격자다면체 부피에 대한 역사적 고찰 및 그 응용
— 수열 단원에의 응용 —

인제대학교 컴퓨터응용과학부 김향숙
mathkim@inje.ac.kr

성서고등학교 하형수
9429ha@hanmail.net

본 연구는 격자평면에서의 Pick의 정리에 대한 의의와 증명소개, Pick의 정리를 확장한 3차원 격자다면체에서의 Reeve의 정리 및 n차원 격자다면체로 일반화시킨 Ehrhart 다항식에 대한 소개와 역사적 고찰을 바탕으로 이를 고등학교 교육과정에서 다루고 있는 수열 단원에 응용하기위해, Reeve의 정리를 이용하여 3차원 격자다면체의 격자점의 개수와 부피와의 관계를 제시하고, 나아가 Pick의 정리와 Ehrhart 다항식을 적용하여 수열의 합을 구하는 공식들을 새로운 증명법으로 도출하고자 한다.

주제어 : 격자평면, Pick의 정리, 격자공간, 격자다면체, Reeve의 정리, Ehrhart 다항식

1 들어가는 말

도형의 넓이와 부피에 대한 개념은 초등학교 4학년부터 고등학교 과정까지 폭넓게 다루어지고 있는 수학과 기하영역의 중요한 교육과정 주제이다. 초등학교 수학과 교육과정을 살펴보면 4학년 측정영역에서 직사각형과 정사각형의 넓이를 다루기 시작하여 5학년에서 평면도형의 넓이, 6학년에서 원의 넓이, 겉넓이와 부피, 원기둥의 겉넓이와 부피, 중학교 수학과 교육과정에서는 1학년에서 부채꼴의 넓이, 입체도형의 겉넓이와 부피, 2학년에서 닮음도형의 넓이와 부피 및 고등학교 수학과 교육과정에서는 1학년에서 삼각함수를 활용한 삼각형의 넓이를 다루고 있다. 이 때 여러 가지 도형의 넓이와 부피는 대부분 변 또는 모서리의 길이를 이용해서 구하고 있다.

그러나 격자평면 위의 격자다각형에 대해서는 변의 길이에 대한 정보 없이도 오직 격자점의 개수만으로 다각형의 넓이를 구할 수 있음을 보이는 것이 Pick의 정리이다. Pick의 정리를 활용할 수 있는 격자점 종이는 격자다각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있는 도구이므로, 이를 이용하여 주어진 넓이를 갖는 다양한 도형을 그려보게 함으로써 학생들의 창의적 사고를 확산시키고 도형에 대한 관심과 흥미를 더욱 높일 수 있을 것이다. 따라서 꼭짓점이 격자점 위에 놓인 다각형의 넓이를 쉽게 구할 수 있는 Pick의 정리가 수학 수업에서 학생들이나 교사들에게도 상당한 매력으로 다가 갈 수 있는 가능성이 있다. 실제로 Pick의 정리는 초등학교 영재학급 수업 등에서 점판(geoboard)을 이용하여 탐구과제로 활용 되는 등 비교적 많이 쓰여 지고 있는 반면에 중 · 고등학교에서는 잘 활용되지 않는 편이며, 특히 초등학교 영재학급 수업에서 사용되더라도 대부분 Pick의 정리에 대한 직접적인 이해보다는 몇 개의 격자다각형에 대해 격자점의 개수와 넓이와의 관계를 추론하게 한 후 Pick의 정리를 확인하는 정도로 활용하고 있다. 이와 같이 단지 몇 가지에 대한 예시만으로 어떤 공식이나 정리를 받아들이도록 하는 것은 수학적 사고와 추론능력을 신장시키기에는 바람직한 교수법이 아닐 것이다. Pick의 정리를 수업에 도입하려면 적어도 Pick의 정리에 대한 역사적 고찰 및 여러 가지 증명법의 직관적인 설명을 곁들여 그 개연성을 이해 할 수 있도록 하는 것이 필요하다. 그것이 Pick이 Pick의 정리를 생각해낸 방법을 따라가는 것일 수 있으며, 또한 Pick의 정리의 다양한 증명방법을 알아봄으로써 공식을 의문 없이 받아들여 단순히 활용하는 것에서 느끼는 즐거움을 넘어서서 학생들에게 보다 수학적 증명의 아름다움과 그 논리성, 유연성을 접할 수 있도록 할 것이다.

본 연구에서는 격자다각형의 넓이 및 격자다면체의 부피에 관한 Pick, Reeve, Ehrhart의 연구결과들을 살펴보고, 3차원 격자다면체의 부피에 관한 Reeve의 정리를 이용하여 고등학교 수열단원에 나오는 $\sum_{k=1}^{n} k$, 삼각수의 합 및 사각수의 합 공식을 교과서에서 흔히 제시하는 대수적 방법이 아닌 다른 방법으로 보인 새 증명법을 소개한다.

2 Pick의 정리, Reeve의 정리 및 Ehrhart 다항식에 관한 역사적 고찰

2.1 격자다각형의 넓이에 관한 Pick의 정리

용어의 정의

평면에서 각 점들의 좌표가 정수인 점들을 **격자점**(lattice point)이라 하고 격자점으로 이루어진 평면을 **격자평면**(lattice plane)이라 한다. 각 꼭짓점들이 격자점으로 이루어지는 다각형을 **격자다각형**(lattice polygon)이라 한다.

Pick의 정리 소개

Pick의 정리는 격자다각형의 넓이 S를

$$S = I + \frac{B}{2} - 1$$

로 구할 수 있다는 것이다. 여기서 I는 주어진 격자다각형의 내부격자점의 개수이고 B는 경계격자점의 개수이다.

예를 들면, [그림 1]은 Pick의 정리를 이용하여 한 격자다각형의 넓이를 구한 것이다.

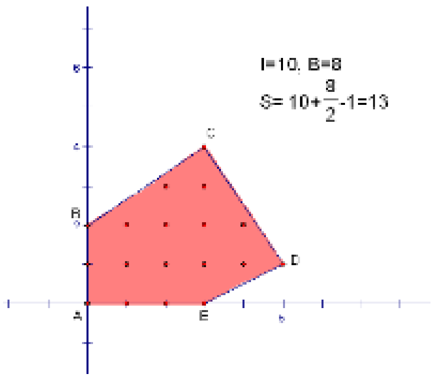

그림 1: Pick의 정리를 이용하여 격자다각형 $CBAED$의 넓이 구하기

실제로 Pick의 정리는 정작 Pick이 1899년 그의 논문을 출판한 후 바로 주목받지는 못했지만 1969년 Steinhaus가 Pick의 정리를 그의 책인 Mathematical Snapshots에 소개한 후, 많은 관심을 불러일으킨 것으로 알려져 있다.

지금부터 Pick의 정리에 대한 여러 가지 증명방법 중 하나를 소개한다.

2.2 Pick의 정리 증명법 소개

Pick의 정리를 다음과 같은 다섯 단계에 따라 증명하고자 한다.

(1) 격자선위에 4변이 놓여있는 직사각형인 경우 :

격자의 간격을 1로 해서 가로의 길이를 p, 세로의 길이를 q라 하면 이 직사각형의 넓이 S는

$$S = pq$$

이다([그림 2] 참조).

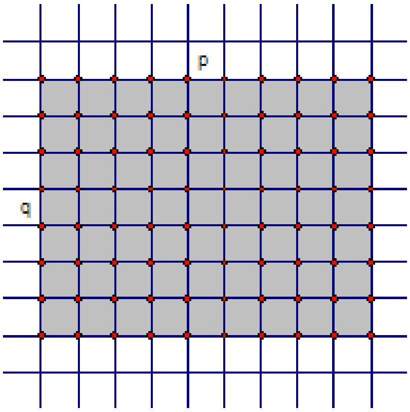

그림 2: 격자선 위에 4변이 놓여있는 직사각형

한편 내부에 포함되어있는 격자점의 개수 a와 변위에 놓여있는 격자점의 개수 b는 각각

$$a = (p-1)(q-1), \quad b = 2p + 2q$$

이므로 Pick의 공식에 따라 넓이 S를 구해보면

$$\begin{aligned} S &= a + \frac{b}{2} - 1 = (p-1)(q-1) + \frac{2p+2q}{2} - 1 \\ &= pq - p - q + 1 + p + q - 1 = pq \end{aligned}$$

이므로 이 경우에는 Pick의 공식이 성립함을 알 수 있다.

(2) 격자선위에 직각을 끼고 있는 두 변을 갖는 직각삼각형인 경우 :

직각삼각형의 넓이를 S, 직각을 끼고 있는 두 변을 이웃하는 변으로 하는 직사각형의 넓이를 S'이라 하면

$$S = \frac{1}{2}S'$$

이 성립한다([그림 3] 참조). 이제 이 직사각형의 내부에 속해있는 격자점의 개수를 a', 변위에 놓여있는 격자점의 개수를 b'이라 한다. 또, 직각삼각형의 빗변위에 놓여있는(단, 양 끝점은 제외) 격자점의 개수를 c라 한다. 이때 a', b'을 원래의 직각삼각형의 내부에 포함되어 있는

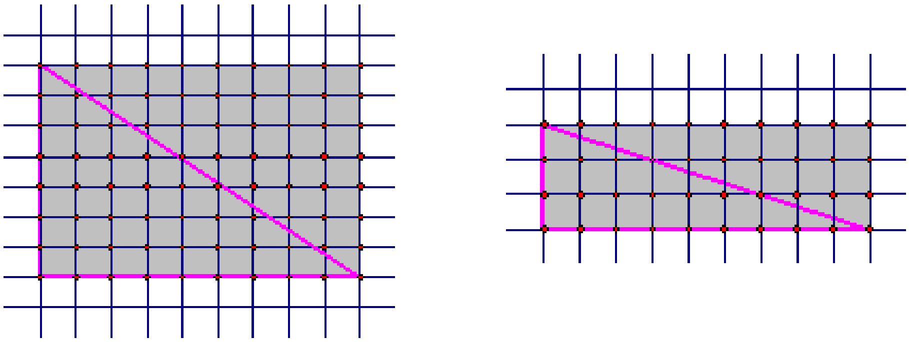

그림 3: 격자선위에 직각을 끼고 있는 두 변을 갖는 직각삼각형

격자점의 개수 a와 변위에 놓여있는 격자점의 개수 b로 나타내면

$$a' = 2a + c, \quad b' = 2(b - c) - 2$$

로 된다. 따라서 (1)로부터

$$\begin{aligned} S' &= a' + \frac{b'}{2} - 1 \\ &= (2a + c) + \frac{2(b - c) - 2}{2} - 1 \\ &= 2a + b - 2 \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$S = \frac{1}{2}S' = a + \frac{b}{2} - 1$$

이 되어, 이 경우에도 Pick의 공식이 성립함을 알 수 있다.

(3) 격자다각형 A가 두 개의 격자다각형 B, C로 분할될 때 :

(i) 만약 다각형 B, C에 대해서 Pick의 공식이 성립한다면 다각형 A에 대해서도 Pick의 공식이 성립함을 보이자.

이것은 다음과 같이 보일 수 있다. 다각형 A, B, C의 넓이를 각각 S, S_1, S_2라 하여, 다각형

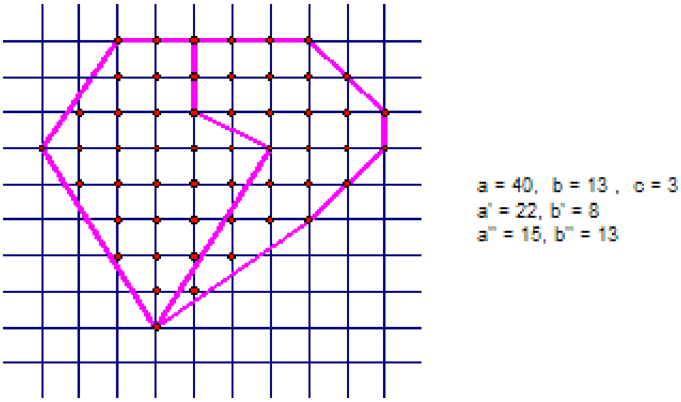

그림 4: 다각형 A가 두 개의 다각형 B, C로 분할될 때

B, C에 대해서 성립하는 Pick의 공식을

$$S_1 = a' + \frac{b'}{2} - 1, \quad S_2 = a'' + \frac{b''}{2} - 1$$

로 나타내기로 한다. 다각형 A를 다각형 B, C로 분할하는 선상에 놓여있는 양 끝점을 제외한 격자점의 개수를 c라 한다([그림 4] 참조). 이때

$$\begin{aligned} a &= a' + a'' + c, \\ b &= b' + b'' - 2c - 2 \\ S &= S_1 + S_2 \end{aligned}$$

로 되므로

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= a' + \frac{b'}{2} - 1 + a'' + \frac{b''}{2} - 1 \\ &= (a + a'' + c) + \frac{b' + b'' - 2c - 2}{2} - 1 \\ &= a + \frac{b}{2} - 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 이 경우에도 Pick의 공식이 성립한다.

(ii) 다각형 A에 대해서 Pick의 공식이 성립한다고 가정하자. 다각형 A를 두 개의 다각형

B, C 로 분할했을 때, 다각형 B 에 대해서 Pick의 공식이 성립한다면 다각형 C 에 대해서도 Pick의 공식이 성립함을 보이자.

실제로 이것은 위의 (i) 에서 $S = S_1 + S_2$ 가 Pick의 공식에 따라 표현되었기 때문에 그것을 이용하면

$$\begin{aligned} S_2 = S - S_1 &= \left(a + \frac{b}{2} - 1\right) - \left(a' + \frac{b'}{2} - 1\right) \\ &= a'' + \frac{b''}{2} - 1 \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

(4) 격자점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형일 때 :

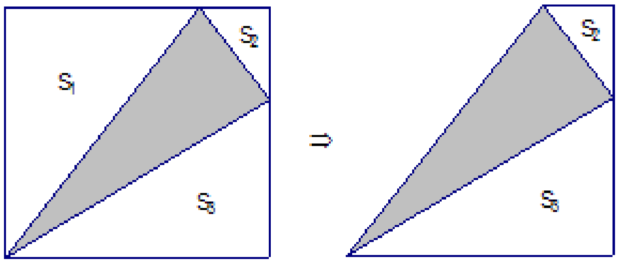

그림 5: 격자점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형일 때

이 경우에도 Pick의 공식이 성립한다. 실제로 주어진 삼각형의 꼭짓점을 지나고 4개의 변이 격자선 상에 있는 직사각형을 [그림 5] 처럼 항상 만들 수 있으며, 더욱이 이 직사각형에 (1) 로부터 Pick의 공식을 적용할 수 있다. 한편 (2) 로부터 직각삼각형 S_1 에 대해서도 Pick의 공식이 성립하므로, (3) 의 (ii) 로부터 직사각형에서 직각삼각형 S_1 을 제거한 다각형에 대해서도 Pick의 공식이 성립한다. 같은 방법으로 생각하면 [그림 5] 의 오른쪽 그림과 같이 다각형에서 직각삼각형 S_2, S_3 를 제거한 다각형 (즉, [그림 5] 에서 음영이 주어진 삼각형) 에 대해서도 Pick의 공식이 성립함을 알 수 있다. 그러므로 마지막으로 남은 삼각형에 대해서도 Pick의 공식이 성립한다.

(5) 격자점을 이어서 만든 일반적인 격자다각형일 때 : 이것을 보이기 위해서는 먼저『어떠한 다각형도 대각선을 그음으로써 2개의 다각형으로 분할할 수 있다』라는 사실이 요구된다. 이

사실은 당연한 듯이 보일지 모르겠지만, 일반적인 경우에 증명하려고 하면 막상 어디서부터 손을 써야할지 막막한 상당히 난해한 문제이다. 그래서 여기서는 이 사실은 받아들이기로 한다. 이제 다각형이 주어졌다면 대각선으로 이 다각형을 2개로 분할한다. 분할된 한 쪽 다각형을 다시 2개의 다각형으로 분할한다. 이와 같은 조작을 반복 시행해나가면 마지막으로 남는 것은 삼각형이 될 것이다. 최초의 격자다각형에서 이 삼각형을 제거한 다각형에 위의 조작을 반복 시행한다. 이렇게 함으로써 결국 주어진 격자다각형은 몇 갠가의 삼각형으로 반드시 분할됨을 알 수 있다. 각 삼각형에 대해서는 (2), (3)-(ii) 와 (4) 로부터 Pick의 공식이 성립함을 알고 있기 때문에, 이들 삼각형을 합쳐 만든 최초의 격자다각형에 대해서도 (3)-(i) 로부터 Pick의 공식이 성립함을 알 수 있다.

2.3 3차원 격자다면체의 부피에 관한 Reeve의 정리

용어의 정의

3차원 공간에서 각 점들의 좌표가 정수인 점들을 **격자점**(lattice point) 이라 하고 격자점으로 이루어진 공간을 **3차원 격자공간**(lattice space) 이라 한다. 각 꼭짓점들이 격자점으로 이루어지는 3차원 다면체를 **3차원 격자다면체**(lattice polyhedron) 라 한다.

Reeve의 정리 소개

Pick의 정리가 나온 이후, Pick의 정리를 확장한 3차원 이상의 격자공간에 있는 격자다면체로 Pick의 정리를 확장할 수 있을지에 대해 많은 연구가 이루어졌다. 그러나 3차원 격자공간에서조차도 Pick의 정리와 유사한 정리는 없다는 것을 다음의 예로써부터 알 수 있다.

[그림 6] 에서처럼 꼭짓점이 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ 인 삼각형을 밑면으로 하고 나머지 한 꼭짓점이 $(1,1,k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ 인 사면체 (**Reeve-사면체**라 불리어짐) 의 내부 및 경계격자점의 개수 I 와 B 는 각각 $I = 0$, $B = 4$ 로 일정하나 주어진 Reeve-사면체 부피는 k 에 따라 변하므로 I 와 B 의 관계식만으로는 표현될 수 없다.

이러한 관점에서 Reeve는 1957년에 3차원 격자공간에서 Pick의 정리를 다음과 같은 방법으로 개선하였다. 3차원 공간에서 좌표가 정수인 점들로 이루어진 집합을 L 이라하고, 새로운 점의 집합으로 L_n 을

$$L_n = \left\{ \frac{x}{n} \;\middle|\; x \in L \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

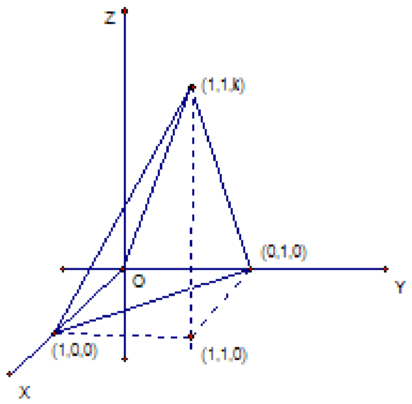

그림 6: Reeve-사면체

으로 정의하자. 예를 들면,

$$L_1 = L, \quad L_2 = \left\{ \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right) \;\middle|\; (a, b, c) \in L \right\}$$

이다. L의 3차원 격자다면체를 Γ라 할 때, L_n에서 헤아린 Γ의 경계점과 내부점의 개수를 합친 것을 $L_n(\Gamma)$, 경계점의 수를 $L_n(\partial\Gamma)$라 하면 주어진 Γ의 부피 $V(\Gamma)$는 다음 식을 만족한다 ([5]).

$$\begin{aligned} &2(n-1)n(n+1)V(\Gamma) = 2\{L_n(\Gamma) - nL(\Gamma)\} - \{L_n(\partial\Gamma) - nL(\partial\Gamma)\} \quad (n \geq 2) \\ &\quad L_n(\partial\Gamma) - n^2 L(\partial\Gamma) = 2(1 - n^2) \end{aligned}$$

이 정리는 얼핏 복잡해 보일 수 있지만, 위 식은 격자다면체 Γ가 주어졌을 때 $L_2 = \left\{ \frac{x}{2} \;\middle|\; x \in L \right\}$에서의 점의 개수만 알면 Γ의 부피를 구할 수 있다는 것을 보이고 있다.

예를 들면, Γ의 밑면의 세 꼭짓점이 $B(0,0,0), C(1,0,0), D(0,1,0)$이고 다른 한 꼭짓점이 $A(0,0,1)$인 사면체 Γ의 부피를 구해보자.

Reeve의 정리에 의하면

$$2(n-1)n(n+1)V(\Gamma) = 2\{L_n(\Gamma) - nL(\Gamma)\} - \{L_n(\partial\Gamma) - nL(\partial\Gamma)\}$$

이므로, 이 식에 $n = 2$를 대입하면

$$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot V(\Gamma) = 2\{L_2(\Gamma) - 2L(\Gamma)\} - \{L_2(\partial\Gamma) - 2L(\partial\Gamma)\}$$
$$L(\Gamma) = L(\partial\Gamma) = 4,$$
$$L_2(\Gamma) = L_2(\partial\Gamma) = 10$$

이다. 따라서 주어진 Γ의 부피 $V(\Gamma)$는

$$V(\Gamma) = \frac{1}{6}$$

임을 알 수 있다.

2.4 k차원 격자다면체의 부피에 관한 Ehrhart의 정리

용어의 정의

k차원 공간에서 각 점들의 좌표가 정수인 점들을 **격자점**(lattice point)이라 하고 격자점으로 이루어진 공간을 k**차원 격자공간**(k-dimensional lattice space)이라 한다. 각 꼭짓점들이 격자점으로 이루어지는 k차원 다면체를 k**차원 격자다면체**(k-dimensional lattice polyhedron)라 한다.

Ehrhart의 정리 소개

Reeve 이후에도 격자다면체에 관한 많은 연구가 이루어 졌고, 특히 1972년 프랑스의 수학자 Ehrhart는 k차원 격자다면체에 대하여 다음과 같은 정리를 발표하였다([7]).

격자다면체 P에 대해 P를 n배 확대한 것을 nP $(n \in \mathbb{N})$라 할 때

$$J_P = \text{card}(P \cap \mathbb{Z}^k), B_P = \text{card}(\partial P \cap \mathbb{Z}^k), I_P = \text{card}((P - \partial P) \cap \mathbb{Z}^k)$$
$$J_P(n) = J_{nP}, I_P(n) = I_{nP}, B_P(n) = B_{nP}$$
$$(\text{단, } \mathbb{Z}^k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \cdots, k\})$$

라 하자. 특히 P가 k차원 격자다면체라면, $J_P(n)$은 n에 대한 k차 다항식

$$J_P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_0$$

이고, 이 때

$$a_k = \mathrm{vol}(P), a_0 = 1, I_P(n) = (-1)^k J_P(-n)$$

이다.

Ehrhart의 결과에 의하면 $J_P(n)$의 k차 계수 a_k가 k차원 격자다면체 P의 부피인 것에 비해 3차원에서는 서로 다른 2개의 자연수 n에 대하여 $J_P, B_P, J_P(n), B_P(n)$을 이용해서 부피를 구할 수 있다. 특히 k차원 격자다면체에 대해서는 $(k-1)$개의 서로 다른 자연수 n_i에 대하여 $J_P(n_i), B_P(n_i)$를 계산하면 그 부피를 구할 수 있다.

Ehrhart의 정리에서 본 Pick의 정리에 관한 고찰

위에서 살펴본 내용을 바탕으로 1차원부터 3차원까지 Ehrhart의 정리를 조사해 보자.

(1) 1차원에서 Ehrhart의 정리

$J_P(n)$은 n에 대한 1차 다항식

$$J_P(n) = a_1 n + 1$$

이므로

$$J_P = a_1 + 1$$
$$\mathrm{vol}(P) = a_1 = J_P - 1$$

이 성립한다.

(2) 2차원에서 Ehrhart의 정리

$J_P(n)$은 n에 대한 2차 다항식

$$J_P(n) = a_2 n^2 + a_1 n + 1$$

이므로

$$J_P = a_2 + a_1 + 1$$
$$J_P(-1) = I_P = a_2 - a_1 + 1$$

이다.

$$\mathrm{vol}(P) = a_2 = \frac{1}{2}(J_P + I_P) - 1$$

이 된다. 이 때 $J_P = I_P + B_P$ 이므로 2차원에서 Ehrhart의 정리는 바로 Pick의 정리

$$\mathrm{vol}(P) = a_2 = I_P + \frac{1}{2}B_P - 1$$

과 같음을 알 수 있다.

(3) 3차원에서 Ehrhart의 정리

$J_P(n)$ 은 n 에 대한 3차 다항식

$$J_P(n) = a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n + 1$$

이므로, 이 식에 $n = 1, n = -1$ 을 대입하면, 그 결과는 각 각

$$J_P = a_3 + a_2 + a_1 + 1$$
$$(-1)^3J_P(-1) = I_P = a_3 - a_2 + a_1 - 1$$

이다. 위 두 식에서 구해야 하는 상수가 a_1, a_2, a_3 로 3개이므로 또 다른 자연수 $n = k$ 를 대입해야 $a_3 = \mathrm{vol}(P)$ 를 구할 수 있다.

따라서 위의 세 등식을 이용하여 $a_3 = \mathrm{vol}(P)$ 를 $J_P(n), J_P, I_P$ 에 관한 식으로 나타내면

$$(n-1)n(n+1)\,\mathrm{vol}(P) = J_P(n) - \frac{1}{2}(J_P - I_P)n^2 + n^2 - \frac{1}{2}(J_P + I_P)n - 1$$

이다. 여기서 $J_P - I_P = B_P$ 이므로 이 식은

$$(n-1)n(n+1)\,\mathrm{vol}(P) = J_P(n) - \frac{1}{2}B_P \cdot n^2 + n^2 - \frac{1}{2}(J_P + I_P)n - 1$$

이 된다. 따라서 3차원에서 Ehrhart의 정리는 바로 Reeve의 정리와 같음을 알 수 있다.

위의 3차원에서 Ehrhart의 정리를 구체적 예를 들어 설명해 본다. 밑면의 세 꼭짓점이 $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$이고 나머지 한 꼭짓점이 $(0,0,1)$인 3차원 격자다면체의 부피를 Ehrhart의 정리를 활용해서 구해보자.

다면체의 내부격자점의 개수는 0이므로 $(-1)^3 J_P(-1) = I_P = 0$, 다면체를 2배한 $J_P(2)$의 격자점의 개수는 10개 이므로 $J_P(2) = 10$이다. 따라서 이 결과들을 3차 Ehrhart 다항식

$$J_P(n) = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + 1$$

에 대입하면,

$$\begin{aligned} J_P &= a_3 + a_2 + a_1 + 1 = 4 \\ (-1)^3 J_P(-1) &= I_P = a_3 - a_2 + a_1 - 1 = 0 \\ J_P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1 = 10 \end{aligned}$$

이므로 세 등식을 연립해서 풀면

$$\mathrm{vol}(P) = a_3 = \frac{1}{6}$$

을 얻을 수 있다.

3 Pick과 Reeve의 정리를 활용하여 수열단원에 응용한 새로운 증명법

먼저 Pick의 정리를 활용해 수열단원의 자연수의 거듭제곱 합에 응용한 새로운 증명법을 소개하고자 한다.

3.1 $\sum_{k=1}^{n} k$의 새로운 증명법

대수적 증명법 소개

$\sum_{k=1}^{n} k$에 대한 증명은 고등학교 수학 I 의 수열단원에서 다룬다. 대부분의 교과서에서는 첫째항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열 합 S의 공식

$$S = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$$

를 먼저 다루고, 다음으로 이를 이용하여 $a_1 = 1, d = 1$ 인 등차수열의 합

$$S = \frac{n\{2 \times 1 + (n-1) \times 1\}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

을 구하는 전개방식으로 등차수열의 합을 다룬다.

새로운 증명법

지금부터 Pick의 정리를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k$ 를 구하는 새로운 방법을 유도해 보자.

먼저, Pick의 정리를 활용하기 위해 좌표평면상의 $(0,0), (n+2,0), (0,n+2)$ 를 꼭짓점으로 하는 직각삼각형을 생각해보자. 이 삼각형의 넓이는 $\frac{(n+2)^2}{2}$, 경계격자점의 개수는 $3(n+2)$ 개, 내부격자점의 개수는 $1+2+3+\cdots+n$ 이므로

$$S = \frac{(n+2)^2}{2}, \quad I = \sum_{k=1}^{n} k, \quad B = 3(n+2)$$

이다. 이것들을 Pick의 정리에 대입하여 계산하면 Pick의 정리를 이용한 $\sum_{k=1}^{n} k$ 의 새로운 증명법으로

$$\frac{(n+2)^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} k + \frac{3(n+2)}{2} - 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

을 얻을 수 있다.

3.2 삼각수의 합 및 사각수의 합에 대한 새로운 증명법

피타고라스학파 사람들은 존재하는 수는 모양을 가져야만 한다고 생각하여 수를 도형과 결부시켜 생각했다. 특히 그들은 점을 나타내는 모나드(monad, 단자(單子))를 예쁘게 배열해서 얻을 수 있는 수에 특히 관심을 보였다. 그 대표적인 것은 모나드를 정삼각형 모양으로 배열하여 얻어지는 수와 정사각형 모양으로 배열하여 얻어지는 수이다. 즉 그들은 아래 [그림 7]과 같이 모나드를 정삼각형

모양으로 배열하여 얻어지는 수를 **삼각수**라 하고, 아래 [그림 8]과 같이 모나드를 정사각형

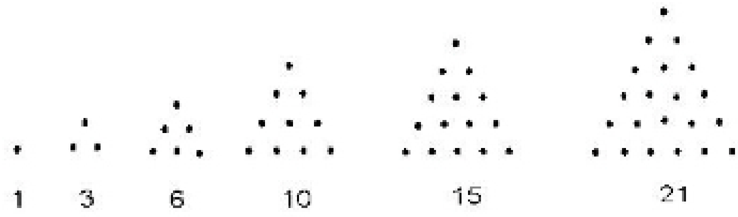

그림 7: 삼각수

모양으로 배열하여 얻어지는 수를 **사각수**라 불렀다.

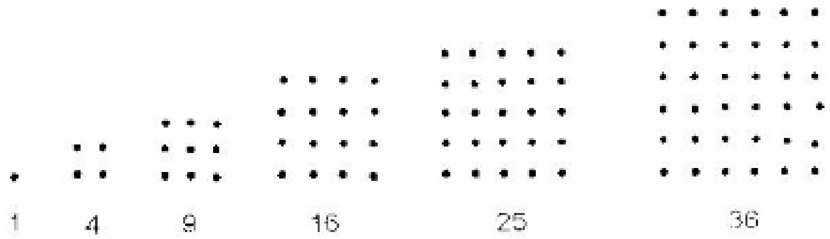

그림 8: 사각수

삼각수는 특히 고등학교 수학 I 에서 다루는 계차수열의 도입부분에서 학생들의 동기유발 소재로써 많이 다루어진다.

지금부터 대부분의 교과서에 소개된 삼각수의 합과 사각수의 합을 구하는 대수적 증명법을 소개하고, Reeve의 정리를 이용한 삼각수의 합과 사각수의 합을 구하는 공식을 새로운 증명법으로 유도하고자 한다.

대수적 증명법 소개

(1) 삼각수의 합에 대한 일반적인 증명

삼각수를 작은 수부터 차례로 나열하여 만든 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라고 할 때, 그 관계식은

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

이다. 이 식에 삼각수 계차수열의 일반항 $b_k = k+1$을 대입하여 계산하면

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$
$$a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)$$
$$a_n = \frac{n^2+n}{2}$$

이므로, 삼각수의 합을 구하는 공식 S_n은

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2}$$
$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

으로 구해진다.

(2) 사각수의 합에 대한 일반적인 증명

사각수의 합은 계차수열의 합으로도 지도할 수 있지만, 대부분의 교과서에서는 다음과 같은 항등식의 성질을 이용하여 사각수의 합을 지도한다.

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

위의 식에 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$을 차례로 대입하면

$$2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$
$$3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$
$$4^3 - 3^3 = 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+1)^3 - 1^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

이므로, 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n,$$
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

을 얻는다.

새로운 증명법

지금부터 Reeve의 정리를 이용하여 위에서 소개한 삼각수의 합과 사각수의 합을 구하는 공식에 대한 새로운 증명법을 유도해 보자.

(1) 삼각수의 합은

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이다.

(증명)

$$1+3+6+10+15+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$$

은 첫 번째 삼각수부터 n 번째 삼각수까지의 합이고 이것을 T_n 이라 두자.

한편 밑면의 세 꼭짓점이 $B(0,0,0), C(1,0,0), D(0,1,0)$ 이고 다른 한 꼭짓점이 $A(0,0,1)$ 인 사면체 Γ 의 격자점을 구해보면

$$L(\Gamma) = L(\partial\Gamma) = 4, L_n(\Gamma) = T_{n+1}, L_n(\partial\Gamma) = 2n^2+2, V(\Gamma) = \frac{1}{6}$$

이다([그림 9] 참조). 이 관계식을 Reeve의 정리에 적용하면

$$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) = 2(T_{n+1} - 4n) - (2n^2 + 2 - 4n) \quad (\text{단}, n \geq 2)$$

이므로

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}(n-1)n(n+1) = 2T_{n+1} - 2(n+1)^2, \\
T_{n+1} &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + (n+1)^2, \\
T_{n+1} &= \frac{(n-1)n(n+1) + 6(n+1)^2}{6}, \\
T_{n+1} &= \frac{(n+1)(n^2 - n + 6n + 6)}{6}
\end{aligned}
$$

이다. 따라서 삼각수의 합 T_{n+1} 에 관한 식

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

을 얻는다.

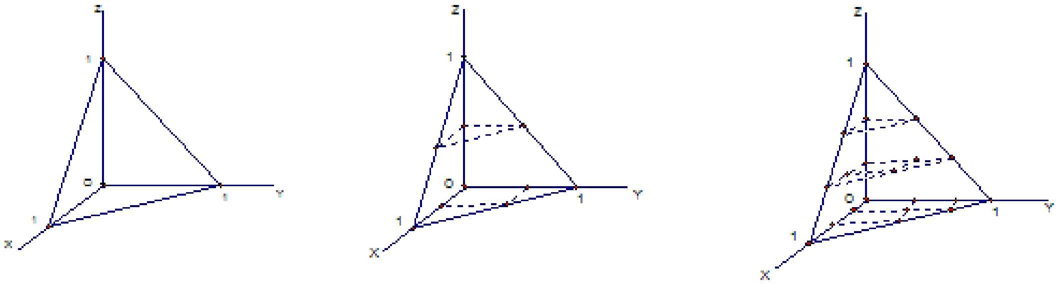

그림 9: 사면체 Γ 의 $L_1(\Gamma), L_2(\Gamma), L_3(\Gamma)$

(2) 사각수의 합은

$$1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이다.

(증명)

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + n^2$$

은 첫 번째 사각수부터 n 번째 사각수까지의 합이고 이 수의 합을 S_n 이라 두자. 여기서 밑면

의 서로 다른 네 꼭짓점이 $B(0,0,0), C(1,0,0), D(0,1,0), E(1,1,0)$ 이고 다른 한 꼭짓점이 $A(0,0,1)$ 인 오면체 Γ 의 격자점을 구해보면

$$L(\Gamma) = 5 = L(\partial\Gamma), V(\Gamma) = \frac{1}{3}, L_n(\partial\Gamma) = 3n^2 + 2$$

이다([그림 10] 참조).

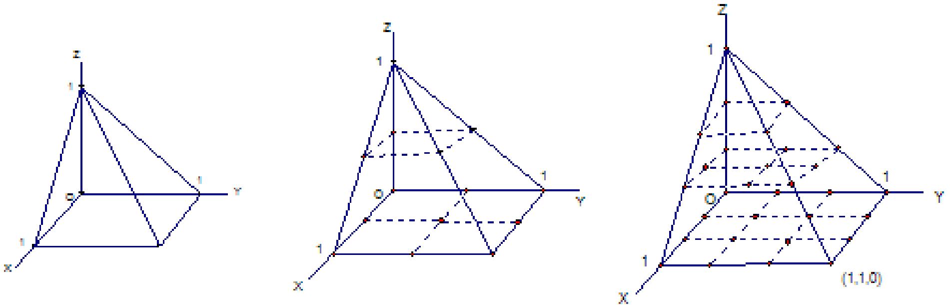

그림 10: 오면체 Γ 의 $L_1(\Gamma), L_2(\Gamma), L_3(\Gamma)$

이 관계식을 Reeve의 정리에 적용하면

$$\frac{2}{3}(n-1)n(n+1) = 2(S_{n+1} - 5n) - (3n^2 + 2 - 5n) \quad (\text{단}, n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} 2S_{n+1} &= \frac{2}{3}(n-1)n(n+1) + 3n^2 + 5n + 2, \\ 2S_{n+1} &= \frac{2}{3}(n-1)n(n+1) + (3n+2)(n+1), \\ 2S_{n+1} &= (n+1)\left\{\frac{2n^2 + 7n + 6}{3}\right\} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 사각수의 합 S_{n+1} 에 관한 식

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

을 얻는다.

4 결론 및 제언

본 연구에서는 격자다각형의 넓이 및 격자다면체의 부피에 관한 Pick, Reeve와 Ehrhart의 연구내용 분석을 통해 격자다각형의 넓이와 격자다면체 부피에 대한 연구가 어떻게 발전되었는지를 고찰하고, Pick의 정리 및 Reeve의 정리를 이용해 $\sum_{k=1}^{n} k$, 삼각수의 합 및 사각수의 합을 구하는 새로운 증명법을 소개하였다.

본 논문에서 살펴본 바와 같이 Pick의 정리는 2차원에서 성립하는 한 이론이 많은 연구가 거듭되어지면서 더 높은 차원으로 그 정리가 확장되어 갈 수 있음을 보여주는 수학의 역사적 가치뿐만 아니라 수학이론의 일반화 과정 및 수학발달의 과정을 보여주는 좋은 소재가 될 수 있음을 시사한다. 특히 본 논문은 Reeve의 사면체를 도입하여 정수 격자점의 내부 및 외부 점의 개수는 동일하더라도 부피가 다른 반례를 소개함으로써 2차원에서 성립하는 Pick의 정리는 3차원에서는 성립 할 수 없음을 보였고, Reeve가 Pick의 정리를 개선해 격자점 사이에 $\frac{n}{2}$ 격자선을 그어 Reeve의 정리를 얻는 과정, 더 나아가 Ehrhart는 Ehrhart 다항식을 도입함으로써 3차원뿐만 아니라 임의 차원의 격자공간에서 성립하는 정리를 얻는 이론적 근거 등을 제시하였다.

3차원 격자다면체는 학생들의 공간지각력 향상에도 매우 좋은 소재로서 활용이 가능하며, 고등학교 수학 I 의 수열단원에서 다루는 자연수 거듭제곱의 합을 구하는 공식의 시각화 모델로도 사용할 수 있다. 따라서 본 논문에서 유도한 격자공간의 격자다면체를 이용한 $\sum_{k=1}^{n} k$, 삼각수의 합 및 사각수의 합을 구하는 새로운 증명법들은 활용도 면에서도 충분한 가치를 갖는다고 할 수 있다. 이러한 새로운 증명법은 학생들에게 수학에 대한 흥미를 유발함은 물론이고 나아가 수학적 사고력을 신장시키는데 도움을 줄 것으로 기대된다.

참고 문헌

[1] 교육인적자원부 고시 제 2007 - 79호 [별책 8]

[2] 윤재한 외 14인, 『고등학교 수학 I 』, (주) 더텍스트, 2009

[3] 최용준 외 9인, 『고등학교 수학 I 』, (주) 천재교육, 2009

[4] 박진석, 김향숙, 『수학사와 함께떠나는 수학여행』, 경북대학교 강의록, 2007

[5] J. E. Reeve, “On the volume of lattice polyhedra,” *Proc. London. Math. Soc.* (3),7 (1957) 378-395.

[6] J. E. Reeve, “A further note on the volume of lattice polyhedra,” *J. London Math. Soc.* 34 (1959) 56-72.

[7] E. Ehrhart, “Sur le nombre de solutions des systemes diophantiens lineaires,” *U.E.R. de Mathematiques de Strasbourg,* 1972

[8] Hugo Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Dover Publication, New York, 1999

Historical review and it’s application on the volume of lattice polyhedron — Focused on sequence chapter —

Department of Computer Science, School of Computer Aided Science and Institute of Basic Science, Inje University Kim, HyangSook
Seong Seo High School Ha, HyoungSoo

This article includes an introduction, a history of Pick’s theorem on lattice polyhedron and its proof, Reeve’s theorem on 3-dimensional lattice polyhedrons extended from the Pick’s theorem and Ehrhart polynomial generalized as an n-dimensional lattice polyhedron, and then shows the relationship between the volume of 3-dimensional polyhedron and the number of its lattice points by means of Reeve’s theorem. It is aimed to apply the relationship to the visualization of sums in sequences.

Key Words: lattice plane, Pick’s theorem, lattice space, Reeve’s theorem, Ehrhart polynomial, lattice polyhedron

2000 Mathematics Subject Classification:
ZDM Subject Classification:

접수일 : 2010년 3월 5일 수정일 : 2010년 5월 6일 게재확정일 : 2010년 5월 10일