

'Maths With Attitude' 교구 프로그램 활용에 관한 소고¹⁾

김성준²⁾

본 연구는 초등수학에서 조작교구의 중요성과 함께 교구 프로그램의 개발 및 활용에 대해 생각해본 것이다. 최근 초등수학에서 활동과 구성, 조작은 중요한 주제로 다루어지고 있으며, 이를 위해 실생활과 자연현상, 사회현상에서의 다양한 소재와 상황을 연계하여 제시하고 있다. 더불어 공학 도구와 조작교구의 활용 역시 교수학습방법 측면에서 강조되고 있는 부분이다. 초등수학에서 교구의 활용은 교육과정 개정 및 교과서 개발과 함께 점차 강조되어 왔으며, 그 결과 칠교, 지오보드 등은 학년별, 영역별로 구체적인 활용 방안이 제시되고 있다. 본 연구에서는 이러한 연구의 연장선상에서 교구와 교구를 활용한 프로그램의 필요성을 강조하고 있으며, 이를 위해 호주에서 개발된 'Maths With Attitude' 교구 프로그램을 소개하고 있다. 이 프로그램은 주변에서 쉽게 구할 수 있는 교구를 이용한 활동에 중점을 두고 있지만, 한편으론 교구 자체보다 교구를 어떻게 활용할 것인가에 초점을 맞춘 것으로, 초등수준의 경우 3·4학년용과 5·6학년용으로 각각 개발되어 있다. 이들 각각은 4개 영역(수와 연산, 공간과 논리, 확률과 측정, 패턴과 대수)으로 구분되어, 각 영역별로 20개 교구와 이를 활용한 프로그램으로 구성되어 있다. 본 연구는 'Maths With Attitude' 교구 프로그램을 소개하고, 이 가운데 5·6학년용 수준의 교구와 이를 활용한 프로그램을 살펴보고 있다. 그리고 이를 통해 우리나라 초등수학에서 활용할 수 있는 교구와 학년별, 영역별로 프로그램을 활용할 수 있는 가능성에 대해 생각해보고자 한다.

[주제어] 초등수학, 조작교구, 활동, 구성, 조작, 'Maths With Attitude' 교구 프로그램

I. 서 론

오늘날 학교교육에서의 주요 목적은 단순 기능인의 양성보다는 능동적으로 지식을 창출할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 있다(교육인적자원부, 2000). 이러한 목적은 2007 개정 교육과정에서 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 수학과목의 목표로 제시한 것에서 찾아볼 수 있다(교육인적자원부, 2007). 그리고 이러한 목표를 달성하기 위해 수학과 교육과정은 다양한 교수·학습 방법을 제안하고 있는데, 특히 초등수학의 경우 구체적 조작 활동 및 사고 과정을 강조하는 교수·학습 방법에 초점을 맞추고 있다. 이를테면, 수학과 교수·학습 방법에서 '학습자의 실제적 경험을 바탕으로 한다'는 것은 초등학생들에게 보다 구체적인 조작

1) 이 논문은 2010년도 부산교육대학교 교육연구원의 지원을 받아 연구되었음.

2) 부산교육대학교 수학교육과

과 활동 및 구성이 요구된다는 뜻으로 해석될 수 있다.

이처럼 초등학생의 인지발달이 구체적인 조작 활동을 기본으로 한다는 점을 감안하면, 수학적 개념의 학습에서 구체적인 조작 활동이나 구성 과정을 돕는 사고실험은 중요한 논의의 대상이 되며, 따라서 조작교구(manipulative materials)를 활용한 프로그램은 초등수학에서 강조되어야 하는 교수·학습 방법 중 하나이다. 최근 수학교육연구에서는 수학의 성격 및 수학교육의 목적에 대한 재조명과 함께 학습의 효율성을 높이기 위한 방안으로 다양한 교구의 개발과 활용에 관한 연구가 진행되어 왔는데, 이는 조작교구를 활용한 교수·학습 방법을 마련하기 위한 준비 작업에 해당된다. 또한 2007 개정 수학과 교육과정의 목표와 교수·학습 방법에서 볼 수 있듯이, 수학과에서 활동의 효율성 측면에서 언어나 문자 중심의 학습 의존도를 줄이고 칠교판(tangram)이나 퀴즈네어(Cuisenaire) 색막대, 기하판(geoboard) 등 다양한 조작교구의 활용을 적극 권장하고 있는 것은 학교수학에서 조작교구에 대한 인식의 변화를 보여주는 것이다. 특히 초등수학의 경우 실세계와 관련된 구체적인 현상이나 대상에 대한 감각·신체적 활동에 바탕을 둔 귀납적인 탐구과정을 강조하고 이를 통해 학생 스스로가 수학적 개념이나 원리·법칙을 이해하도록 하는데 초점을 맞추고 있기에, 이러한 조작교구의 역할은 더욱 커질 수밖에 없다. 또한 교사들은 수학교육을 위한 도구로서 조작교구의 필요성과 그 교육적인 가치를 인정하고 있으며, 수학적 개념을 비롯하여 기능을 다루기 위해서도 구체적인 조작이 가능한 교구가 효과적이라는 반응을 보이고 있다(남승인, 2003). 그러나 초등수학에서는 이러한 조작교구 프로그램에 대한 요구에도 불구하고, 학교현장의 수학수업에서 교구 활용과 관련해서 구체적인 변화가 나타나지 않고 있다(유선미, 2006). 또한 익숙한 조작교구인 칠교, 지오보드 등은 이미 초등수학에서 학년별, 영역별로 활용을 위한 분석이 일정 부분 이루어졌으나 한편으론 그 활용범위가 프로그램 차원에서 보면 제한적이라는 문제점을 가지고 있다. 따라서 이러한 문제점을 보완하고 보다 쉽게 접근 가능한 교구를 개발할 필요가 있으며 동시에 학년별, 내용 영역별로 수학수업에서 적극 활용할 수 있는 교구 프로그램에 대한 연구가 필요한 시점이다.

본 연구는 특히 초등수학에서 학년별, 영역별로 다양한 조작교구 프로그램의 도입이 필요하다는 생각에서 출발하여 지금까지 이루어진 교구에 대한 선행연구를 토대로 하여 초등수학에서 활용 가능한 조작교구 프로그램에 대한 분석을 시도하고자 한다. 이를 위해 본 연구에서는 호주 Mathematics Task Centre에서 개발한 'Maths With Attitude' 조작교구(이하 MWA 조작교구) 프로그램을 소개하고 이 가운데 우리나라 교육과정에 활용할 수 있는 내용을 살펴본다. 이는 우리나라 초등수학에 적용할 수 있는 조작교구를 선별하여 각각에 대한 분석을 하기 위한 사전 작업에 해당하는 것으로, 이를 통해 MWA 조작교구 프로그램의 우리나라 초등수학에서의 활용 가능성에 대해 생각해보고자 한다.

II. 선행연구 고찰

조벽의 조사에서 학습 후에 학습 내용이 남아 있는 비율을 살펴보면, 읽기만은 10%, 듣기만은 26%, 보기만은 30%, 보기와 듣기는 50%, 보기와 말하기는 70%, 말하기와 행동하기는 90%가 된다고 한다(안병곤, 2002, 재인용). 이는 오늘날 수학 수업과 관련해서 중요한 시사점을 제공하는데, 본 연구에서 다루고자 하는 조작교구가 '행동하기'의 주요 소재이기 때문이다. 이러한 조작교구의 유형에 대한 연구로는, 김응태·박한식·우정호(2001)에서 기

계적 훈련을 위한 교구, 구조를 구체화한 교구 등으로 구분한 것과, 강완·백석운(2000)에서 조작교구를 그 형태와 표현 및 사용 방법에 따라 큐브형 교구, 타일형 교구 등으로 나눈 것을 들 수 있다. 또한 김수미(2000)는 조작교구가 수학교육에서 개발되고 사용된 배경과 그 정의를 비롯하여 배경학습이론에 대해 제시한 바 있다. 조작교구를 이용한 수학수업과 관련해서 그 이론적 배경에는 Piaget를 비롯하여 Dienes, Skemp 등의 연구가 있다. 특히 Piaget는 조작을 통한 구성 활동의 교육적 가치를 강조하였는데, 그는 놀이를 경험을 능동적으로 통합하는 과정으로 보았기에 아동은 여러 가지 놀이를 통해서 조작과 구성을 경험하면서 동화와 조절을 통해 학습하게 된다고 보았다. 곧, 아동의 놀이는 학습의 장(場)이고 동시에 발달의 기회가 된다는 것이다. 또한 놀이를 통해서 아동들은 자신의 경험을 재구성하여 정서적인 발달을 경험하게 되고, 자신의 생각을 표현함으로써 학습을 통한 발달이 가능하게 된다(박진성, 2001). Dienes 역시 수학학습을 놀이를 통한 구성적 활동으로 보았는데, 그는 수학적 개념의 형성 과정을 놀이를 중심으로 한 활동 과정으로 보면서, 무의식적인 단계 또는 놀이 단계, 활동에 방향성을 인지하게 되는 중간 단계, 그 결과 개념 형성이 일단락되는 단계로 구분하여 설명하였다(강문봉, 2000). 이러한 단계는 보다 세분화되어 자유놀이, 게임, 공통성의 탐구, 표현, 기호화, 형식화의 과정으로 구분된다(우정호, 2004).

한편 수업에서 교구의 활용은 학교수학의 학습·지도와 관련된 중요한 주제이며, 2007 개정 수학과 교육과정의 경우 교과서와 교사용 지도서 등에서는 학습에 필요한 교구 및 그 활용에 대해 구체적으로 명시하고 있다. 그러나 수학학습을 위한 교구의 개발과 수요의 증가에도 불구하고 학교 현장에서의 수학 수업에는 교구를 활용하는 구체적인 증가나 변화가 나타나지 않고 있다(남승인, 2003). 이는 교사들이 교구를 활용하는 과정에서 기존의 강의식 수업 방법에 비해 학생 중심의 활동적 수업에서 비롯되는 시간과 경험 측면에서의 부족함을 그 이유로 들 수 있겠지만, 한편으로 수업시간에 활용될 수 있는 조작교구와 그 프로그램에 대한 역할과 요건에 대한 정보가 충분하지 않다는데 또 다른 이유가 있다. 즉, 조작교구는 교구 조작 과정에서 학생 스스로 행동과 사고를 조절·통제할 수 있어야 하기에, 교사는 이러한 조작교구 프로그램을 통해 학습할 수 있는 수학적 원리와 법칙에 대한 충분한 사전 검토가 있어야 하며, 이를 통해 교구를 언제, 어떻게 학습내용과 연계하여 사용하는가에 따라 학습의 효율성에 어떤 영향을 미치는가를 파악해야 한다. 또한 수학 학습을 도울 수 있는 교구는 다양하지만 이러한 모든 교구가 동일한 학습의 효과를 제공할 수 없다는 점에 주목하여, 단순히 교구를 나열하는 것이 아니라 교구를 수학적 개념 지도에 활용할 수 있는 프로그램 개발에 주목해야 한다.

기존의 조작교구에 대한 연구에는 학교수학에서 활용할 수 있는 영역별, 내용별 학습 자료를 제시하는데 초점을 맞추고 있다. 김남희(1999a, 1999b, 2000, 2001)를 비롯하여 류성림(2002), 남승인(2003), 정동권(2001) 등의 연구에서는 디즈(Dienes) 블록, 퀴즈네어(Cusnaire) 막대, 대수 타일, 칠교판(tangram), 기하판(geoboard)을 학교수학에서 활용하기 위한 분석이 이루어졌다. 또한 박경자·우광식·이명숙(1999), 김수환(1999), 박영희(1999) 등에서는 도미노(domino), 하노이 타워(Hanoi tower), 소마큐브(somacube)를 활용한 수업 사례가 소개되면서 이러한 조작교구의 활용 가능성에 대해 살펴보고 있다. 그러나 본 연구에서는 이러한 기존의 조작교구와 관련된 연구에서 조작교구의 범위가 다소 제한되어 교구의 소개와 적용 가능한 내용을 나열한다는데 문제점을 제기하고 있다. 이에 비해 본 연구는 이미 활용가능성에 대한 분석이 이루어진 기존의 조작교구와 함께 학교수학에서 요구되는 보다 다양한 조작교구의 개발과 이러한 조작교구를 활용한 프로그램에 대한 논의

가 더욱 중요하다는 점에서 출발하고 있다. 곧, 한편으론 최은주·최창우(2009)의 연구와 같이 기존의 조작교구에 대한 다양한 분석을 통해 그 활용도를 높이는 작업이 필요하겠지만, 본 연구의 경우 이러한 필요성에 대한 논의는 차치하고 일단 학교수학에 도입할 수 있는 보다 다양한 조작교구에 대한 탐색이 필요하다는 관점에서, 그리고 조작교구 자체보다 조작교구를 활용한 프로그램이 어떻게 개발될 수 있는가에 연구의 초점이 맞추어져야 한다는 입장이다. 본 연구는 조작교구의 개발에 따르는 어려움을 대신하면서 다양한 교구 프로그램을 살펴볼 수 있는, 현재 호주에서 개발 및 활용되고 있는 MWA 조작교구 프로그램을 분석함으로써 이러한 요구에 답하고자 한다.

수학적 모델을 개념화하고 구성하기 위해서는 조작교구가 필수적인 도구이기는 하지만, 이러한 조작교구 가운데에서 수학적 개념을 가장 명료하게 상징하는 적절한 조작적 모델을 선택하고 이것을 프로그램화하여 수업자료로 제공하는 것은 더욱 중요하다. 이는 개념 형성에 적절한 조작교구라 할지라도 조작 활동 과정에서 적절한 반영적 추상화가 결여된다면 조작 그 자체가 의미를 잃기 때문이다. 따라서 조작교구를 활용한 프로그램은 보고, 듣고, 조작하는 감각기관의 작용 그 자체가 중요한 것이 아니라 그러한 활동으로부터 반영적 추상화라는 정신적인 활동에 의해 학생 스스로 적극적으로 참여하여 수학적 사고와 함께 수학적 개념을 학습하는데 그 목적을 두어야 한다. 본 연구는 MWA 조작교구 프로그램에 대한 분석을 통해 이러한 목적에 비추어 실제 초등수학 수업에서의 활용 가능성을 탐색하기 위한 사전작업에 해당한다. MWA 조작교구 프로그램에서 교구를 조작함으로써 학생들이 무엇을 이끌어낼 수 있는가와 함께 그 결과를 돌이켜 보고 그것으로부터 어떤 의미를 생각하여 언어화 또는 기호화하는 것이 가능한지, 그리고 새로운 문제해결의 도구로 작용할 수 있는지 등을 살펴보고자 하며, 그 결과를 정리하여 우리나라 초등수학에 활용 가능한 조작교구 프로그램에 대해 생각해본다.

Ⅲ. 'Maths With Attitude' 조작교구 프로그램의 소개

'Maths300' 프로그램은 호주 수학교육을 지원하기 위해 호주 교육과정 법인³⁾(curriculum corporation)에서 개발한 웹 기반 학습 자료로 수학자의 사고 과정과 흡사하게 학습할 수 있도록 수학 활동을 설계하는데 그 목적이 있다. 현재 호주 K-12학년을 대상으로 약 150여개의 수업에 300가지 이상의 활동이 가능하며 각각의 활동에는 수학적 문제해결전략이 함께 제시되고 있다. 이 가운데 수업의 50%는 교구를 활용하여 진행되며, 약 30% 정도는 학습 소프트웨어를 사용하고 있는데, 이러한 수업을 지원하기 위해 수업 안내와 활동지 등이 웹 사이트를 통해 제공되고 있다(<http://www.maths300.esa.edu.au/>). 'Maths300' 교구 프로그램 가운데 교구와 관련된 수업자료 등은 Mathematics Task Centre를 중심으로 운영되고 있는데, 이곳에서 개발된 프로그램으로는 'Maths With Attitude'를 비롯하여 'Maths on the Move', 'Starting Maths300 & Tasks' 등 다양한 프로그램이 있다(<http://www.blackdouglas.com.au/taskcentre/>).

MWA 조작교구 프로그램은 'Maths300' 교구 프로그램 가운데 호주의 학년 및 영역에 알맞은 교구를 선별하여 정리한 것으로, 학생들에게는 수학자처럼 생각하는 태도를 가질

3) 이 법인은 호주 교육부 산하 기구로, 호주의 교육과정 개발과 평가 등을 비롯하여 호주 교육과정 전반에 대한 연구기관의 역할을 하고 있다(<http://www.curriculum.edu.au/>).

수 있도록 하며 교사에게는 즐겁고 생산적이며 활기찬 수업을 만들 수 있도록 하기 위해 만들어진 프로그램이다. MWA 조작교구 프로그램은 호주의 3-10학년에 해당되는 학생들을 대상으로 하며, 초등수준(primary Level)과 중등 수준(secondary Level)으로 나누어져 있다. 초등 수준은 3-4학년과 5-6학년으로 구분되며, 각 학년에는 영역별로 Number & Computation(수와 연산), Space & Logic(공간과 논리), Chance & Measurement(확률과 측정), Pattern & Algebra(패턴과 대수) 등 4가지 영역으로 구분되어 있으며, 각 영역은 20개의 교구와 프로그램으로 구성되어 있다.

본 연구는 5-6학년용으로 개발된 MWA 교구 프로그램의 소개와 분석에 대한 것으로, 4장에서 이들 가운데 두 영역에서의 교구와 함께 그 수업의 예를 살펴본다. 다음 표와 사진은 5-6학년용으로 개발된 4개 영역 가운데 수와 연산 영역에 해당하는 20개의 조작교구에 대한 것이다(다른 영역의 교구 목록은 <부록1> 참조). 본 연구는 MWA 조작교구 가운데 우리나라 초등학교 수학수업에서 활용 가능한 조작교구와 자료들을 추출하는 것을 지속적인 과제로 하며, 이를 위해 먼저 MWA 교구 프로그램에 대한 검토에서 출발한다. 또한 이러한 일련의 과정을 통해 우리나라 초등수학에서의 조작교구의 활용방안 및 현장적용에 대한 가능성을 이끌어내고자 한다.

Number & Computation (Years 5 & 6)

- 4 & 20 Blackbirds
- Add The Pack
- A Dollar To Spend
- Bob's Buttons
- Change
- Cover Up
- Doctor Dart
- Dominoes
- Doug's Tablecloth
- Eureka
- Magic Square
- Making Fractions 2
- Martian Maths
- Monkeys & Bananas
- Number Game
- Number Tiles
- Pascal's Triangle in Asia
- Peg & Tape Fractions
- Pick A Box
- Steps



[그림 1] 5, 6학년 Number와 Computation 교구

IV. 'Maths With Attitude' 조작교구 프로그램의 분석 및 활용사례

본 연구에서는 초등수준에 해당하는 3·4학년과 5·6학년에서 'Number & Computation' 영역의 40개 교구를 비롯하여 'Pattern & Algebra' 영역, 'Space & Logic' 영역, 그리고 'Chance & Measurement' 영역의 40개 교구에 대해 그 프로그램을 함께 분석해왔으며, 그 가운데 3·4학년 교구 프로그램에 대해서는 김미화·김성준(2009), 류수진·김성준(2009)에서 각각 제시한 바 있다. 다음에서는 5·6학년 교구 프로그램 가운데 'Number & Computation' 영역과 'Pattern & Algebra' 영역에서 각각 1개씩 교구를 소개하고 이를 활용한 프로그램을 살펴본 다음, 우리나라 초등수학에 적용할 수 있는 예를 생각해보고자 한다(다른 2개 영역은 <부록2> 참조).

1. 'Number & Computation' 영역의 조작교구(Monkeys & Bananas)

가. 소개

이 프로그램에는 원숭이 세 마리와 바나나가 등장하며, 다음과 같은 이야기가 제공된다.

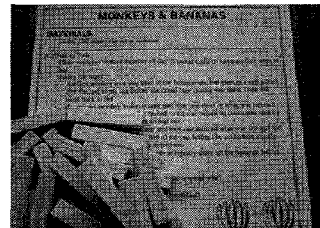
낮 동안 원숭이 세 마리는 일을 하여 바나나를 모읍니다. 그리고 밤에는 잠을 자러 갑니다. 그런데 밤 동안 원숭이들은 모아둔 바나나 중 하나를 먹고 그 중 삼분의 일을 숨겨둡니다. 즉, 첫 번째 원숭이가 바나나 하나를 먹고 삼분의 일의 바나나를 숨겨놓습니다. 그리고 두 번째 원숭이가 다시 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨 놓습니다. 마찬가지로 마지막 원숭이가 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨 놓습니다. 그리고 아침이 되면 원숭이들은 남은 바나나를 똑같이 나누어 먹습니다.

그리고 다음과 같은 질문을 한다.

- 아침에 원숭이들은 몇 개의 바나나를 각각 먹었을까?
- 원래 바나나는 총 몇 개였을까?

학생들은 문제를 소집단활동을 통해 해결함으로써 수학적 대화나 협력 작업을 할 기회를 갖게 된다. 그리고 문제를 탐구하는 가운데 많은 수학적 사고를 경험할 수 있게 된다.

이 활동을 위해 필요한 기본적인 도구에는 초등수준에서의 기초적인 수 연산, 이산집합에서의 분수, 문제해결전략, 문제해결도구로서의 스프레드시트 활용 외에 선형대수와 지수함수 등 고등 수학적 지식도 활용될 수 있다. 조작교구와 함께 진행되는 수업의 과정은 이야기를 말해주고, 도전과제를 제시하면 학생들은 문제해결전략을 찾아 본 다음 자료를 수집하여 그에 따른 결과를 발표한다. 그런 다음 학생들은 또 다른 해결전략을 생각해보고, 'Why is it 8?'과 같은 물음을 생각해보고 이 문제를 응용한 문제에 대해서도 계속 생각해본다.



나. 실제 수업 사례

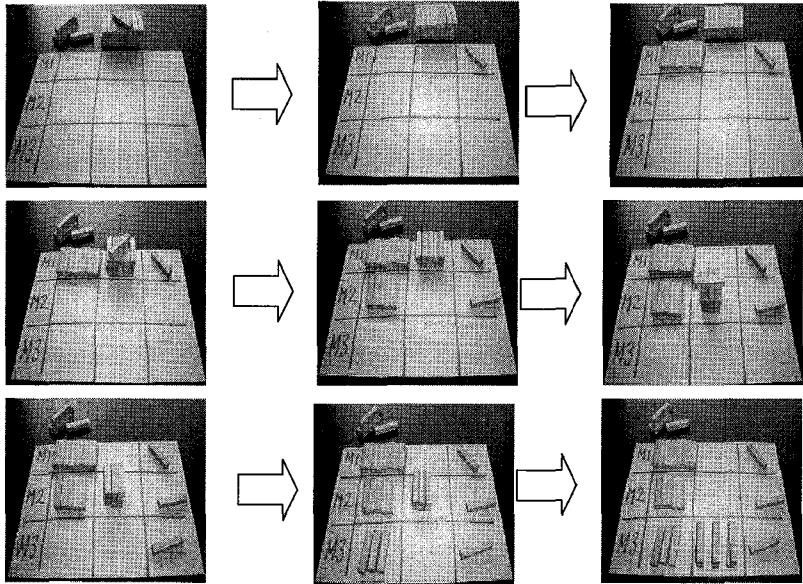
먼저 학생들에게 이야기를 말해주고 안내문을 나누어 준다. 안내문은 자세한 설명과 기

를 위한 것이다. 그리고 수업이 선행되기 전에 교구를 주도적으로 사용할 학생을 뽑는다.

이제 학생들에게 과제를 제시한다. 학생들은 세 명씩 한 모듬이 되어 각자 원숭이 역할을 하게 된다. 첫 번째 질문은 '원래 바나나는 총 몇 개였을까?'이다. 학생들은 답을 칠판을 쓴다. 그 답들은 다양하다. 대부분의 학생들은 이야기를 행동에 옮기기 전에 답을 추측할 필요가 있다. 각 모듬은 3-4분 동안 게임을 하면서 그들이 무엇을 하는지에 대해 명확하게 한다.

세 번째 단계는 문제해결전략을 찾는 것이다. 교사는 다음과 같은 발문을 한다. "먼저 여러분은 하나의 문제를 가지고 있고 이것을 푸는데 흥미가 있기 때문에, 여러분을 수학자라고 부를게요. 수학자들이 이것에 관해 말하는 방법에서 무엇을 배울 수 있는지 봅시다." 안내문에는 수학자들의 전략이 있다.⁴⁾ 전략을 보면서 학생들은 모듬별 토론의 시간을 갖는다.

네 번째 단계는 자료수집이다. 만약 한 모듬에서는 바나나 25개를 답으로 예상하고 주어진 이야기에 따라 조작교구를 활용한다면 아래와 같이 각각의 단계는 전개된다.



[그림 2] 교구 조작의 예

다섯 번째 단계는 결과를 입증하고 또 다른 해결전략을 생각해보는 것이다. 먼저 답이 되는 것과 답이 되지 않는 것에 대해 생각해본다. 생각을 구체화하는 과정에서 조작교구를 활용한다. 조작교구의 활용으로 복잡한 문제의 속성들은 차츰 명백해지고, 학생들은 자신들이 찾은 방법을 설명할 수 있게 된다. 이 문제에서 학생들은 만약 계산과정에서 분수가 나오면 그 추측이 옳지 않다는 것을 알게 된다. 또 다른 해결전략을 위해서 스프레드시트는 효과적으로 사용될 수 있다. 스프레드시트는 더 많은 경우에 대해 답을 찾는 방법을 제시한다. 이 때 사용되는 문제해결전략은 '거꾸로 생각하기'이다. 곧, 아침에 나누어먹는 바나나의 개수에서 출발하여 원래 바나나의 개수를 찾는 것이다. 이 과정에서 중요한 것은

4) 추측하고, 검토하고 개선해라; 수식을 써보라; 목록이나 테이블을 만들어라; 역으로 거슬러 작업해라; 실행에 옮겨라; 패턴을 찾아라; 모든 가능성을 시도해라; 간단한 문제를 시도해라 등

의 각 셀에 주어진 연산에서 공식을 만들게 되면 다음과 같다.

$$P = [(3S \times \frac{3}{2} + 1) \times \frac{3}{2} + 1] \times \frac{3}{2} + 1, \quad P = \frac{1}{8}(81S + 38)$$

여기서 $81S + 38$ 은 8로 나누어떨어져야 한다. $81S + 38 = 80S + S + 38$ 에서 $S + 38$ 이 8의 배수이어야 한다. 그래서 S 가 2, 10, 18, 26 ... 일 때 답이 된다.

마지막 단계는 원숭이 마릿수를 달리하거나 밤에 가져가는 바나나의 개수에 변화를 주는 응용 상황이다. 곧, 네 마리의 원숭이가 밤에 4분의 1씩 숨겨 놓는다면 무슨 일이 일어나는가? 이 경우 81만큼 차이가 난다면, 그래서 원래 문제에서 $8(=2 \times 2 \times 2)$ 의 차, 이 문제에서 $81(=3 \times 3 \times 3 \times 3)$ 의 차가 존재한다면, 다섯 마리의 원숭이의 경우 $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ 의 차이가 난다고 할 수 있을까? 세 마리 원숭이 문제에서 첫 번째 답이 2개에서 시작하여 25개인 반면, 네 마리 원숭이 문제에서 첫 번째 답이 60개에서 시작한 573개이다. 그렇다면 첫 번째 답에 숨겨진 패턴은 존재하는가? 이처럼 마지막 단계에서는 주어진 조건의 다양한 변화를 통해 답을 구하고 이들 간의 패턴에 대해 생각해볼 수 있다.

다. 우리나라 초등학교 수학에서 'MONKEYS & BANANAS'의 활용 예

'MONKEYS & BANANAS'은 수와 연산 영역에서 덧셈과 곱셈, 나눗셈 등의 활용에서 생각해볼 수 있으며, 여러 가지 방법으로 문제를 해결하는 문자와 식 영역의 문제 푸는 방법 찾기에서도 활용이 가능하다. 2007 개정 수학과 교육과정에서 'MONKEYS & BANANAS' 활용이 가능한 내용을 학년별, 영역별로 정리하면 다음과 같다.

<표 1> MONKEYS와 BANANAS의 주요 내용

'MONKEYS & BANANAS'를 활용할 수 있는 초등수학의 내용	영역	해당학년
가르기와 모으기	수와 연산	1학년
막대를 이용한 길이, 높이 비교하기	측정	1학년
막대의 색깔을 이용한 분류하여 세어 보기	수와 연산	1학년
두 자리의 수	수와 연산	1학년
(한 자리 수, 두 자리 수)자연수의 덧셈과 뺄셈	수와 연산	1, 2학년
묶어서 세기, 곱하기, 배	수와 연산	2, 3학년
혼합계산	수와 연산	4학년
약수와 배수, 공약수와 공배수, 최대공약수와 최소공배수	수와 연산	5학년
문제 푸는 방법 찾기	문자와 식	5, 6학년

다음은 각 학년에서 활용할 수 있는 활동의 예를 몇 가지 들어보겠다.

Ⅰ 혼합계산

① 영역 : 수와 연산

② 관련 학년 : [4가 단계] 6. 혼합계산

③ 학습 목표 : 교구를 이용하여 뺄셈과 나눗셈, 곱셈의 혼합계산을 할 수 있다.

④ 준비물 : 'MONKEYS & BANANAS' 교구

낮 동안 원숭이 세 마리가 일을 하여 25개의 바나나를 모았습니다. 그리고 밤에는 잠을 자러 갑니다. 그런데 밤 동안 원숭이들은 모아둔 바나나 중 하나를 먹고 그 중 삼분의 일을 숨겨둡니다. 즉, 첫 번째 원숭이가 바나나 하나를 먹고 삼분의 일의 바나나를 숨겨놓습니다. 그리고 두 번째 원숭이가 다시 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨놓습니다. 마찬가지로 마지막 원숭이가 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨 놓습니다. 그리고 아침이 되면 원숭이들은 남은 바나나를 똑같이 나누어 먹습니다. 아침에 원숭이들은 각각 몇 개의 바나나를 먹었을까요?

[활동 1-1] 다음 각 물음에 대해 그림으로 나타내어 봅시다.

- 첫 번째 원숭이가 남겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 두 번째 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 마지막 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 남은 바나나를 세 마리 원숭이가 똑같이 나누어 먹으면 각각의 원숭이는 몇 개씩 바나나를 먹을 수 있습니까?

[활동 1-2] 다음 각 물음에 대해 식으로 나타내어 봅시다.

- 첫 번째 원숭이가 남겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 두 번째 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 마지막 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 남은 바나나를 세 마리 원숭이가 똑같이 나누어 먹으면 각각의 원숭이는 몇 개씩 바나나를 먹을 수 있습니까?

② 문제를 해결하고 그 방법을 설명해 봅시다.

- ① 영역 : 문자와 식
- ② 관련 학년 : [6-가 단계] 문제 푸는 방법 찾기
- ③ 학습 목표 : 여러 가지 방법으로 문제를 풀 수 있다.
- ④ 준비물 : 'MONKEYS & BANANAS' 교구

낮 동안 원숭이 세 마리는 일을 하여 바나나를 모읍니다. 그리고 밤에는 잠을 자러 갑니다. 그런데 밤 동안 원숭이들은 모아둔 바나나 중 하나를 먹고 그 중 삼분의 일을 숨겨둡니다. 즉, 첫 번째 원숭이가 바나나 하나를 먹고 삼분의 일의 바나나를 숨겨놓습니다. 그리고 두 번째 원숭이가 다시 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨 놓습니다. 마찬가지로 마지막 원숭이가 바나나 하나를 먹고 남은 바나나 중 삼분의 일을 숨겨 놓습니다. 그리고 아침이 되면 원숭이들은 남은 바나나를 똑같이 나누어 먹습니다. 낮 동안 원숭이들이 모은 바나나는 모두 몇 개였을까요?

[활동 2-1] 예상과 확인의 방법으로 문제를 풀어 보시오.

- 구하려고 하는 것은 무엇입니까?
- 처음 모은 바나나가 34개라고 예상하고 계산해 보시오.

- 예상이 틀렸으면 다르게 예상하고 확인하여 보시오.
- 예상이 옳을 때까지 예상과 확인을 계속하여 보시오.
- 처음에 있던 바나나는 몇 개입니까?
그리고 마지막에 원숭이들은 각각 몇 개씩 바나나를 나누어 먹습니까?
- 원숭이들이 5분의 1씩 숨겨 둔다고 가정해 보고 위와 같은 방법으로 풀어 봅시다.

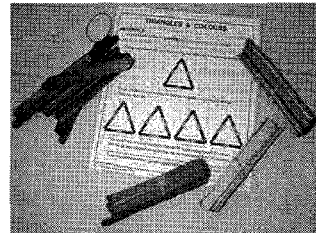
[활동 2-2] 거꾸로 생각하여 문제를 해결해 봅시다.

- 마지막에 원숭이들이 각각 하나씩 바나나를 나누어 먹었다고 가정해 봅시다.
마지막 원숭이가 남겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 그렇다면 마지막 원숭이가 숨겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 구할 수 있습니까? 없다면 그 이유는 무엇입니까?
- 마지막에 원숭이들이 각각 두개씩 바나나를 나누어 먹었다고 가정해 봅시다.
마지막 원숭이가 남겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 그렇다면 마지막 원숭이가 숨겨놓은 바나나는 몇 개입니까?
- 마지막 원숭이가 처음 바나나를 봤을 때 몇 개가 있었습니까?
(즉 두 번째 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개 입니까?)
- 두 번째 원숭이가 숨겨 놓은 바나나는 몇 개 입니까?
- 두 번째 원숭이가 처음 바나나를 봤을 때 몇 개가 있었습니까?
(즉 첫 번째 원숭이가 남겨 놓은 바나나는 몇 개 입니까?)
- 첫 번째 원숭이가 숨겨 놓은 바나나는 몇 개 입니까?
- 처음 있었던 바나나는 모두 몇 개입니까?
- 원숭이들이 5분의 1씩 숨겨 둔다고 가정해 보고 위와 같은 방법으로 풀어 봅시다.

2. 'Pattern & Algebra' 영역의 조작교구(Triangles & Colours)

가. 소개

Triangles & Colours는 열 가지 색으로 칠해진 아이스크림 막대기를 이용하여 다양한 삼각형을 만드는 활동이다. 3학년부터 12학년까지 활용 가능하며 각 활동에는 1-2시간이 필요하다. 다양한 색깔의 막대를 이용하여 커다란 규모의 삼각형의 테두리를 책상 위에 만들어 놓음으로 해서 학생들의 흥미를 유발할 수 있다. 모둠활동, 문제해결, 패턴과 규칙성을 통해 수학적으로 풍부한 맥락을 제공한다. Triangles & Colours 프로그램은 활동을 시작하기도 쉬우며, 학생들을 수업으로 이끄는 다양한 연결고리들이 조작교구와 함께 전개된다.



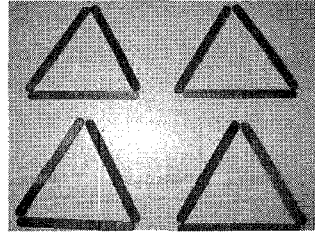
삼각형 개수에서 7-8학년 이상의 학생들은 $n + n(n - 1) + [n(n - 1)(n - 2)] / 6$ 라는 대수적 규칙을 찾고 제시하는 과정들을 이끌어내게 되며, 이것을 간단하게 $[n^3 + 3n^2 + 2n] / 6$ 라고 나타낼 수 있다. 이 교구 프로그램은 경우의 수, 순열과 조합, 규칙성과 대수적 규칙의 일반화, 대수적 추론 등에서 연관성을 찾을 수 있으며 특히 'early algebra'(초기대수) 활동에서 패턴으로부터 규칙성을 찾아내고 이를 통해 산술과 대수를 연결하는 활동으로도 다루어질 수 있다.

나. 실제 수업 사례

다음 수업의 모든 단계는 조작교구와 함께 진행된다. 한 가지, 두 가지 색의 막대가 주어지는 경우부터 열 가지 색의 막대에 이르기까지 학생들은 직접적인 조작을 통한 문제해결의 과정에서 어떤 패턴과 규칙성을 파악하게 된다. 그리고 이로부터 패턴의 일반화에 이르는 대수적 추론을 이끌어낼 수 있게 된다. 물론 이 과정의 경우 초등수준 이상의 수학적 지식이 요구되지만, 한편으로 이러한 배경 지식은 산술에서부터 시작될 수 있다는 것을 보여 준다.

① 한 가지, 두 가지 색깔을 이용한 도입 단계

빨간 막대 한 묶음을 놓는다. 학생들을 탁자 주위로 모으고 세 개의 빨간 막대를 사용하여 삼각형을 만들 사람을 찾는다. 학생들은 빨간 막대만을 가지고는 한 가지 종류의 삼각형 밖에 만들 수 없음을 동의한다. (RRR) 탁자 위에 다른 색깔(파란색)의 막대 한 묶음을 놓고 RRR과 다른 방법으로 삼각형을 만들어 보게 한다. 학생들은 삼각형을 만들어 보고 RRR, BBB, RRB, BBR 네 가지의 답을 얻는다. RRB나 RBR과 같은 색깔의 순서에는 상관하지 않는다.



② 세 가지 색깔 이용하기

세 번째 색깔의 막대 묶음을 놓고 문제를 제시한다. '3가지 색 막대를 이용하여 삼각형을 몇 개 만들 수 있을까?' 교사는 학생들이 모둠별로 답을 찾아 볼 수 있도록 한다. 대부분의 모둠에서 답이 9일 것이라고 생각하는데, 이는 1, 4, 9의 규칙이 있을 것으로 예상하기 때문이다. 이 단계에서는 학생들에게 아무런 전략이나 분류하는 방법을 가르쳐 주지 않고, 학생들이 색깔을 가져오는 것에 따른 모양을 볼 수 있도록 한다. 그러나 답은 10가지가 되고, 학생들은 자신들의 잘못된 예상에 대해 그 이유를 생각하게 된다.

Triples (모두 같은 색의 막대로 만들 수 있는 것) = 3가지

Doubles (두 막대가 같은 색인 삼각형) = 6가지

Singles (모두 다른 색으로 된 삼각형) = 1가지

③ 네 번째 색깔 더하기

이 단계에서 학생들은 종종 체계적일 필요가 있다는 것을 깨닫고 삼각형을 일정한 범주로 분류하는 방법을 생각하게 된다. 이 과정에서 가장 구조화하기 힘든 경우가 Singles이다. 이 경우 거꾸로 생각하기를 통해 4가지 색에서 3가지 색을 사용하여 각 삼각형을 만든다면, 반드시 한 가지 색깔의 막대가 남아야 한다는 것을 전략으로 이끌어낸다. 따라서 Singles의 답은 4가지가 된다. 또한 Triples는 항상 색 막대의 종류의 개수와 같다는 것을 알게 된다.

Triples = 4가지, Doubles = 12가지, Singles = 4가지

④ 다섯 번째 색깔 더하기

일반적으로 이 단계부터는 모둠 활동이 본격적으로 체계화된 사고를 통해 이루어지며, 특히 Singles와 Doubles를 찾기 위해서는 전략적인 사고를 필요로 한다. 또한 Doubles는

항상 색 막대의 종류의 개수에 나머지 색의 개수를 곱하면 된다는 것을 알게 된다. 이 경우 5×4 가 된다.

Triples = 5가지, Doubles = 20가지, Singles = 10가지

⑤ 여섯 번째 색깔의 결과 예측해보기 - 다음으로 10번째 색깔의 결과 예측해보기 결과표는 다음과 같다.

<표 2> 표를 이용한 결과 예측

Colours	Triples	Doubles	Singles	Total
1	0	0	1	1
2	2	2	0	4
3	3	6	1	10
4	4	12	4	20
5	5	20	10	35
6	6	30	20	56
...
10	10	90	120	220

학생들은 표에서 수 규칙에 기초한 여섯 번째 색깔에 대한 추측을 정당화하기를 원하지 만, 그것 보다는 전후 관계의 맥락에서 그들의 계산을 정당화할 필요가 있음을 인식한다. 10번째 색에 대한 문제는 학생들로 하여금 각각의 부분에서 그 값들을 구하고 이로부터 전체 삼각형의 수를 구하기 위한 일반화 끈, 대수적 추론을 낳게 한다. 그 과정은 다음과 같다.

6가지 색깔에 대하여:

Triples: 6 - 각 색깔마다 하나씩.

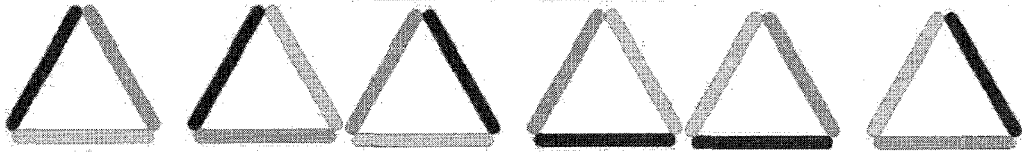
Doubles: 만약 두 면이 한 가지 색깔이면 세 번째 면에 올 수 있는 색깔은 나머지 5가지 색 이다. 따라서 $6 \times 5 = 30$ 이 된다.

Singles: 6가지 색깔을 A, B, C, D, E, F라 하 고 이것을 체계적으로 적어 보면 오른쪽과 같다. 이러한 방법은 모든 가능한 조합을 점검해보는 중요한 전략 가운데 하나이다.

ABC	ABD	ABE	ABF
ACD	ACE	ACF	
ADE	ADF		
AEF			
BCD	BCE	BCF	
BDE	BDF		
BEF			
CDE	CDF		
CEF			
DEF			

10가지 색깔에 대하여:

10개의 Triples와 90개의 Doubles 10×9 는 쉽게 정당화할 수 있다. 120개의 서로 다른 Singles를 설명하기 위해서 삼각형의 세 위치를 ABC라 명하고 그 자리에 색깔들을 나열해 본다. 학생들에게 A자리에 몇 가지 색의 막대를 놓을 수 있는지 물어본 다음 답이 명확해 질 때까지 막대를 놓아본다. 다음으로 A에 한 가지 색을 놓고, B자리에 다른 색의 막대를 놓을 수 있다. 90가지 경우의 수가 나올 수 있도록 계속해서 이를 나열해본다. 이 과정은 교구의 적극적인 활용과 함께 진행된다. 그렇게 하고 나면 C자리에는 8가지의 선택이 있을 수 있다. 따라서 $10 \times 9 \times 8$ 이 가능한 경우의 수이다. 여기서 중요한 것은 이 방법에서 다음과 같이 중복이 있을 수 있다는 것을 생각해 보는 것이다.



[그림 4] 색 막대의 활용 예

어떠한 세 가지 색의 집합에서도 다음과 같은 6번의 중복이 있으므로 $10 \times 9 \times 8$ 을 6으로 나누어 주어야 하며, 답은 120이 된다.

⑥ 대수적 규칙으로 일반화하기

우리의 목표는 학생들이 다음과 같이 말하는 단계에 도달하도록 하는 것이다.

“나는 몇 가지 색이든 상관없이 전체 삼각형의 개수를 찾아낼 수 있어요!”

이 순간이 바로 학생들에게 ‘일반화’가 이루어진 순간이며, 이러한 일반화는 언어와 그림, 기호 등 다양한 방법으로 표현될 수 있다.

결과표는 다음과 같다.

<표 3> 표를 이용한 일반화하기

Colours	Triples	Doubles	Singles	Total
1	0	0	1	1
2	2	2	0	4
3	3	6	1	10
4	4	12	4	20
5	5	20	10	35
6	6	30	20	56
...
10	10	90	120	220
...
n	n	$n(n - 1)$	$[n(n - 1)(n - 2)]/6$...

총 수: $T = n + n(n - 1) + [n(n - 1)(n - 2)] / 6$

이 지점에서 아주 흥미로운 딜레마가 있다. ‘전통적인 대수학’은 종종 규칙을 단순화할 수 있도록 설명된다. 위의 식을 단순화 하면 다음 공식을 얻을 수 있다.

총 수: $T = [n^3 + 3n^2 + 2n] / 6$

하지만 이러한 형태에서는 왜 규칙이 성립하는지에 대한 의미가 잠재적으로 사라지게 된다.

⑦ 규칙을 설명하고 정당화하기

만약 학생들이 왜 규칙이 성립하는지에 대해 설명할 수 있다면 그들은 자신감을 가질 것이다. 이 단계는 대수적 일반화에 대한 완벽한 이해를 위한 중요한 열쇠가 된다.

규칙은 세 가지 부분으로 나뉘어 있다. : Triples, Doubles, Singles.

- Triples: 각 색깔마다 한 개씩의 Triple를 갖는다. 따라서 n색은 n개의 Triples를 갖는다.

- Doubles: 각 색은 모든 다른 색과 Double를 갖는다. 예를 들어, 빨강을 포함한 열 가지 색이 있다면, 빨강은 다른 9색깔과 Double이 된다. 즉, 9가지의 Double를 갖는 것이다.

나머지 9가지 색도 모두 9가지씩의 Double를 갖게 된다. 유사하게, n가지 색은 (n-1)개의 Double를 갖게 된다. 즉 $n \times (n-1)$ 개의 Double를 갖는다.

- Singles: 모든 세 가지 색이 다 달라야 한다. 첫 번째 자리에 n가지 색 중 아무 것이나 놓을 수 있다. 이것은 남은 (n-1)가지 색과 조합이 될 수 있으며, $n(n-1)$ 개의 경우의 수를 가진다. 그리고 이러한 모든 경우의 수는 세 번째 색인 (n-2)가지와 조합이 될 수 있다. 따라서 경우의 수는 $n(n-1)(n-2)$ 개가 된다. 하지만 위에서 언급된 것과 같이 ABC의 막대는 ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA와 같이 중복될 수 있다. 이것은 모두 같은 색의 반복이므로 우리는 전체를 6으로 나누어 주어야 한다. 따라서 전체 수는 $[n(n-1)(n-2)] / 6$ 이 된다.

⑧ 확장하기

일반적으로 교실 수업은 다음과 같은 과정을 반복한다. 특히 이러한 과정은 수학수업에서 학생들의 사고를 발전시키기 위해 중요한 의미를 갖는다.

- ㉠. 재미있고 의미 있는, 가치 있는 문제의 발견
- ㉡. 일상적이고 탐구적인 '놀이' 단계 - 자료나 정보를 생산해냄
- ㉢. 자료를 기반으로 한 가설, 추측, 이론 설정
- ㉣. 문제해결전략을 사용한 이론 증명
- ㉤. 알고리즘 기술 사용하기
- ㉥. 확장하고 일반화하기 - 내가 배울 수 있는 다른 것은?
- ㉦. 결과를 발표하고 그 사실에 대해 토론하기
- ㉧. ㉠ 단계로 돌아가기

이 프로그램에서도 교사는 학생들에게 그들이 탐구할 수 있는 또 다른 상황을 제시한다. 이를테면, 사각형을 제안할 수 있다.

<표 4> 사각형의 예

Colours	Quads	Triples	Doubles	Singles	Total
1	1	0	0	0	1
2	2	2	1	0	5
3	3	6	6	0	15

이것을 일반화 하면, n 가지 색에 대하여 다음과 같은 결과를 알 수 있다.

Quads = n

Triples = $n(n-1)$

Doubles = $[n(n-1)(n-2)] / 2$

Singles = $[n(n-1)(n-2)(n-3)] / 24$

또한 오각형, 육각형 등 여러 가지 다각형에 대해 가능한 경우의 수를 규칙적으로 파악하여 그 패턴을 일반화할 수 있다. 그리고 각각에서 패턴을 파악하고 그 규칙을 일반화하는 과정에서 색 막대와 같은 조작교구는 추측과 정당화에 효과적으로 활용될 수 있다.

다. 우리나라 초등학교 수학에서 'Triangles & Colours'의 활용 예

Triangles & Colours는 막대의 개수를 사용하여 셈수, 집합수, 순서수 등에 활용될 수

있을 뿐만 아니라 막대를 단위로 한 측정수의 지도에도 응용될 수 있으며, 사칙연산에서도 적극적으로 활용될 수 있다. 또한 색을 활용하여 경우의 수, 패턴 파악하기 등에도 활용될 수 있고 대응을 통한 함수와 규칙성에도 활용될 수 있다. 2007 개정 수학과 교육과정에서 Triangles & Colours의 활용이 가능한 내용을 학년별, 영역별로 정리하면 다음과 같다.

<표 5> Triangles과 Colours의 활용 예

Triangles & Colours를 활용할 수 있는 초등수학의 내용	교육과정 영역	해당학년
가르기와 모으기	수와 연산	1학년
50까지의 수	수와 연산	1학년
분류하여 세어보기	수와 연산	1학년
10을 가르기와 모으기	수와 연산	1학년
10이 되는 더하기와 10에서 빼기	수와 연산	1학년
더하기와 빼기	수와 연산	1학년
길이재기	측정	2학년
평면도형	도형	3학년
분수	수와 연산	2, 3학년
삼각형	도형	3, 4학년
수직과 평행	도형	4학년
사각형과 도형 만들기	도형	4학년
넓이와 무게	측정	5학년
자료의 표현	확률과 통계	5학년
경우의 수	확률과 통계	6학년

다음은 각 학년에서 활용할 수 있는 활동의 예를 몇 가지 들어보겠다.

1. 분류하여 세어보기

- ① 영역: 수와 연산
- ② 관련 학년: [1-가 단계] 8. 분류하여 세어보기
- ③ 학습 목표: 막대를 색깔에 따라 분류하고 개수를 셀 수 있다.
- ④ 준비물: Triangles & Colours 막대, 학습지(분류표)
- ⑤ 유의점: 1학년 학생들은 주로 실생활과 관련된 물건이나 학생들의 흥미를 고려한 활동들을 통하여 분류활동을 하게 함이 바람직하며, 막대를 통한 분류는 이러한 분류가 끝난 후에 그것을 구체물을 활용하여 점검해 보는 단계로 사용되어야 한다. 또한 이러한 막대를 통한 분류가 끝난 후에는 이를 숫자로 기호화 하는 것까지 연결시키는 것이 필요하다.

1-가 우리 반 학생들이 원구의 생활용품 수를 색을 단위로 조사하여 보시오.



색깔	자주개	원통	수정	교과
파란	장남	요리기	리본	부엌

1-가 생활 용구의 색을 조사하여 보시오.

색깔	개수
파란	
노랑	
적색	
초록	
보라	
흰색	

[활동 1-1] (반 학생들로 하여금 좋아하는 색의 막대를 가져가도록 한다.)

(1) 우리 반 학생들이 좋아하는 색을 조사해 보시오.

빨강	파랑	노랑	연두	보라

(2) 색깔에 따라 사람 수를 세어 보시오.

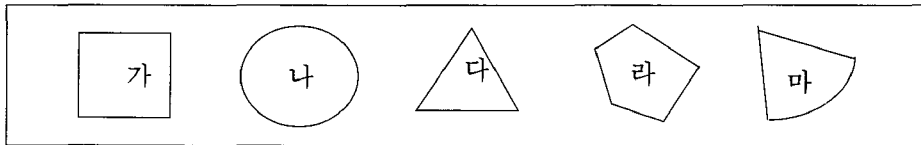
색깔	빨강	파랑	노랑	연두	보라
사람 수					

② 다각형 알아보기

- ① 영역: 도형
- ② 관련 학년: [4-나 단계] 5. 사각형과 도형 만들기
- ③ 학습 목표: 다각형과 정다각형을 이해하고 변의 수에 따라 이름을 말할 수 있다.
- ④ 준비물: Triangles & Colours 막대, 고정 핀
- ⑤ 유의점: 다각형은 선분으로 둘러싸여 있음을 강조할 필요가 있으며, 정다각형을 만들어 보는 활동을 통해 학생들이 정다각형의 개념을 친숙하게 할 수 있도록 해야 한다. 이 때 정다각형을 만드는 재료는 굳이 Triangles & Colours 막대일 필요는 없으며, 직선을 만들어 낼 수 있는 다른 것들을 사용할 수 있다.

[활동 2-1] 선분으로만 둘러싸인 도형을 찾아보아라.

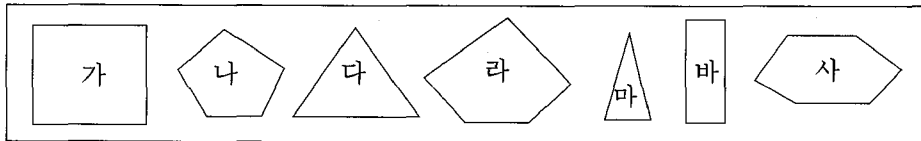
- 선분으로만 둘러싸인 도형은 어느 것인가?
- 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형은 무엇인가?



- 네 개의 선분으로 둘러싸인 도형은 무엇인가?
- 다섯 개의 선분으로 둘러싸인 도형은 무엇인가?
- 왜 그렇게 생각하는가?

[활동 2-2] 변의 길이와 각의 크기가 모두 같은 다각형을 알아보아라.

- 변의 길이와 각의 크기가 모두 같은 다각형은 어느 것인가?
- 세 변의 길이가 같은 삼각형을 무엇이라고 하는가?



- 네 변의 길이가 같고 네 각의 크기가 모두 같은 사각형을 무엇이라고 하는가?

[활동 2-3] Triangles & Colours 막대와 고정 핀을 사용하여 정다각형을 만들어 보아라.

③ 경우의 수

- ① 영역: 확률과 통계
- ② 관련 학년: [6-나 단계] 6. 경우의 수
- ③ 학습 목표: 경우의 수의 의미를 알고 여러 가지 경우의 수를 구할 수 있다.

- ④ 준비물: Triangles & Colours 막대, 학습지(표, 수형도 등을 그릴 것)
- ⑤ 유의점: 학생들이 막대를 이용하여 실제로 해 보는 과정에서 원리를 이해할 수 있도록 해야 하며, 조작적 활동을 표나 수형도로 나타내어 보고, 나아가 이를 식으로 나타내고 구해낼 수 있도록 해야 한다.

[활동 3-1] 축구 경기를 시작할 때 어느 쪽이 먼저 공격할 것인지 막대를 뽑아 정하기로 했습니다. 빨간 막대 열 개와 파란 막대 열 개 중에서 막대를 뽑을 때 나오는 경우를 알아보시오.

- (1) 주머니에서 막대를 뽑았을 때 나오는 경우를 알아보시오.
 - 막대를 10개 뽑아서 나오는 색을 기록하여 보시오.
 - 막대를 뽑아 나오는 색은 몇 가지입니까?

횟수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
색										

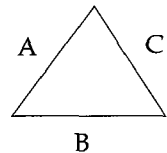
- (2) 어떤 일이 일어날 수 있는 경우의 가짓수를 경우의 수라고 합니다.

[활동 3-2] 빨간 막대와 파란 막대를 이용해 만들 수 있는 삼각형의 경우의 수를 알아보시오.

- (1) 빨간 막대와 파란 막대를 이용하여 만들 수 있는 삼각형을 기록하여 보시오.

	1회	2회	3회	4회	5회	6회
A 자리						
B 자리						
C 자리						

- A 자리에 들어갈 수 있는 막대의 색깔의 경우를 모두 써 보시오.
- A 자리에 빨간 막대가 나왔을 때, B 자리에 들어갈 수 있는 막대의 색깔은 몇 가지입니까?
- A 자리에 파란 막대가 나왔을 때, B 자리에 들어갈 수 있는 막대의 색깔은 몇 가지입니까?
- 막대 세 개를 뽑아 삼각형을 만들 때 중복되는 경우의 수는 몇 가지입니까?
- 막대 세 개를 뽑아 나오는 삼각형의 경우의 수는 몇 가지입니까?



V. 결 론

우리나라 수학과 교육과정에서 특히 초등수학에서 조작교구를 활용한 프로그램에 대한 관심은 점차 높아지고 있으나, 이에 비해 수학수업에서 활용할 수 있는 교구의 종류나 교구를 활용한 프로그램에 대한 연구는 부족한 상태이다. 본 연구의 핵심적인 논의는 'Maths300' 프로그램 가운데 'Maths With Attitude' 조작교구 프로그램에 대한 분석인데, 지금까지 3-4학년의 경우 전체 분석대상 교구 80개 가운데 69개 교구(86.25%)의 분석이 이루어졌으며, 5-6학년의 경우에도 80개 교구 가운데 현재 57개 교구(71.25%)를 분석하였다. 이와 함께 MWA 교구 프로그램을 활용한 초등수학수업의 현장적용은 현장교사를 통해

3-4학년의 두 영역(Pattern & Algebra, Number & Computation)의 교구 프로그램을 우리나라 초등수학의 수와 연산 영역과 확률과 통계, 문자와 식 및 규칙성과 함수 영역에서 실시한 바 있으며(김미화·김성준, 2009; 류수진·김성준, 2009), 이 글에서 소개한 5-6학년의 교구 프로그램 역시 이후 현장교사와 함께 초등수학에 투입하여 적용할 계획이다.

이 글에서는 MWA 조작교구 프로그램 가운데 5-6학년 프로그램에 대해 소개하고 그 활용 방안을 알아보기 위해 2개 영역에서 각각 1개 교구 프로그램을 살펴보았다. 이들 조작교구 프로그램은 조작교구 자체에서 의미를 찾기보다는 교구를 활용한 프로그램, 곧 주어진 이야기의 맥락이나 컴퓨터 프로그램(스프레드시트 등)을 통한 확인의 과정, 그리고 패턴을 강조하면서 규칙성을 일반화하기 위해 등장하는 대수적 추론 그래서 'early algebra' (초기대수)의 효과적인 도구가 될 수 있는 다양한 전략 등에 초점이 맞추어져야 할 것이다. 이는 MWA 조작교구 프로그램을 분석하면서 이끌어낸 하나의 시사점으로, 이러한 교구들이 단순하면서도 각각의 특징을 가지고 있다는 점과 실제 수업 프로그램에 초점이 맞추어져 있다는 것이다. 이와 함께 이들 교구를 활용한 프로그램의 독창성과 신선한 접근 방식 등을 우리나라 수학과 교육과정에 어떻게 효과적으로 적용할 수 있는가 하는 부분은 중점적으로 연구가 필요한 부분이다. 다시 말해, 교구들 가운데에는 우리에게 익숙한 교구들도 있고 한편 생소한 특이한 교구들도 있지만 중요한 것은 교구 자체에서 찾기 보다는 이들 교구를 수학수업에 어떻게 적용할 것인가 곧, 이들 교구를 활용하여 수업을 조직해내는 프로그램의 독창성을 이후 연구과제로 삼아야 한다는 것이다.

지금까지 MWA 조작교구 프로그램(3-4학년, 5-6학년)은 Number & Computation, Space & Logic, Chance & Measure, Pattern & Algebra 영역별로 조작교구에 대한 일차적인 분석-조작교구의 내용 및 사용방법-, 그리고 우리나라 2007 개정 수학과 교육과정 상의 초등학교 수학교과서와 비교하여 그 활용이 가능한 조작교구의 경우 학년별, 영역별, 내용별 활용방안에 대한 검토가 이루어져왔다(학진연구과제번호 C00001 중간보고서, 결과보고서 참조). 이를 통해 우리나라 초등수학에서 적용할 수 있는 보다 다양한 조작교구와 그 활용 프로그램을 이끌어내고 아울러 이러한 교구 프로그램을 현장수업에 적용하기 위한 발판을 마련하고자 하였다.

앞으로 이루어질 연구에서는 이러한 결과들 곧, 160개 교구와 이들 교구를 활용한 프로그램 가운데 우리나라 수학과 교육과정과 현장수업에 적용하기 위한 분석이 요구되며, 프로그램의 수정 및 보완을 통한 실제 활용 가능성에 대해 다루어져야 한다. 또한 앞서 논의했던 프로그램의 독창성을 어떻게 우리나라 상황에 맞도록 소재와 내용을 변환시킬 수 있는가에 대해서도 생각해보아야 할 것이다. 곧, 이러한 새로운 조작교구를 활용한 프로그램을 현장에 투입하고 그 수업에 대한 분석을 통해 소집단협력학습을 통한 수학적 의사소통과 수학적 사고력, 수학적 문제해결력을 이끌어낼 수 있는 계기가 되기 위해서는, 이러한 연구가 기반이 되어 초등수학에서 조작교구와 이를 활용한 프로그램이 다양화되어야 하며 더불어 이러한 프로그램을 통해 초등학생들이 수학적 개념을 조작하고 구성하는 동안 수학적 사고를 이끌어낼 수 있어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 강문봉 (2000). 초등학교 수학 학습용 게임 개발 및 활용에 관한 연구. *수학교육학연구*, 10(2), 199-214.
- 강완 · 백석윤 (2000). *초등수학교육론*. 서울: 동명사.
- 교육인적자원부 (2005). *초등수학 1-가, 1-나, 2-가, 2-나, 3-가, 3-나, 4-가, 4-나, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나 교과서*. 서울: 교육과학기술부.
- 교육인적자원부 (2005). *초등수학 1-가, 1-나, 2-가, 2-나, 3-가, 3-나, 4-가, 4-나, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나 교사용지도서*. 서울: 교육과학기술부.
- 교육인적자원부 (2007). *초 · 중등학교 교육과정*. 교육인적자원부 고시 제2007-79호. [별책1].
- 김남희 (1999a). 수학의 기본 구조 지도와 덤즈블릭. *학교수학*, 1(1), 305-324.
- 김남희 (1999b). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. *학교수학*, 1(2), 699-721.
- 김남희 (2000). 대수타일을 이용한 수학학습. *학교수학*, 2(1), 259-281.
- 김남희 (2001). 기하판을 활용한 학교수학의 지도. *학교수학*, 3(1), 155-184.
- 김미화 · 김성준 (2009). 'Maths With Attitude' 조작교구의 활용방안 탐색. *한국학교수학회논문집*, 12(4), 523-544.
- 김수미 (2000). 수학교육에서의 조작교구에 관한 연구. *학교수학*, 2(2), 459-474.
- 김수환 (1999). 수학영재캠프 활동사례-하노이 탑과 후속과제 풀이-. *수학교육학술지 제4집*, 63-76.
- 김응태 · 박한식 · 우정호 (2001). *수학교육학개론*. 서울: 서울대학교출판부.
- 남승인 (2003). *초등학교 수학학습에서 교구활용에 관한 연구-칠교판 활용을 중심으로-*. 대구교육대학교 논문집, 제38집, 109-134.
- 류성립 (2002). 초등수학 수업에서 퀴즈네어 막대의 활용에 관한 연구. *과학 · 수학교육 연구*, 제25집, 73-92.
- 류수진 · 김성준 (2009). 초등수학에서의 Maths300 교구 프로그램 활용 방안. *East Asian Mathematical Journal*, 25(3), 321-341.
- 박경자 · 우광식 · 이명숙 (1999). 도미노를 활용한 수학학습. *수학교육학술지*, 제3집, 69-105.
- 박영희 (1999). 수학영재캠프 활동사례-소마큐브-. *수학교육학술지*, 제4집, 89-95.
- 박진성 (2001). 놀이를 통한 수학학습에서 수학학습부진아의 학습활동 특성 분석. *서울교육대학교 석사학위논문*.
- 안병곤 (2002). 초등수학에서 학습교구의 활용 방안. *수학교육 논문집*, 13(1), 55-72.
- 우정호 (2004). *수학학습지도원리와 방법*. 서울: 서울대학교출판부.
- 유선미 (2006). *초등학교 수학과 조작교구 활용실태 및 활성화방안에 대한 조사 연구*.

청주교육대학교 석사학위논문.

정동권 (2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. *학교수학*, 3(2), 447-473.

최은주 · 최창우 (2009). 초등수학 수업에서 교구의 활용에 대한 사례 연구. *한국초등수학 교육학회지*, 13(1), 31-49.

Education Services Australia Ltd (2010). Math 300. Available at <http://www.maths300.esa.edu.au/>.

Black Douglas Professional Education Services (2010). All students can learn to work like a mathematician. Available at <http://www.blackdouglas.com.au/taskcentre/>.

Education Services Australia Ltd (2010). Curriculum corporation. Available at <http://www.curriculum.edu.au/>.

<Abstract>

A Study on the Using of 'Maths With Attitude' Programs in Elementary Mathematics Lessons⁵⁾

Kim, Sung Joon⁶⁾

The purpose of this study is to rethink the importance of manipulative materials and to extract of manipulative materials program and its application methods. Activity, construction, and operation is stressed in the elementary mathematics. For this, various technological tools and manipulative materials is emphasized in mathematics teaching-learning methods. Applications of manipulative materials in the elementary mathematics is gradually increased together with curriculum revisions and textbook developments. As a result, tangram, geo-board etc., many tools ate introduces to school mathematics. This study is executed in this contexts.

To achieve this, We introduce Australian 'Maths With Attitude' program. This program is composed of the primary level and secondary level. Each level consists of four domains - Number & Computation, Space & Logic, Chance & Measurement, Pattern & Algebra -, and each domains is made up of 20 tasks(i.e. manipulative materials) and programs.

This study takes the focus to 5-6 grades programs in the mid of the primary level. First, We introduce 'Monkeys & Bananas'(Number & Computation) and 'Triangles & Colours' (Pattern & Algebra) tasks, and investigate the examples of lessons using these tasks. Second, We think the probability of these tasks' application and draw examples in the elementary mathematic textbooks. Through this works, We respect teaching-learning methods is rich and various in the elementary mathematics lessons.

Keywords: elementary mathematics, manipulative materials, activity, construction, operation, 'Maths With Attitude' program

논문접수: 2010. 03. 11

논문심사: 2010. 03. 24

게재확정: 2010. 04. 05

5) This study was supported by the Education Research Institute, Busan National University of Education in 2010.

6) joonysk@bnue.ac.kr

<부록 1>

Space & Logic (Years 5 & 6)

- Crossing The Desert
- Crossing The River 2
- Cube Nets
- Diamonds & Rectangles
- Eight Queens
- Football Ladder
- Four Cube Houses
- Koala Carts
- Making Triangles
- Number Discs
- Octaflex
- Pattern Cube
- Pentominoes
- Reflections
- Sliding Tiles
- Soma Cube 2
- The Farmer's Puzzles
- Tricube Constructions A
- Which View?
- Who Owns The Monkey?

Chance & Measurement (Years 5 & 6)

- $64 = 65$
- Angle Estimation
- Brick Walls
- Cat and Mouse
- Chocolate Chip Cookies
- Final Eight
- Game Show
- Highest Number 2
- Kids On Grids
- Matching Faces
- Photo Angles
- Planets
- Red & Black Card Game
- Scale Drawing
- Surface Area With Tricube
- Take A Chance
- Time Swing
- Triangle Area
- Volume Line Up
- Where Is The Rectangle?

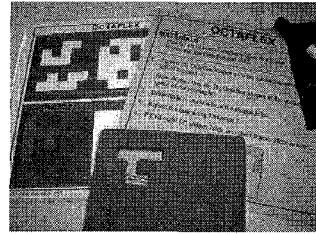
Pattern & Algebra (Years 5 & 6)

- Arithmagons 1
- A Stacking Problem
- Can Stack
- Garden Beds
- How Many Triangles?
- Jumping Kangaroos
- Latin Squares
- Mirror Patterns 2
- Painted Cubes
- Pizza Toppings
- Plate Triangles
- Pointy Fences
- Shape Algebra
- Smooth Edge Tiles
- Snail Trail
- The Mushroom Hunt
- Thirty-one
- Time For Tiling
- Tower of Hanoi
- Triangles & Colours

<부록 2>

1. Space & Logic(Years 5-6): OCTAFLEX

옥타플렉스는 테두리 안에 든 옥타플렉스 조각 한 세트와 활동카드 등으로 구성되어 있다. 활동카드로 주어진 다이어그램은 각각의 상황에서 문제를 해결하도록 되어 있다. 이를테면, 2개의 옥타플렉스 조각을 <다이어그램1>의 왼쪽에 있는 흰 테두리 위에 맞춰 놓고, 직사각형의 흰 부분에 나머지 6개의 옥타플렉스 조각을 맞춰 놓는다. 그런 다음 조각들이 어디에 끼워지는지를 확인하기 위해서 선을 그린다.

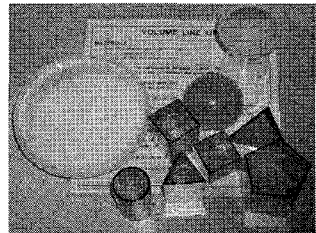


<다이어그램2>를 이용해서 위의 과정을 반복한다. 그리고 테두리 안에 8개의 모든 조각들을 맞춰 놓는다. 마지막으로 문제 만들기 활동에서 또 다른 다이어그램을 만들어보고 문제를 해결해본다.

'OCTAFLEX' 와 관련된 초등수학의 내용	교육과정 영역	해당학년
도형과 도형 움직이기	도형	2학년
도형 움직이기, 평면도형	도형	3학년
사각형과 도형 만들기	도형	4학년
합동, 대칭	도형	5학년
평면도형의 둘레와 넓이	측정	4, 5학년

2. Chance & Measurement(Years 5-6): Volume Line Up

이 교구는 밀리리터를 측정할 수 있는 용기, 여러 가지 모양의 용기(입체도형) 등으로 구성되어 있다. 보편단위의 필요성과 편리함을 알도록 하기 위해 여러 가지 용기를 조작한다. 이를테면, 먼저 '부피 추측하기' 단계에서 어느 용기에 쌀이 가장 많이 또는 적게 들어가는지 추측하고, 그 이유를 설명한다. 그리고 추측한 방법으로, 용기들의 들이를 순서대로 줄을 세워 보도록 한다. 각각의 용기가 줄에서 어떤 위치에 놓이는지 서로 토론할 시간을 준다. 다음으로 '추측 확인하기' 단계에서는 실제로 쌀을 사용하여 추측을 확인한다. 세 번째 단계는 '보편 단위로 측정하기'이다. 밀리리터를 측정할 수 있는 용기를 사용한 결과가 어떻게 되는가 가정해본다. 가장 큰 것부터 작은 것까지 순서 중 어떤 것이 바뀌는지 설명해보도록 한다. 그리고 각 용기의 용량을 어렵해서 밀리리터를 측정할 수 있는 용기를 사용하여 측정한다.



다음으로 '추측 확인하기' 단계에서는 실제로 쌀을 사용하여 추측을 확인한다. 세 번째 단계는 '보편 단위로 측정하기'이다. 밀리리터를 측정할 수 있는 용기를 사용한 결과가 어떻게 되는가 가정해본다. 가장 큰 것부터 작은 것까지 순서 중 어떤 것이 바뀌는지 설명해보도록 한다. 그리고 각 용기의 용량을 어렵해서 밀리리터를 측정할 수 있는 용기를 사용하여 측정한다.

'Volume Line Up' 과 관련된 초등수학의 내용	교육과정 영역	해당학년
비교하기	측정	1학년
들이재기	측정	3학년
여러 가지 방법으로 문제 풀기	문자와 식	6학년