

극단 손실값들을 이용한 VaR의 추정과 사후검정: 사례분석

서성호¹ · 김성곤²

¹질병관리본부 만성병조사과, ²서울시립대학교 통계학과

(2009년 10월 접수, 2010년 3월 채택)

요약

시가총액에 따른 인덱스(INDEX) 투자를 했을 경우에, VaR(Value at Risk)을 종합주가지수(KOSPI)로부터 얻은 수익율의 극단 손실값들로부터 추정한다. 이를 위해, 극단값 이론 중 BM(Block Maxima) 모형을 적용하며, 극단 손실값들의 비독립적 발생을 고려하기 위하여, extremal index 역시 추정한다. 모형의 타당성을 알아보기 위해, 실패율방법을 이용한 사후검정(back-testing)을 실시한다. 사후검정을 통해, BM 모형을 적용한 VaR의 추정이 적절함을 알 수 있었다. 또한, 일반적으로 많이 사용되는 GARCH 모형을 이용한 VaR의 추정과 비교한다. 이를 통해, 오차가 t -분포를 따른다고 가정하는 경우, GARCH 모형을 이용한 VaR의 추정이 BM 모형을 이용한 경우와 사후검정결과에 차이가 없음을 확인하였다. 그러나, GARCH 모형을 통한 VaR 추정은 추정시점근방의 극단 손실값들에 민감하게 반응하지만, BM 모형은 그렇지 않았다. 따라서, 현 시점으로부터 단기기간동안의 손실위험은 GARCH 모형을 이용한 VaR의 추정값을 사용하는 것이 적절하며, 장기간 동안의 손실위험은 BM 모형으로부터 얻은 VaR의 추정값을 사용하는 것이 적절하다.

주요용어: 극단값이론, Value at Risk, KOSPI, 사후검정.

1. 서론

최근 금융위기를 비롯하여 1997년 IMF 외환위기와 같은 경제위기를 겪으면서 자산 가치의 변동성에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 자산 가치의 변동성에 대한 연구는 위험관리의 중요성이 대두되면서 점차 그 중요성이 커지고 있다.

금융시장 위험이 증가함에 따라 1988년 BIS(국제결제은행)의 바젤위원회는 금융건전성 확보를 목적으로 소위 '표준방법'이라고 불리는 은행의 적정 자기자본수준과 관련한 국제적 규제를 제시하였다. 금융환경의 급격한 변화로 기존 BIS 비율로는 금융기관 재무상태의 적정성을 평가하는데 한계가 드러남에 따라, 바젤위원회가 1998년 기존의 논의를 종합하여 신BIS 협약을 추진하여 2004년 6월 최종안을 확정 지었으며, 2006년 말부터 신BIS 자기자본 규제제도(신바젤협약)를 시행하기로 합의하였다. 우리나라는 비회원국이나 금융감독제도의 국제적 적합성 제고를 위하여 2008년 1월부터 신BIS 자기자본 규제제도를 도입하기로 결정하였다.

금융감독기관들은 위험을 측정하고 관리하는 방법으로 VaR(Value at Risk)의 사용을 권고하고 있다. VaR은 주어진 확률로 정의된 신뢰수준에서 초과하지 않게 되는 최대손실을 말한다. 이는 해당 기간 동안에 위험요소들의 변화로부터 발생할 수 있는 자산 또는 포트폴리오의 가치변화를 확률적으로 나타낸 것이다. VaR의 장점은 개념적으로 간단하며 모든 위험에 대해서 동일한 방법으로 측정할 수 있다는

²교신저자: (130-743) 서울시 동대문구 전농동 시립대길 13, 서울시립대학교 통계학과, 부교수.

E-mail: sgkim@uos.ac.kr

점이다. VaR을 이용하여 효과적으로 쉽게 측정할 수 있는 위험은 주식, 채권, 외환 등과 같이 시장에서 거래되는 자산들의 가격이 하락함으로써 발생할 수 있는 손실발생위험, 즉 시장위험에 관한 것이다. 그 외에도 금융기관이 가지고 있는 다른 위험들도 역시 VaR의 측정대상이 될 수 있다 (Jorion, 2000). VaR은 폭넓은 적용을 가지는 매우 일반적인 개념이며, 자산 포트폴리오들의 가치변동 위험을 측정하기 위해, security firms 또는 투자은행들이 주로 사용한다.

VaR은 그 유용성이 다양하다. 첫 번째로 정보를 보고하는 수단으로 사용되어진다. VaR은 회계자료가 제공하지 못하는 위험에 대한 정보를 제공한다. 회계정보는 국가 간 또는 회사 간 회계처리과정과 기준의 차이로 인해 비교평가 하기가 어렵지만, VaR은 위험을 나타내는 지표로 국가 간 또는 회사 간 비교가 용이하다. 두 번째로 자원배분 수단으로도 사용된다. 투자대상을 선정하는 과정에서 VaR에 미치는 영향을 고려하여 위험대비 수익을 극대화할 수 있도록 투자자원을 적절하게 배분할 수 있다. 세 번째로 성과평가수단으로 사용되어 진다. 자산 또는 수익에 대한 위험을 고려하지 않고 회계측면의 이익만을 고려하여 성과를 평가한다면, 추가위험을 부담하여 수익을 창출하려는 유인을 가지게 된다. 이로 인해, 주식을 소유한 사람에게 손실을 입힐 수 있다. VaR은 서로 다른 상품의 위험을 비교할 수 있도록 측정하므로, VaR을 이용하면 위험을 조정한 성과의 측정과 비교가 가능해 진다. 마지막으로 감독기관의 규제수단으로도 사용되어 진다. 현대 금융환경의 급속한 변화에 대응하여 각국의 감독기관들은 금융기관의 건전성을 중시하는데, 금융기관의 최소 요구자본을 결정하는 데 있어서 VaR을 위험의 측정치로 사용하고 있다.

시점 t 에서, $x_t, t = 1, 2, \dots$ 를 특정 자산의 1일 수익율들이라 하자. $\{x_1, x_2, \dots\}$ 가 stationary하며, 정상상태분포가 $F(\cdot)$ 으로 주어질 때, $VaR(p)$ 는 다음 식에 의해 주어진다.

$$F(-VaR(p)) = 1 - p.$$

즉, $-VaR(p)$ 는 1일 수익율 분포의 $(1 - p) \times 100\%$ 백분위 수이다. VaR을 추정하기 위한 많은 모형들이 제안되었다 (Duffie와 Pan, 1997; Hull, 2003). VaR을 사용하는데 있어서, 위험요인의 변화가 정규분포를 따른다고 가정하고 관찰된 자료를 이용하여 모수를 추정할 수 있다. 그러나, Cont (2001)에 의하면, 실제 금융시장에서는 극단적인 일들이 일어나며, 관찰된 자료의 형태는 정규분포보다 모양이 두 겹고 비대칭 분포를 따른다고 한다. 따라서, 정규분포와 다른 분포를 기반으로 하는 추정법이 필요하다. 이재득 (2003), 황선영과 박진아 (2005), 황선영 등 (2009)는 GARCH 모형을 이용하여, 국내시계열 금융자료를 분석하였다. 박상우와 장인식 (2003)은 극단값 이론을 이용하여, 국내시계열 금융자료를 분석하였으나, 본 논문에서와 달리, 각 시계열 값들이 서로 독립이라 가정하여 분석하였다. 이들이 서로 독립이 아니라 가정하는 것이 좀 더 현실적이라 할 수 있다.

본 논문에서는 시가총액에 따라 인덱스 투자를 했을 경우에, 위험관리지표인 VaR을 추정한다. KOSPI (Korea Composite Stock Price Index: 종합주가지수)의 극단 손실값들에 BM(Block Maxima) 모형과 GARCH 모형을 적용하여 VaR을 추정한다. 또한, 추정된 VaR에 사후검정(back-testing)을 시행하여, 각 모형을 비교하고자 한다. BM 모형을 이용하여, VaR을 추정하는 할 때, 극단값들의 비독립적 발생을 고려하기 위하여, extremal index를 추정한다. 이를 통해, 좀 더 정확한 VaR의 추정이 가능하다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 극단값 이론과 GARCH 모형을 설명하고, 3절에서는 극단값 이론을 이용한 BM 모형과 GARCH(1,1) 모형을 이용해서 VaR을 추정하는 방법에 대해서 설명한다. 4절에서는 모형의 타당성을 알아보기 위한 사후검정에 관해 설명한다. 5절에서는 KOSPI 지수를 이용하여 VaR을 추정하고, 모형의 타당성을 검증한다.

2. 모형설명

2.1. 극단값 분포

극단값 이론(Extreme Value Theory; EVT)에 따르면 장기간 동안 관찰된 일별 수익율의 극단값의 분포를, 일별 수익율에 대한 정확한 가정 없이 근사적으로 구할 수 있다. EVT를 설명하기 위해 다음을 가정하자.

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

여기서 X_1, X_2, \dots, X_n 은 같은 분포 $F(\cdot)$ 를 가지는 시계열 독립확률변수이다. $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ 는 일정기간 동안 측정된 관찰치로, 일별 평균 온도, 일별 수익율 등이 될 수 있다. M_n 은 n 개의 관측치의 최대값으로 표시된다. 만약 n 이 1년 동안 관찰된 수라면, M_n 은 연간 최대값이 된다. 모든 n 에 대해서 M_n 의 분포는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \Pr(M_n \leq z) &= \Pr(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) \\ &= F^n(z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

많은 경우 분포함수 $F(\cdot)$ 를 정확히 모르기 때문에, 식 (2.1)은 M_n 의 분포를 얻는데 있어 실제적으로 도움을 주지 못한다. 관찰된 자료로부터 $F(\cdot)$ 를 추정하여 식 (2.1)에 대입해 사용할 수 있으나, 추정된 $F(\cdot)$ 에서의 매우 작은 오차가 $F^n(\cdot)$ 의 추정에서 무시할 수 없는 오차로 커질 위험이 존재한다. $\Pr(M_n \leq z)$ 의 적절한 근사값을 얻기 위해, 상수 $a_n > 0, b_n$ 에 대해, 다음을 정의하자.

$$M'_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}.$$

$\{a_n > 0\}$ 와 $\{b_n\}$ 를 적절하게 선택하면 변수 M_n 이 발산하는 문제를 피할 수 있고, n 이 증가함에 따라서 M'_n 의 위치(location)와 규모(scale)가 안정되도록 할 수 있다. 즉, 적절한 $\{a_n\}$ 와 $\{b_n\}$ 의 선택을 통해서, M'_n 에 대한 극한 분포를 다음의 정리와 같이 얻을 수 있다.

정리 2.1 (Coles, 2001) $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 이 서로 같은 분포를 가지며 독립이라 하자. 어떤 Non-degenerate 분포함수 $G(\cdot)$ 에 대해,

$$\Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z), \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

를 만족하는 상수 수열 $\{a_n > 0\}$ 와 $\{b_n\}$ 이 존재한다면,

$$G(z) = \exp\left[-\left\{1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right] \quad (2.2)$$

이다. 여기서 $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \xi < \infty$ 이다.

분포함수가 식 (2.2)로 주어지는 분포를 GEV(Generalized Extreme Value) 분포라고 한다.

2.2. Block Maxima 모형

관측치 $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ 을 같은 수의 관측치들로 이루어진 block들로 나누자. 편의상 $N = mn$ 이라 놓고, n 을 한 block이 가지는 관측치의 수라 하면, m 은 총 block의 수가 된다. 또한,

$$z_i = \max\{X_{n(i-1)+1}, X_{n(i-1)+2}, \dots, X_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

이라 놓자. n 이 충분히 크다면, 정리 2.1은 $z_i, i = 1, 2, \dots, m$ 을 어떤 적절한 상수 a_n, b_n 를 이용하여 정규화한 값들의 분포가 GEV 분포로 근사될 수 있음을 말해준다. 즉, 어떤 모수 (μ, σ, ξ) 에 대해, 다음과 같은 근사식을 얻을 수 있다.

$$\Pr\left(\frac{z_i - a_n}{b_n} \leq z\right) \doteq \exp\left[-\left\{1 + \xi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right].$$

위 식으로부터, 우리는 아래처럼, $z_i, i = 1, 2, \dots, m$ 의 분포를 근사적으로 얻을 수 있다.

$$\Pr(z_i \leq w) \doteq \exp\left[-\left\{1 + \xi\left(\frac{w - (a_n + b_n\mu)}{b_n\sigma}\right)\right\}^{-\frac{1}{\xi}}\right]. \quad (2.4)$$

따라서, $z_i, i = 1, 2, \dots, m$ 의 분포 역시 모수 $\mu' = a_n + b_n\mu, \sigma' = b_n\sigma, \xi$ 를 갖는 EVT로 근사할 수 있다.

2.3. GARCH 모형

변동성을 가지는 시계열을 조건부 분산의 시각에서 모형화하기 위해, Engle (1982)은 다음과 같은 ARCH(Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) 모형을 제안하였다.

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

여기서,

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2}.$$

ARCH 모형에서 조건부 분산은 과거의 예측오차들 $(a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q})$ 의 함수이며, i 기 이전의 예측 오차가 현재의 변동성에 미치는 효과는 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, q$ 에 의해 나타난다.

GARCH(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) 모형은 ARCH 모형을 일반화한 모형으로 Bollerslev (1986)에 의해 제안되었다. 즉, 현시점의 조건부 분산은 과거의 예측오차와 과거의 조건부 분산에 따라 결정된다는 것이다. 통상적인 GARCH(p, q) 모형은 다음과 같다.

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t,$$

여기서,

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2}.$$

GARCH 모형에서는 조건부 분산이 과거의 예측오차들 $(a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q})$ 뿐만 아니라 조건부 분산들 $(\sigma_{t-1}, \sigma_{t-2}, \dots, \sigma_{t-q})$ 의 함수이다. 위의 식에서 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, q$ 는 과거로부터 관측된 예측 오차에 의한 조건부 분산의 변동성 효과인 ARCH 계수를 나타내며, $\beta_i, i = 1, 2, \dots, p$ 는 예측된 조건부 분산의 과거치에 의한 조건부 분산의 변동성효과인 GARCH 계수를 나타낸다.

본 논문에서는 간결한 모형을 얻기 위해 p 와 q 의 차수를 각각 1로 설정하였다. GARCH(1,1) 모형은 변동성이 시간에 걸쳐서 변하게 되는 금융시계열의 특성인 자기상관성을 고려하기 위해 사용되는 가장 단순한 형태이다. 이 모형에서, σ_t 는 다음과 같다.

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2}. \quad (2.5)$$

3. VaR의 추정

3.1. BM 모형에서 VaR의 추정

$\{X_1, X_2, \dots\}$ 을 일별 수익율에 -1 을 곱하여 새로이 얻은 시계열이라 하자. 즉, $\{X_1, X_2, \dots\}$ 는 일별 손실률의 시계열이다. 주어진 일정기간 동안 $X_i, i = 1, 2, \dots$ 들이 서로 독립이라면, BM 모형을 적용하여, VaR의 추정치를 다음과 같이 구할 수 있다. 주어진 시계열 자료를 같은 크기 n 을 가지는 block들로 나누어, 각 block에 속하는 손실률들의 최대값 $z_i, i = 1, 2, \dots$ 을 얻는다. n 의 값이 적절히 선택되었다면, 2.2절에서, $z_i, i = 1, 2, \dots$ 의 분포가 세모수 μ, σ, ξ 를 갖는 GEV로 근사될 수 있음을 보였다. $z_i, i = 1, 2, \dots$ 를 식 (2.2)에 적합시켜, 세 모수 μ, σ, ξ 의 *m.l.e.*를 얻는다. p 의 값이 1에 가까운 경우, $\text{VaR}(p)$ 는 식 (2.2)에서 $G(\text{VaR}(p)) = p^n$ 를 풀어 얻는다. 즉,

$$\widehat{\text{VaR}}(p) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left((-n \log p)^{-\xi} - 1 \right).$$

실제적으로는 극단적인 손실에 생겼을 경우에, 손실이 발생한 날을 전후한 일정 기간동안의 일별수익율들은 독립이 아니다. 이러한 경우, extremal index θ 를 고려해주어야 한다. $\{X_1, X_2, \dots\}$ 이 stationary process이고, $\{X_1^*, X_2^*, \dots\}$ 이 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 와 동일한 marginal 분포를 가지는 독립변수들이라고 가정하자. 또한, 다음을 정의하자.

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\},$$

$$M_n^* = \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\}.$$

적당한 조건하에서, $\Pr\{(M_n^* - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow G_1(z)$ 이라면, $(M_n - a_n)/b_n$ 의 분포 $G_2(\cdot)$ 는 다음과 같이 주어진다 (Coles, 2001).

$$G_2(z) = G_1^\theta(z),$$

여기서 θ 는 $\{X_1, X_2, \dots\}$ 의 extremal index이다. 위 식으로부터, 간단한 계산을 통해, 우리는 $G_2(\cdot)$ 역시 GEV 분포를 따른다는 것을 알 수 있으며, 2.2절에서 언급된 방법에 따라, $z_i, i = 1, 2, \dots$ 로부터, M_n 의 분포 역시 GEV 분포로 근사될 수 있음을 보일 수 있다. μ, σ, ξ 이 이 분포의 세 모수라 할 때, $\{X_1, X_2, \dots\}$ 의 $\text{Var}(p)$ 에 관한 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\text{VaR}(p) = \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left((-\theta n \log p)^{-\xi} - 1 \right).$$

θ 는 다음과 같이 추정될 수 있다 (Embrechts 등, 1997).

$$\hat{\theta} = n^{-1} \frac{\ln(1 - K_u/m)}{\ln(1 - N_u/mn)}, \quad (3.1)$$

여기서 N_u 는 주어진 threshold u 를 초과한 X_i 들의 수, K_u 는 threshold u 를 넘는 초과치를 포함한 block의 수이다. θ 는 연속한 극단값들의 평균 발생수의 역수로 볼 수 있다. 위 두 식으로부터, $\text{VaR}(p)$ 는 다음처럼 추정된다.

$$\widehat{\text{VaR}}(p) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left((-\hat{\theta} n \log p)^{-\xi} - 1 \right). \quad (3.2)$$

본 논문에서, 우리는 extremal index를 고려한 BM모형으로부터 $\text{VaR}(p)$ 를 추정한다. 여러 개의 threshold 값들에 대한, θ 의 값들의 추정치들을 식 (3.1)로부터 얻어, 그 평균값을 $\hat{\theta}$ 로 놓았다.

3.2. GRACH (1, 1) 모형에서 VaR 추정

GARCH(1,1) 모형에서, 시점 t 의 수익율의 분산이 주어졌을 때, 조건부 수익율의 분포가 정규분포를 따른다고 가정하자. $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ 을 추정하여, 식 (2.5)로부터, 시점 t 의 수익율의 분산은 다음처럼 추정된다.

$$s_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 a_{t-1}^2 + \hat{\beta}_1 s_{t-1}^2.$$

$-\text{VaR}(p)$ 는 수익율분포의 $(1-p) \times 100\%$ 백분위수이므로,

$$\widehat{\text{VaR}}(p) = -s_t z_{1-p},$$

여기서 $z_{1-p} = \Phi(1-p)$ 이고, $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 *c.d.f.*이다. 조건부 수익율 분포가 t -분포인 경우도 고려한다. 이 경우, $\text{VaR}(p)$ 는 다음처럼 추정된다.

$$\widehat{\text{VaR}}(p) = -s_t t_{1-p},$$

여기서, $t_{1-p} = \Phi_t(1-p)$ 이며, $\Phi_t(\cdot)$ 는 t -분포의 *c.d.f.*이다.

2.2절에서 언급했듯이, GARCH 모형의 조건부 분산이 과거 수익율뿐만 아니라, 조건부 분산의 시차의 함수로 구성되므로, 분석에 사용되는 GARCH(1,1) 모형의 한 시점 이전의 조건부 분산이 현재시점의 분산에 영향을 미친다. 따라서, 과거 조건부 분산을 먼저 추정해주어야 한다. 과거 처음시점의 분산을 1로 임의 설정을 하고 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \sigma_t$ 를 반복적으로 추정하여, 임의의 시점의 조건부 분산을 추정하였다.

4. 사후검정(Back-testing)

VaR 모형의 타당성은 사후검정(back-testing)을 통해 확인될 수 있다. Kupiec (1995)은 세 가지 방법을 소개 하였다: (i) 최초모형실패 방법, (ii) 실패율(failure proportion) 방법, (iii) 역사적 시뮬레이션 방법. 자세한 내용은 해당논문을 참고 하기 바란다. 본 논문에서는 실패율 방법을 사용하였다. 실패율은 검정기간 중에 실제 금융자산의 손실이 모형에 의해 예측된 $\text{VaR}(p)$ 를 초과하는 비율을 의미한다. 시계열 $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 를 다음처럼 정의하자. 시간 t 에서의 수익율이 $-\text{VaR}(p)$ 보다 작으면, $I_t = 1$ 로 놓고, $-\text{VaR}(p)$ 보다 크면, $I_t = 0$ 으로 놓는다. VaR의 추정에 사용된 모형이 적절하다면 I_t 의 평균 즉, 실패율은 $q = 1 - p$ 에 가까운 값을 가진다. 수익율들이 stationary하다고 가정했으므로, $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 역시 stationary하다. 실수 q_0 를 손실이 모형에 의해 예측된 $\text{VaR}(p)$ 보다 클 확률이라 놓자. 이 경우, 다음이 성립한다.

$$q_0 = E[I_t], \quad t = 1, 2, \dots$$

만약 q_0 가 0에 가까우면, I_t 의 값들은 근사적으로 서로 독립이다. 따라서 $\{I_t, t = 1, 2, \dots\}$ 는 연속된 베르누이 시행으로 볼 수 있으며, $N_f = \sum_{t=1}^n I_t$ 는 이항분포 $B(q_0, n)$ 를 따르게 된다. N_f 는 n 개의 수익율 중 $\text{VaR}(p)$ 을 초과하는 손실이 발생한 횟수로 총 실패수(Number of Failures)가 된다. 다음의 가설검정을 고려하자.

$$H_0 : q_0 = q, \quad H_1 : q_0 \neq q.$$

유의수준 α 에서의 N_f 의 신뢰구간을 구한다. N_f 가 이 신뢰구간 안에 위치하게 되면, 모형이 적절한 $\text{VaR}(p)$ 를 추정한다고 판단한다. 이를 벗어나게 되면, 모형이 적절하지 않다고 본다.

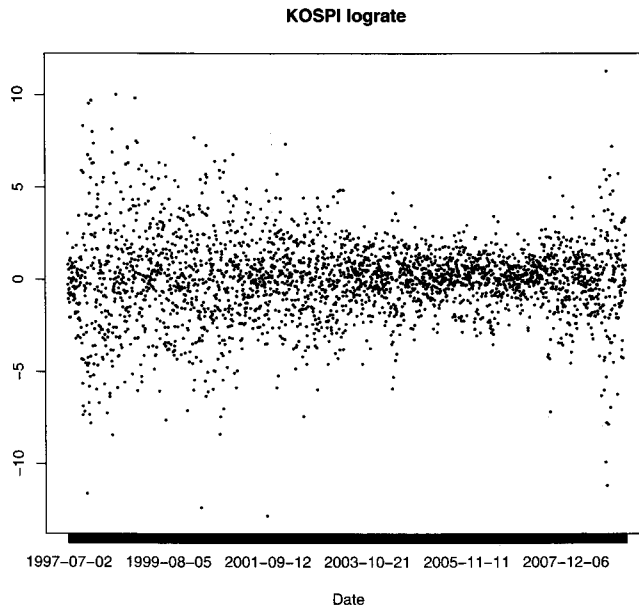


그림 5.1. KOSPI 일별 로그수익률

5. 국내 주식자료 분석

본 논문에서, 우리는 일정기간동안의 종합주가지수(Korea Composite Stock Price Index; KOSPI)의 로그수익률 자료에 BM 모형과 GARCH(1,1) 모형을 적합 시킨 후, 각각의 모형을 사용하여 KOSPI 로그수익률을 추정한다. 사후검정을 통해, 위 모형들의 타당성을 비교하였다. 분석은 R을 이용하였다.

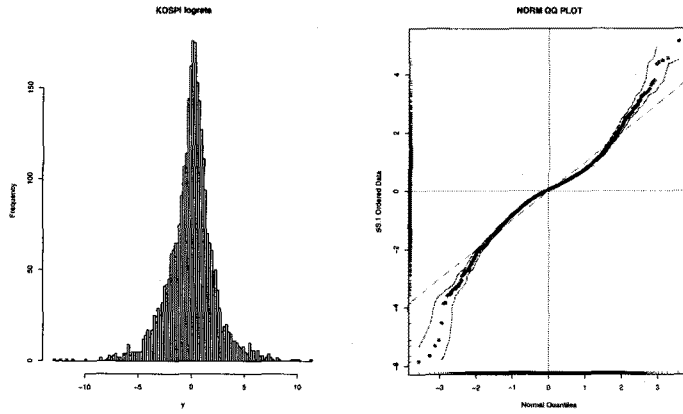
5.1. 자료

분석에 사용한 자료는 1997년 7월 1일부터 2009년 3월 23일까지의 종합주가지수 총 2883개의 종가(close)로부터 얻은 자료를 이용하여 2882개의 로그수익률을 구하여, 이를 수익률로 놓았다. 여기서, i 번째 일의 로그수익률은 다음과 같다.

$$r_i = [\log(y_{i-1}) - \log(y_i)] \times 100, \quad i = 2, 3, \dots, 2882.$$

KOSPI에 대한 산점도는 그림 5.1과 같다. 산점도를 보면 1997년과 2008년의 변동성이 크다. IMF 외 환위기와 최근의 금융위기 때에 변동성이 컸음을 나타낸다. 이를 통해 수익률 분포의 변동성이 시간이 지남에 따라 변한다는 것을 알 수 있다. 그림 5.2(a)의 히스토그램을 보면, 수익률의 분포가 정규분포에 비해 중심이 뾰족하고 꼬리가 두꺼움을 확인할 수 있다. 그림 5.2(b)의 QQ-plot에서도, 수익률의 형태가 정규분포가 아님을 알 수 있다. 꼬리가 정규분포보다 상당히 길며, 따라서 정규분포로 근사하여 사용하기에는 무리가 있다. 또한, Shapiro-Wilk normality test 결과는 수익률의 분포가 정규분포를 만족하지 않음을 말해준다.

1997년 7월 2일부터, 각각 780, 1000, 1300, 1600, 1900, 2882개의 수익률 자료들에 대해 기술통계를 얻어 보았다. 표 5.1에서 알 수 있듯이, 추정에 사용된 자료의 개수에 따라, 각각 평균, 표준편차, 범위, 사



(a) 일별 로그수익율의 히스토그램

(b) QQ Plot

그림 5.2. KOSPI 일별 로그수익율 분석

표 5.1. 수익율 기술통계

자료개수	평균	표준편차	범위		사분위수		
			min	max	25%	50%	75%
전체	0.0159	2.1919	-12.8040	11.2843	-1.0181	0.1033	1.0807
780	-0.0184	2.9762	-12.3675	10.0237	-1.7288	0.0167	1.5518
1000	-0.0287	2.8543	-12.3675	10.0237	-1.6611	0.0166	1.4572
1300	-0.0091	2.7178	-12.8047	10.0237	-1.5692	0.0506	1.4361
1600	0.0070	2.5492	-12.8047	10.0237	-1.3973	0.0691	1.2965
1900	0.0136	2.4065	-12.8047	10.0237	-1.2535	0.0724	1.2178

분위수를 구하였다. 수익율의 평균은 0에 가깝다. 또한, 추정에 사용된 자료의 개수에 따라 기술통계량의 변화가 보이지 않는다.

5.2. Block Maxima 모형의 적합

BM 모형에서는 주어진 자료를 동일한 크기를 가지는 여러개의 블록으로 나누어, 각 블록내의 최대치들을 극단값으로 보고, 이를 사용하여 모수 μ, σ, ξ 와 extremal index θ 를 추정한다. 이때, 블록의 크기 n 을 크게 하면, 블록의 수 m 이 작아진다. 따라서, 모수추정에 사용될 극단값 자료의 수가 줄어들어 모수추정의 분산이 커지고, 반대로 블록의 크기 n 을 작게 하면, 분산은 줄어들지만, 각 블록내의 최대치들의 분포를 식 (2.2)의 GEV로 근사하기가 힘들어져, 편의(bias)가 커진다. 따라서, BM 모형에서는 적절한 블록의 크기를 결정하는 것이 중요한 문제라고 할 수 있다. 본 분석에서, 우리는 블록의 크기를 20과 60으로 놓았다. 편이상 1997년 7월 2일부터 2009년 3월 23일까지의 수익율들에 -1 을 곱하여, 이를 로그손실률 혹은 손실률이라 놓고, 이 자료의 극단값을 분석하였다. 한 달에는 약 20일의 영업일이 있으므로, 블록의 크기가 20인 경우는 월별 최대치(즉, 월별 최대손실률)들의 분포를 GEV로 근사한 것으로 볼 수 있고, 블록의 크기가 60인 경우는 분기 최대치(즉, 분기별 최대손실률)들의 분포를 GEV로 근사한 것으로 볼 수 있다. 각각의 방법을 BM(20) 모형, BM(60) 모형이라 하자. 표 5.2는 1997년 7월 2일부터 각각 780, 1000, 1300, 1600, 1900개의 손실률들을 자료로 사용해 얻은 모수들의 추정값들을 보여준다. 이때 다양한 수의 과거자료를 사용한 이유는 사용된 과거자료의 개수가 VaR의 추정에 미치는

표 5.2. BM(20) 모형과 BM(60) 모형에서 추정된 모수들

		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	$\hat{\theta}$
BM(20)	780	4.5868	1.7374	-0.0340	0.794
	1000	4.2898	1.7736	-0.0322	0.769
	1300	4.0884	1.6892	0.0468	0.809
	1600	3.7279	1.6169	0.0653	0.776
	1900	3.3607	1.6612	0.0543	0.729
BM(60)	780	5.8742	1.9592	-0.0098	0.654
	1000	5.8116	2.0226	-0.0438	0.615
	1300	8.8232	1.9439	0.0329	0.753
	1600	5.1406	1.6453	0.2124	0.650
	1900	4.6704	1.8906	0.1041	0.610

표 5.3. BM(20) 모형과 BM(60) 모형에서 추정된 $\hat{\theta}$

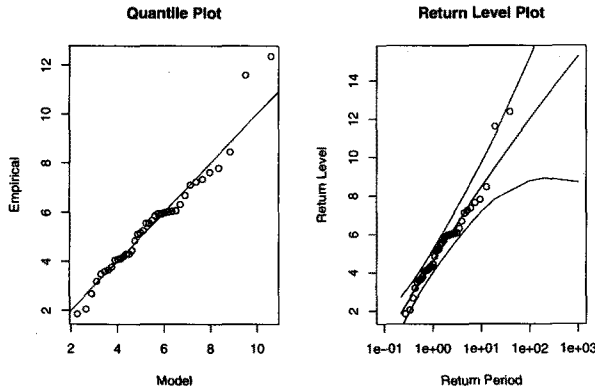
자료 개수	BM(20) 모형에서 추정된 $\hat{\theta}$ 와 해당 N_u						
780	0.675 (15)	0.916 (30)	0.803 (45)	0.790 (60)	0.783 (75)		
1000	0.745 (20)	0.951 (40)	0.740 (60)	0.763 (80)	0.763 (100)	0.769 (120)	0.651 (140)
1300	0.782 (20)	0.858 (40)	0.854 (60)	0.784 (80)	0.736 (100)	0.830 (120)	0.821 (140)
1600	0.764 (20)	0.813 (40)	0.812 (60)	0.778 (80)	0.709 (100)	0.799 (120)	0.756 (140)
1900	0.753 (20)	0.820 (40)	0.742 (60)	0.746 (80)	0.670 (100)	0.682 (120)	0.690 (140)
자료 개수	BM(60) 모형에서 추정된 $\hat{\theta}$ 와 해당 N_u						
780	0.474 (10)	0.746 (20)	0.795 (30)	0.592 (40)			
1000	0.748 (10)	0.654 (20)	0.610 (30)	0.542 (40)	0.521 (50)		
1300	1.003 (10)	0.673 (20)	0.759 (30)	0.741 (40)	0.590 (50)		
1600	0.837 (15)	0.663 (30)	0.554 (45)	0.557 (60)			
1900	0.801 (15)	0.615 (30)	0.540 (45)	0.482 (60)			

영향을 알아보기 위해서이다.

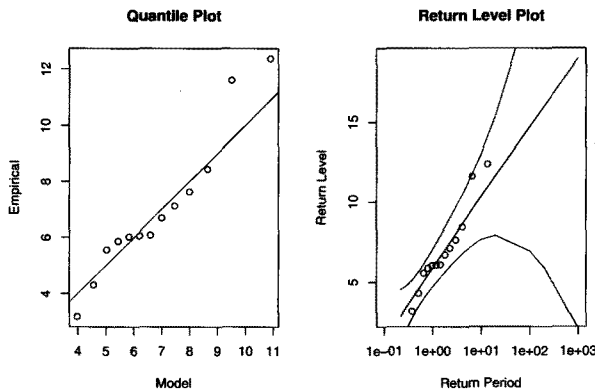
표 5.2에서 $\hat{\theta}$ 은 표 5.3에 있는 extremal index의 추정값 $\hat{\theta}$ 들의 평균이다. 식 (3.1)로부터, $\hat{\theta}$ 은 threshold u 의 값에 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 따라서, 하나의 threshold 값을 선택하기 보다는 적절한 범위에 있는 여러 개의 threshold 값들을 적용해 $\hat{\theta}$ 을 얻은 후, 이 값들의 평균을 사용하는 것이 θ 의 값을 추정하는 하나의 적절한 방법이라 생각할 수 있다. 표 5.3는 사용된 과거자료의 개수와 BM(20), BM(60) 모형별로 어떤 threshold u 를 초과한 손실들의 관측수가 N_u 가 되도록 u 의 값을 정해, 식 (3.1)로부터 얻은 $\hat{\theta}$ 의 값을 보여준다.

그림 5.3(a)는 1997년 7월 2일부터, 처음의 780개의 손실률 자료에 BM(20) 모형을 적합한 결과에 대한 Diagnostic Plots이다. 사용된 자료의 개수를 각각 1000, 1300, 1600, 1900으로 다르게 하여 적합한 결과도 위와 유사하게 나와서 생략하였다. 그림 5.3(b)로부터, 1997년 7월 2일부터, 처음의 780개의 손실률 자료에 BM(60) 모형을 적합한 경우 또한 유사한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그림 5.3으로부터 블록별 최대 손실률들이 GEV분포를 따름을 알 수 있다.

임의의 시점 t 에서 $\text{VaR}(p)$ 를 추정하기 위해, 먼저 이 시점으로부터 과거의 $n = 780$ 개의 손실률들에 BM(20) 모형을 적용해, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{\xi}$ 과 extremal index $\hat{\theta}$ 를 추정하였다. 이때, $\hat{\theta}$ 은 표 5.2와 5.3을 얻을 때 사용한 방법을 적용했다. 이 추정값들을 식 (3.2)에 대입하여, $\widehat{\text{VaR}}(p)$, $p = 0.95, 0.99, 0.995$ 를 얻었다. 그림 5.4는 $-\widehat{\text{VaR}}(p)$ 와 수익율과 함께 낸다. 이 그림에서 가장 위에 위치한 선은 시간의 변화에 따른 추정된 $-\widehat{\text{VaR}}(0.95)$ 을 나타낸다. 실제수익율이 이 선의 아래로 위치하게 되면 이를 실



(a) BM(20) 모형 적합



(b) BM(60) 모형 적합

그림 5.3. 780개 로그손실률에 BM(20) 모형과 BM(60) 모형을 적합하였을 경우의 적합도 분석

패(Failures)라 하고, 전체 검정 기간 중 이 선의 아래에 위치하는 점의 수가 실패수(Number of Failures)이다. n 의 값을 780, 1000, 1300, 1600, 1900으로 변화시켜, 여러 개의 신뢰수준 p 에 대해서, 실패수의 합을 표 5.6~5.10에 제시하였다. 이 실패수를 이용해 BM(20), BM(60) 모형의 타당성을 검정하였다.

5.3. GARCH(1,1) 모형의 적합

BM(20), BM(60) 모형을 적용해 그림 5.4를 얻은 방법과 마찬가지로, 임의의 시점 t 로부터 과거의 일정 개수 n 개의 자료를 GARCH(1,1) 모형에 적합시켰다. 그러나, 일별 손실을 자료가 아닌, 일별 수익율을 바로 사용하였다. 추정된 모수들을 이용하여 매 시점에서 VaR을 추정하였다. 표 5.4는 다양한 값의 n 에 대하여 각 모수들의 최초추정치를 나타낸다. 물론 이 값들은 시점 t 가 바뀔에 따라, 새롭게 추정된다. GARCH(1,1) 모형을 이용하여 추정된 모수들의 값이 n 에 따라 차이가 보인다. 1000개 이상의 자료를 사용하여 추정하였을 때는 추정값들의 차이가 크지 않았으나 780개와는 큰 차이를 보였다. 이는

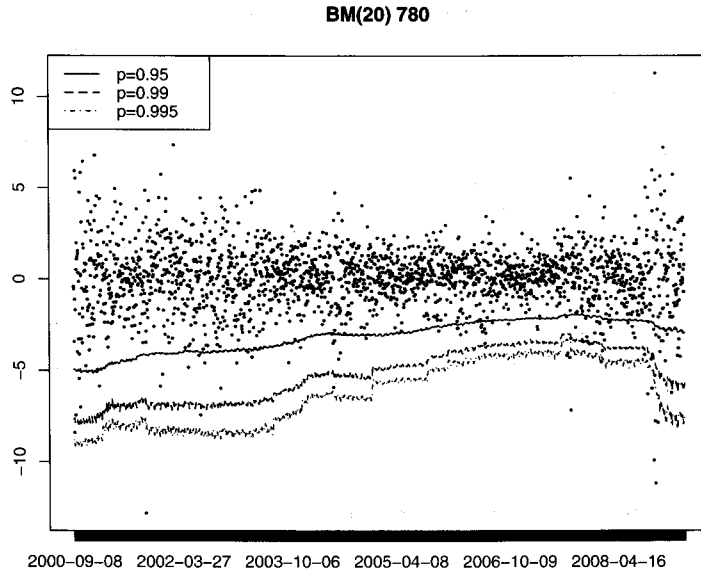


그림 5.4. BM(20) 모형에서 -VaR과 수익률

표 5.4. GARCH(1, 1) 모형에서 모수들의 최초추정치

추정에 사용된 자료수	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$
780	7.9626	0.1266	$1.403868e-13$
1000	0.1712	0.0906	0.8924
1300	0.3285	0.0892	0.8685
1600	0.1062	0.0754	0.9106
1900	0.0453	0.0769	0.9187

표 5.5. 잔차의 student-t 분포에 적합 시킨 후 추정된 자유도

자료수	df
전체	19.776
780	24.691
1000	23.653
1300	17.873
1600	17.918
1900	18.361

GARCH 모형에서 자료의 개수가 적절히 커야 안정적인 모수 추정이 가능할 것이라는 것을 시사한다. 먼저, GARCH(1, 1) 모형에 적합시킨 후 조건부 수익률이 정규분포를 따른다고 가정하고 VaR을 추정하였다. 또한, 이 값이 t -분포를 따르는 경우에도 VaR을 추정하였다. 이를 위해, 모형에 적합한 후, $\{r_t/\hat{\sigma}_t, t = 1, 2, \dots, 2882 - n\}$ 을 student-t 분포에 적합 시켜서 자유도를 추정하였다. 추정된 자유도는 표 5.5와 같다.

추정된 student-t 분포의 자유도를 보면 780과 1000개를 사용했을 때 얻은 자유도가 다른 개수를 사용한 경우와 차이를 보였다. GARCH(1, 1) 모형에 적합하기 위해서 적절한 자료의 크기가 필요하다고 생각

GARCH(1,1) with normal error 780

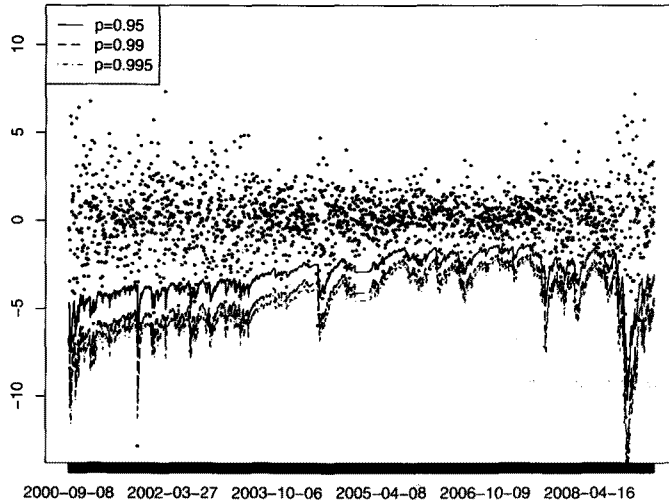
그림 5.5. GARCH(1,1) 모형에서 $-\text{VaR}$ 과 수익률

표 5.6. 직전자료 780개를 이용한 일일 VaR 검증(Back-testing 표본크기 2102)

p	Failures	BM(20)	BM(60)	GARCH(1,1) N	GARCH(1,1) t
95.00%	$85 < F < 125$	96	101	106	95
96.00%	$66 < F < 102$	79	88	88	78
97.00%	$47 < F < 79$	59	63	73	62
98.00%	$29 < F < 55$	39	49	52	43
99.00%	$12 < F < 30$	26	30	27	19
99.50%	$4 < F < 17$	13	16	18	12
99.90%	$F < 5$	7	10	8	4
99.95%	$F < 3$	5	8	6	3
99.99%	$F < 1$	1	4	3	1

된다. 그림 5.5는 $n = 780$ 인 경우에, GARCH(1,1) 모형으로부터 $\text{VaR}(p)$ 을 추정하여, $-\widehat{\text{VaR}}(p)$ 을 수익률과 함께 나타낸다.

5.4. 분석 결과

각 모형에 대해서 추정에 사용된 자료의 개수를 달리하여, 각각의 신뢰수준 p 에 대해 $\text{VaR}(p)$ 의 추정에 대한 타당성을 표 5.6~5.10을 이용해 검증할 수 있다. 앞서 설명하였듯이, 시점 t 에서의 손실률이 이 시점에서의 $\text{VaR}(p)$ 을 초과하는 횟수의 합인 실패수 N_f 를 5% 유의수준에서 검증하였다. 표 5.6~5.10을 보면, Failures에 제시된 F 구간에 각 모형의 실패수가 위치하게 되면 모형을 타당하다고 판단하고, 이를 벗어나면 타당하지 않다고 판단한다. 실패수가 F 구간의 하한보다 적다면 $\text{VaR}(p)$ 이 과대 추정되었다고 보고, 실패수가 F 구간의 상한보다 많다면 과소 추정되었다고 판단한다.

표 5.6~5.10에서, 직전 수익률자료 780개를 추정에 사용한 경우에 BM(20) 모형과 BM(60) 모형은 $0.95 \leq p \leq 0.995$ 인 경우에 F 구간에 실패수가 위치하여 타당하였다. GARCH(1,1) 모형에서 잔차가

표 5.7. 직전자료 1000개를 이용한 일일 VaR 검정(Back-testing 표본크기 1882)

p	Failures	BM(20)	BM(60)	GARCH(1,1) N	GARCH(1,1) t
95.00%	$75 < F < 113$	83	86	98	87
96.00%	$58 < F < 92$	66	67	82	69
97.00%	$41 < F < 71$	49	55	64	57
98.00%	$25 < F < 50$	36	36	45	36
99.00%	$10 < F < 28$	20	22	24	19
99.50%	$3 < F < 16$	13	14	15	12
99.90%	$F < 5$	6	4	9	4
99.95%	$F < 3$	3	3	5	2
99.99%	$F < 1$	0	1	2	1

표 5.8. 직전자료 1300개를 이용한 일일 VaR 검정(Back-testing 표본크기 1582)

p	Failures	BM(20)	BM(60)	GARCH(1,1) N	GARCH(1,1) t
95.00%	$62 < F < 96$	63	74	86	74
96.00%	$47 < F < 79$	49	54	71	62
97.00%	$34 < F < 61$	43	44	59	51
98.00%	$20 < F < 43$	30	31	43	29
99.00%	$9 < F < 24$	16	18	22	15
99.50%	$3 < F < 14$	9	9	14	7
99.90%	$F < 4$	4	3	7	2
99.95%	$F < 3$	2	2	4	1
99.99%	$F < 1$	0	0	2	0

표 5.9. 직전자료 1600개를 이용한 일일 VaR 검정(Back-testing 표본크기 1282)

p	Failures	BM(20)	BM(60)	GARCH(1,1) N	GARCH(1,1) t
95.00%	$48 < F < 80$	50	57	75	64
96.00%	$37 < F < 65$	43	47	63	56
97.00%	$26 < F < 51$	35	39	55	43
98.00%	$15 < F < 36$	23	24	36	28
99.00%	$5 < F < 20$	11	13	20	11
99.50%	$1 < F < 12$	9	8	10	7
99.90%	$F < 4$	2	2	6	2
99.95%	$F < 3$	2	2	4	0
99.99%	$F < 1$	0	0	1	0

표 5.10. 직전자료 1900개를 이용한 일일 VaR 검정(Back-testing 표본크기 982)

p	Failures	BM(20)	BM(60)	GARCH(1,1) N	GARCH(1,1) t
95.00%	$35 < F < 63$	42	49	63	54
96.00%	$27 < F < 52$	38	43	54	45
97.00%	$18 < F < 40$	27	32	44	34
98.00%	$12 < F < 29$	19	23	31	24
99.00%	$4 < F < 16$	10	10	17	10
99.50%	$1 < F < 10$	8	8	9	6
99.90%	$F < 3$	2	2	5	1
99.95%	$F < 2$	1	0	2	0
99.99%	$F < 1$	1	0	0	0

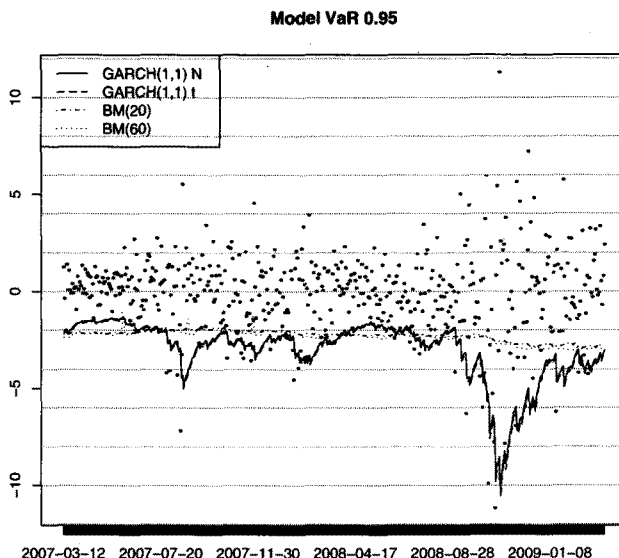


그림 5.6. 각 모형에서 $-VaR$ 과 수익률

정규분포를 따른다고 가정하고, $VaR(p)$ 을 추정하였을 때의 결과는 $0.95 \leq p \leq 0.99$ 일 때, F 구간 안에 실패수가 위치하여 타당하였다. 그리고, 조건부 수익률이 t -분포를 따른다고 가정하고 $VaR(p)$ 를 추정하였을 때에는 $0.95 \leq p \leq 0.999$ 일 때, 신뢰구간 안에 실패수가 위치하여 타당하였다. 추정에 사용된 자료의 개수를 증가시키면서 검정한 결과를 보면 $BM(20)$, $BM(60)$ 모형과 $GARCH(1,1)$ 모형에서 잔차가 t -분포를 따른다고 가정하고 $VaR(p)$ 를 추정하였을 때, 추정에 사용된 자료의 개수가 증가함에 따라서 높은 신뢰수준 p 에서도 타당하게 되었다. 그러나, $GARCH(1,1)$ 모형에서 조건부 수익률이 정규분포를 따른다고 가정하였을 때는, 추정에 사용된 자료의 개수가 증가함에 따라 $VaR(p)$ 가 과소추정되는 경향을 보였다.

그림 5.6은 $p = 0.95$ 인 경우에, 위에서 언급한 네 가지 방법에 의한 $-VaR$ 의 추정값들이 시간에 따라, 변화하는 모습을 실제 수익률의 산점도와 함께 보여준다. 이 그림으로부터, 우리는 $GARCH(1,1)$ 모형이 BM 모형에 비해 추정시점 근방의 극단 손실값들에 민감하게 반응함을 알 수 있다. 따라서, 현 시점으로부터 단기간동안의 손실위험은 $GARCH$ 모형을 이용해서, 장기간동안의 손실위험은 BM 모형을 이용해 VaR 을 추정해야함을 알 수 있다. Bekiros와 Georgoutsos (2005)는 Dow Jones Industrial Average 지수와 Cyprus Stock Exchange 지수를 이용한 분석에서 같은 결과를 얻었다.

6. 결론

본 논문에서는 극단값이론을 이용해, 시가총액에 따른 인덱스(INDEX) 투자를 했을 경우에, VaR 의 추정에 대한 사례분석을 하였다. KOSPI 지수의 월별, 분기별 최대 손실값들에 BM 모형을 적용하여, VaR 의 추정값들을 얻었다. 또한, 추정에 사용된 자료의 개수를 달리하여, 자료의 개수가 추정에 미치는 영향을 알아보았다. 실패율방법을 이용한 사후검정을 통해, BM 모형을 통한 $VaR(p)$ 의 추정이 적절함을 알아냈으며, 추정에 사용된 자료의 수가 증가할수록 더 높은 신뢰수준에서도 타당한 결과를 보였다.

BM 모형을 적용한 VaR 의 추정과 $GARCH(1,1)$ 모형을 이용한 VaR 의 추정을 사후검정결과를 가지

고 비교하였다. 잔차가 t -분포를 따른다고 가정한 GARCH(1, 1) 모형과 BM 모형은 VaR 추정에 별다른 차이를 보이지 않음을 확인하였다. 그러나, GARCH(1, 1) 모형은 BM 모형에 비해 추정시점 근방의 극단 손실값들에 민감하게 반응함을 알 수 있었다. 따라서, 현 시점으로부터 단기간동안의 손실위험은 GARCH 모형을 이용해서, 장기간동안의 손실위험은 BM 모형을 이용해 VaR을 추정하는 것이 적절하다.

참고문헌

- 박상우, 장인식 (2003). 극단값 이론을 이용한 우리나라 주가지수의 VaR의 추정, <응용통계>, **18**, 59-86.
- 이재득 (2003). 한국의 선물가격 변동성과 비대칭성분석: GARCH, EGARCH, TARCH분석, <한국경제통상학회>, **21**, 145-170.
- 황선영, 박진아 (2005). VaR (Value at Risk) for Korean financial time series, <한국데이터정보과학회지>, **16**, 283-288.
- 황선영, 최문선, 도중두 (2009). 사후검정(Back-testing)을 통한 다변량-GARCH 모형의 평가: 사례분석, <응용통계연구>, **22**, 261-270.
- Bekiros, S. D. and Georgoutsos, D. A. (2005). Estimation of Value-at-Risk by extreme value and conventional methods: a comparative evaluation of their predictive performance, *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money*, **15**, 209-228.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer-Verlag, London.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, **1**, 223-236.
- Duffie, D. and Pan, J. (1997). An overview of Value at Risk, *Journal of Derivatives*, **4**, 7-49.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events*, Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1008.
- Hull, J. C. (2003). *Options, Futures and Other Derivatives*, 5th ed., Prentice Hall.
- Jorion, P. (2000). *Value at Risk*, 2nd ed., McGraw Hill, New York.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **11**, 122-150.

Estimation of VaR Using Extreme Losses, and Back-Testing: Case Study

Sunghyo Seo¹ · Sunggon Kim²

¹Division of Chronicle Disease Surveillance, Korea Centers for Disease Control and Prevention

² Department of Statistics, University of Seoul

(Received October 2009; accepted March 2010)

Abstract

In index investing according to KOSPI, we estimate Value at Risk(VaR) from the extreme losses of the daily returns which are obtained from KOSPI. To this end, we apply Block Maxima(BM) model which is one of the useful models in the extreme value theory. We also estimate the extremal index to consider the dependency in the occurrence of extreme losses. From the back-testing based on the failure rate method, we can see that the model is adaptable for the VaR estimation. We also compare this model with the GARCH model which is commonly used for the VaR estimation. Back-testing says that there is no meaningful difference between the two models if we assume that the conditional returns follow the t -distribution. However, the estimated VaR based on GARCH model is sensitive to the extreme losses occurred near the epoch of estimation, while that on BM model is not. Thus, estimating the VaR based on GARCH model is preferred for the short-term prediction. However, for the long-term prediction, BM model is better.

Keywords: Extreme value theory, Value at Risk, KOSPI, back-testing.

²Corresponding author: Associate Professor, Department of Statistics, University of Seoul, Siripdae-gil 13, Dongdaemun-gu, Seoul 130-743, Republic of Korea. E-mail: sgkim@uos.ac.kr