연산자의 반복계산 알고리즘

허미타항식에 디킨연산자를 반복적으로 적용하는 계산, 즉

$$\mathcal{A}_y^k H_j(z(y)) = \left\{ a(y) D_y + \frac{1}{2} D_y^2 \right\}^k H_j(z(y)) \quad (4.1)$$

에 대한 계산은 다음과 같은 알고리즘에 의하여 명시적으로 표현이 가능하다.

정리 4.1 먼저 $\mathbf{d}_{2k}^t = (D_y, D_y^2, \dots, D_y^{2k})$ 를 y 에 대한 미분연산자들로 이루어진 크기 $2k$ 인 열벡터라 하고, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k(y)$ 와 $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(y)$ 는 $\mathbf{A} = \mathbf{A}(y)$ 로부터 다음과 같이 순차적으로 정의되는 열벡터라고 하자. 초기값으로 $\mathbf{v}_0 = 1$ 이라 하고, $k = 0, 1, 2, \dots$ 에 대하여

$$\mathbf{u}_k^t = (\mathbf{A} \mathbf{v}_k^t, 0) + \frac{1}{2} \{ (D_y \mathbf{v}_k^t, 0) + (0, \mathbf{v}_k^t) \}$$

$$\mathbf{v}_{k+1}^t = (D_y \mathbf{u}_k^t, 0) + (0, \mathbf{u}_k^t)$$

라고 반복적으로 정의하자. 그러면,

$$\mathcal{A}_y^k H_j(z(y)) = \mathbf{u}_{k-1}^t(y) \cdot \mathbf{d}_{2k}(H_j(z(y))) \quad (4.2)$$

와 같다.

위의 정리 4.1은 수학적 관점에서만 보면 미분연산자의 일반적인 성질을 적용하는 것에 불과하다. 위 정리 4.1의 의미는 벡터형태의 구성방식을 통하여 허미타항식에 대한 미분과정과 확산모형에 따라 달라지는 추계계수 a 에 대한 미분을 분리하여 적용한 이후, 그 결과를 곱의 형태로 나타낼 수 있음을 보인다고 할 수 있다. 위 정리의 타당성을 보이기 위하여 $\mathcal{A}_y H_j$ 로부터 $\mathcal{A}_y^2 H_j$ 가 얻어지는 과정을 보이는 것으로 그 증명을 대신하기로 한다. 일반적인 $\mathcal{A}_y^k H_j$ 는 다음 과정을 반복적으로 적용하여 얻어진다. 먼저 $\mathbf{u}_0^t = (a, 1/2)$ 이고 $\mathcal{A}_y H_j(z) = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{d}_2(H_j(z))$ 이므로,

$$\mathcal{A}_y H_j = \mathbf{u}_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \end{pmatrix} D_y H_j$$

와 같이 표현된다. 이에 단킨연산자 \mathcal{A}_y 를 반복적용하여 $\mathcal{A}_y^2 H_j$ 를 얻는 과정은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_y^2 H_j &= \left(a, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \end{pmatrix} D_y \left[\mathbf{u}_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ D \end{pmatrix} D H_j \right] \\ &= \left(a, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \end{pmatrix} \left\{ D_y \mathbf{u}_0^t + \mathbf{u}_0^t \begin{pmatrix} D_y \\ D^2 \end{pmatrix} \right\} D_y H_j \\ &= \left(a, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \end{pmatrix} \left[\mathbf{v}_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \\ D_y^2 \end{pmatrix} D_y H_j \right] \\ &= \mathbf{u}_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ D_y \\ D_y^2 \\ D_y^3 \end{pmatrix} D_y H_j \end{aligned}$$

인 관계가 성립한다. 여기서, $\mathbf{u}_1^t = (aa' + a''/2, a^2 + a', a, 1/4)$ 이다.

허미타항식의 특성중의 하나인 $D_z H_j(z) = j H_{j-1}(z)$ 인 성질을 반복적으로 적용하면,

$$D_z^i H_j(z) = \begin{cases} \frac{j!}{(j-i)!} H_{j-i}(z), & i \leq j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad (4.3)$$

이 되고, $D_y = t^{-1/2} D_z$ 인 관계가 있으므로

$$\mathbf{d}_{2k}(H_j(z)) = \left(t^{-\frac{1}{2}} D_z, t^{-\frac{2}{2}} D_z^2, \dots, t^{-k} D_z^{2k} \right)^t H_j(z) \quad (4.4)$$

이다. 이와 같은 관계를 식 (4.2)에 대입하면,

$$\left[\mathcal{A}_y^k H_j(z(y)) \right]_{y_0} = \mathbf{u}_{k-1}^t(y_0) \cdot \mathbf{d}_{2k}(H_j(0))$$

인 결과를 얻는다. 이를 다시 식 (3.2)에 대입하여 $m_j^K = j! \eta_j^K$ 에 관한 식을 정리하면, $u_{k,i}$ 를 벡터 \mathbf{u}_k 의 i -번째 원소라 하고 $a \wedge b$ 를 a 와 b 중 작은 값이라고 할 때,

$$m_j^K(t) = H_j(0) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{j \wedge 2k} \frac{j!}{k!(j-i)!} u_{k-1,i}(y_0) H_{j-i}(0) t^{\frac{2k-i}{2}} \quad (4.5)$$

가 된다. 또한

$$H_j(0) = \begin{cases} (-1)^{m+1} \cdot \prod_{u=0}^m (2u-1), & j = 2m, \\ 0, & j = 2m+1, \end{cases}$$

인 관계가 있으므로 식 (4.5)는 일반적인 j 와 K 에 그 값이 손쉽게 계산가능하다. 이로부터 전이확률밀도 $q_z^t(y_0, z)$ 를 근사하기 위한 방법으로

$$q_{(J,K)}^t(y_0, z) = \phi(z) \sum_{j=0}^J \frac{1}{j!} m_j^K(t) H_j(z)$$

를 얻는다. 결과로 얻어진 근사법의 수리적 점근적 타당성에 대하여는 Ait-Sahalia (2002)에서 찾을 수 있다.

5. 결론

확산모형에 대하여 우도추정법을 고려하는 경우, 확산모형의 전이확률밀도를 구하는 문제는 매우 중요한 과정이다. 전이확률밀도를 구하는 방법에 관하여 많은 연구자들이 다양한 접근법을 제시하고 있다. 그 중에서도 Ait-Sahalia (1999, 2002, 2006)와 Ait-Sahalia와 Yu (2006)는 급수전개법을 이용해서 전이확률밀도를 근사하는 방법을 제안하였다. 제안된 급수전개법에서는 허미타항식에 대한 딥킨연산자의 반복적용이 중요한 역할을 한다. 본 연구에서는 허미타항식에 대하여 딥킨연산자를 반복적용하여 계산하는데 필요한 알고리즘을 제안하였다.

Ait-Sahalia는 자신의 근사법을 시험하기 위하여, Symbolic 계산이 가능한 Mathematica 등의 패키지 소프트웨어를 이용하여 계산할 수 있음을 밝히고 있다. 또한 Ait-Sahalia는 자신이 제안한 근사법을 시험해보고자 하는 연구자들에게 관심되는 모형에 따라 달라지는 급수 계수를 구하여 준다고 한다. 이런 점은 Hurn 등 (2007)에도 언급되어 있다. 그러나 이런 점은 역설적으로 Ait-Sahalia가 제안한 근사법을 적용하는데 있어서 급수의 계수를 구하는 것이 일반 연구자들에게는 장애물로 작용하고 있다는 의미이다.

본 연구에서 제안된 방법은 연구자들이 확산모형의 전이확률밀도를 구하는데 있어서 복잡하고 무거운 Symbolic 계산이 가능한 패키지형 소프트웨어의 도움이 없이도 C언어 등을 이용하여 간단하게 직접 프로그래밍이 가능한 길을 열어주고 있다. 뿐만아니라, 본 연구의 결과는 급수전개에 의한 근사적방법의 계산시간을 단축시켜주어, 확산모형의 추정방법론에 대한 비교 연구 등에서 급수전개법에 의한 근사적방법의 장점을 부각시키는 효과가 기대된다.

참고문헌

- Ahn, D. and Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics, *The Review of Financial Studies*, **12**, 721-762.
- Ait-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361-1395.
- Ait-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223-262.
- Ait-Sahalia, Y. (2006). Likelihood inference for diffusions: A survey, *Frontiers in Statistics: In Honor of Peter J. Bickel's 65th Birthday*, Imperial College Press.
- Ait-Sahalia, Y. and Yu, J. (2006). Saddlepoint approximations for continuous-Time Markov processes, *Journal of Econometrics*, **134**, 507-551.

- Beskos, A., Papaspiliopoulos, O., Robert, G. O. and Fearnhead, P. (2006). Exact and computationally efficient likelihood-based estimation for discretely observed diffusion processes, *The Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **68**, 333–383.
- Brandt, M. and Santa-Clara, P. (2001). Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to Exchange Rate Dynamics in Incomplete markets, *Technical Report*.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- Cox, J. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions, Working paper, Stanford University (reprinted in *Journal of Portfolio Management*, 1996, **22**, 15–17).
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385–407.
- Dacunha-Castelle, D. and Florens-Zmirou, D. (1986). Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations, *Stochastics*, **19**, 263–284.
- Durham, G. and Gallant, R. (2001). Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion Processes, *Technical report*.
- Elerian, O., Chib, S. and Shephard, N. (2001). Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions, *Econometrica*, **69**, 959–993.
- Eraker, B. (2001). MCMC analysis of diffusion models with application to finance, *Journal of Business & Economic Statistics*, **19**, 177–191.
- Hurn, A., Jeisman, J. and Lindsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390–455.
- Kloeden, P. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer.
- Nicolau, J. (2002). A new technique for simulating the likelihood of stochastic differential equations, *Econometrics Journal*, **5**, 91–102.
- Oksendall, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer.
- Pederson, A. R. (1995). A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **22**, 55–71.
- Rogers, L. (1985). Smooth transitional densities for one-dimensional diffusions, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **17**, 157–161.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

A Note on Series Approximation of Transition Density of Diffusion Processes

Eun-kyung Lee¹ · Young-soo Choi² · Yoon Dong Lee³

¹Department of Statistics, Ewha Womans University

²Department of Mathematics, Hankuk University of Foreign Studies

³Sogang University University

(Received February 2010; accepted March 2010)

Abstract

Modelling financial phenomena with diffusion processes is frequently used technique. This study reviews the earlier researches on the approximation problem of transition densities of diffusion processes, which takes important roles in estimating diffusion processes, and consider the method to obtain the coefficients of series efficiently, in series approximation method of transition densities. We developed a new efficient algorithm to compute the coefficients which are represented by repeated Dynkin operator on Hermite polynomial.

Keywords: Diffusion processes, transition density, Girsanov theorem, Dynkin operator, Hermite polynomial.

Research of the first author was supported by Priority Research Centers Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2009-0093827). Research of the second author was supported by university Research Grant 2009 of Hankuk University of Foreign Studies. Research of the third author was supported by Sogang University Research Grant of 2009.

³Corresponding author: Associate Professor, Sogang University University, 1st SinSoo-Dong, Mapo-Gu, Seoul 121-742, Korea. E-mail: widyle@sogang.ac.kr