# 분동을 활용한 문제의 수학적 탐구

김상룡[1)]

본 논문에서는 평형저울을 이용하여 정확한 무게를 측정하기 위한 분동설계 과정에서 적용되는 수학적 내용 및 그 표현들에 대해 탐구하였다. 이 일련의 과정에서 일어날 수 있는 수학 장면과 아이디어 탐구, 2진법, 3진법의 2가지 다른 표현에 대한 이해 등을 포함한 구체적인 수학적 사고의 형성과정을 설명하고 분석한다. 이러한 과정을 현장에 적용하여 학습자의 수학적 사고의 발달과 수학적 성향을 개선시키는데 조금의 보탬이 되고자 하는데 그 목적이 있다.

[주제어] 분동 설계 활동, 2진법, 3진법 표현, 수학적 사고, 교사의 역할

## Ⅰ. 서 론

7차 수학과 교육과정에서는 학생들의 수학적 힘의 함양을 위하여 다양한 교수・학습 방법의 적용과 수학 학습에 흥미와 자신감을 가지게 하는 교육, 학습자의 활동을 중시하는 교육, 수학적 개념으로 정확하게 사고하는 능력 등을 강조하고 있다. 2007 수정 수학교육과정에서는 수학적 창의성과 의사소통능력을 강조하고 있다. 그러나 실제 현장에서는 학습자의 활동 및 다양한 교수・학습 활동을 통한 교육보다는 교사 중심의 수식 세우기 활동 및 기계적인 계산의 반복에 의존하는 활동으로 학습자들이 수학에 흥미와 자신감을 잃는 경우가 많다. 또한 수학적 개념형성의 부진 및 표현력의 부족으로 문장제의 일부만 변형하여도 해결하지 못하고 쉽게 포기하는 것이 지금의 실정이다. 80년대 이후부터 문제해결은 항상 수학교육의 핵심적인 역할을 하고 있다고 보아야 한다. 단순한 문제풀이가 아닌 종합적이고 고차원적인 사고력을 요구하는 실질적인 문제해결력을 강조하고 있다.

우리나라 초등학교의 경우 제 4차 교육과정부터 계속해서 문제해결을 강조하고 있으나 학생들의 문제해결력 신장은 만족스러운 결과를 가지지는 못하는 실정이다. NCTM에서는 문제해결력을 포함하여 수학적 연결성, 표상, 수학적 의사소통, 추론 등을 강조하는데, 이들은 상호유기적으로 역할을 수행한다(NCTM, 2000). 하지만 초등학생들은 이들에 대해 따로 분리되어 강조되거나 선언적인 구호만 난무할 뿐 실질적인 역할은 피상적으로만 행해진다고 봐도 무방할 실정이다.

이러한 문제점들이 종합적으로 다루어지기에 적합한 교수 학습모형 중 하나는 문제중심 -특히 장기적인 문제 해결- 학습일 것이다. 문제중심 학습은 Wheatley(1991)가 제안한 교수-학습 전략의 하나로 과제와 소집단 협력학습, 공유하기가 서로 상호작용을 하면서 이루어지는 교수-학습 모형을 말한다. 많은 연구에서 문제중심 학습은 학생들로 하여금 적극적

1) 대구교육대학교 수학교육과

으로 참여하게 하고 주어진 과제를 잘 해결한다고 한다.

이 문제중심학습을 포괄하면서도 학습자들은 활동을 하면서 그 활동과정에 대한 적절한 기록과 반성을 통하여 문제가 어떻게 형성되고, 수학적 사고가 어떻게 전개되는지에 관련된 구체적이고 심도 있는 활동이 필수적이다. 이러한 과정을 오랜 시간을 두고 종합적인 이해과정을 거치는 장기적인 문제 상황 과제를 적용하면 적절할 것이다.

초등 수학 학습에서 하나하나의 개별적인 문제를 해결하는 것도 의미는 있다. 하지만 많은 문제들을 단순하게 고립시켜 풀이만 한다고 해서 수학적 능력이 실질적으로 향상한다고 볼 수는 없다. 하나의 문제 상황을 두고 장기적으로 탐구하고 아이디어 또는 수학적 생각을 깊이 통찰하는 것은 매우 중요하다. 이러한 관점에서 분동을 활용한 문제에 대한 교사의 적절한 제시 및 학생과의 상호작용은 초등학생의 수학적 아이디어 탐구 및 문제해결력 신장으로 나아갈 수 있을 것이다. 이렇게 한 문제를 다양한 관점에서 다룬 논문은 많지 않다. 그래서 수학적 아이디어 탐구와 현장에서 적절하게 적용하기 위한 교사의 역할은 중요하다.

따라서 본 논문에서는 평형저울을 이용하여 정확한 무게를 측정하기 위한 분동설계 과정에서 적용되는 수학적 내용 및 그 표현들에 대해 탐구하고자 한다. 이 일련의 과정에서 일어날 수 있는 수학 장면과 아이디어 탐구, 2진법, 3진법의 2가지 다른 표현에 대한 이해 등을 포함한 구체적인 수학적 사고의 형성과정을 설명하고 분석한다. 이러한 과정을 현장에 적용하여 학습자의 수학적 사고의 발달과 수학적 성향을 개선시키는데 조금의 보탬이 되고자 하는데 그 목적이 있다.

## Ⅱ. 이론적 탐색

### 1. 자율적인 학습자 및 탐구 조장 과제

학습자들은 단순히 주어진 문제의 해결만으로 자율적인 학습자가 되기는 어렵다. 또한 문제가 만들어지는 구체적인 상황과 그러한 경험이 없는 한 한계성을 갖기 마련이다. 이러한 관점에서 장시간에 걸쳐 끊임없이 반성하고 자기가 만든 내용을 검토하고 반성하고 수학으로 표현하는 활동 등을 종합적으로 다루는 프로젝트를 실행할 필요가 매우 높다.

학생들은 주어진 과제를 자신의 수준에 맞게 접근하고, 문제를 해결 한 후, 해결방법을 소집단의 다른 구성원들과 토의를 통해 해결방법을 정당화하고 다른 구성원들의 문제해결 방법을 배울 기회를 갖는다(신인선, 권점례, 2003).

탐구를 조장하는 과제에 대해 살펴보자. 개방형 문제는 주어진 문제에 대해 해가 여러 가지가 있는 문제를 말하며, 하나의 답을 구하더라도 다른 답이 있으므로 계속해서 문제해결에 참여해야 한다. 또 해를 구하는 방법도 다양하게 존재하기 때문에 학생들은 자신의 수준에 맞는 해결방법을 선택해서 문제 해결을 할 수 있으며, 그 결과 한 교실에서도 수준별 수업이 가능하다.

장기적인 문제 상황의 과제는 학생들의 일상생활과 밀접한 관련이 있고, 과제를 해결하는데 오랜 시간이 걸리며 학생 스스로가 과제를 해결하기 위해 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지, 어떻게 접근해야 하는지를 결정해야 하는 과제를 말한다.

이러한 과정을 이해하기 위해 다음 김상룡(2008)이 제기한 자율적인 문제제기자가 되는 과정을 살펴보자.

궁극적으로 학습자가 스스로 의문을 제기하고 그 의문을 해결해나가는 과정에서 문제의 해를 찾게 되고, 관련된 수학적 사고 활동을 전개하게 되어야만 한다. 또한 수학적 사고의 높은 단계는 스스로 제기되는 문제의 수준에 따라서 향상된다고 볼 수 있으며, 아무리 사소한 문제라 할지라도 학습자의 의문제기 수준에 따라 더 향상될 수 있다는 가능성을 충분히 내재하고 있다고 볼 수 있다. 다음의 과정들이 학습자가 만들 수 있는 구체적인 의문제기에 관한 내용들이다. 아래 ①에서 ③까지는 문제해결 과정에서 요구되는 것이지만, ④ 이상에서는 분석, 종합, 평가의 과정들이 필수적으로 수반된다. 이러한 의문제기를 하고 해결하는 가운데 수학적 사고의 질이 실질적으로 향상된다고 볼 수 있을 것이다.

① 답만 구하는 경우
② 하나의 해결 방안과 답을 구하는 것
③ 여러 가지 해결 방안과 답을 구하는 것
④ 여러 해결 방안 중 가장 자신에게 맞는 해결 방안강구 및 이유 밝히기, 다른 해결 방법들 간의 차이점 및 공통점에 대해 탐구하는 것
⑤ 이러한 문제의 활용사례를 찾는 것
⑥ 이것을 활용해서 다른 문제를 만들고 해결하는 것
⑦ 문제를 해결하는 과정에서 사용된 수학적 아이디어와 사고를 탐구하는 것
⑧ 문제해결 여부를 결정하는 것, 타인을 이해시키는 것
⑨ 전략 사용의 가치, 수학의 유용성 등에 대한 에세이를 작성하는 것
⑩ 다른 사람들에게 자신의 수학함의 과정, 수학문제 해결 과정 전반을 설득시키고 이해시키는 것

## 2. 교사의 역할

초등학교 과정에서 중요시되는 실생활과의 연계, 만드는 수학세계의 경험은 수학적 세계를 이해하는 매우 좋은 계기가 됨에 틀림없다. 이러한 경험을 학생들에게 충실하고 의미있게 전해주기 위해서라도 교사는 수학교육목적의 본질을 제대로 이해해야만 한다.

먼저 교사는 제시되는 상황과 그와 관련된 수학내용에 대한 풍부한 지식을 갖추어야만 한다. 문제중심 학습에서 교사는 사용되는 수학내용 그 이상의 지식을 알아야 한다. 단지 내용학적 지식만으로 초등학생에게 적절한 수학적 사고력을 형성시키기에는 미흡하다. 교사는 문제가 발생하는 맥락 및 상황, 수학화 과정, 표현기법, 수학적 연결성, 아이디어 탐구에 대한 종합적인 이해가 필요하다. 본 분동활동에 대한 수학적 탐구는 Ⅲ장에서 제시된 상황에서 4학년 학생 4명과 방과 후 활동의 일환으로 학생들과의 상호작용이 이루어지는 과정에서 모티브가 되어 추후 더 깊은 탐구를 하게 되었다. 어떤 내용과 그 실행과정이 소개되었다고 해서 그대로 수학 학습에 투입할 수는 없다. 학습자의 이해와 더불어 교사가 이러한 과정의 실질적인 경험 및 유의점에 대한 면밀한 검토과정이 필요하다. 이러한 과정이 초등 수학교실에서 제대로 실행되기 위해서는 수학내용의 탐구는 물론 학습자와 함께 탐색되어야 하기 때문에 교사의 역할은 매우 중요하다.

이러한 과정을 수학교실에서 특히 초등학생에게 적용하기 위해서는 다음과 같은 내용에 대한 이해가 전제되어야 한다. 현대에서 교사의 역할은 지식의 전달자에서 조사하고 처리하고 아이디어를 논의하는 안내자 촉진자가 되어야 한다. 학습자 자신의 학습에 관련되는 활동적인 수단으로 프로젝트를 만들고 이러한 과정에서 수학 전반의 가치 이해와 능력의

배양의 실현이 되도록 배려해야 한다. 교사는 문제를 풀이하는 것을 지켜보는 것이 아니라, 학습자들과 함께 수학학습에서 활동 속에서 문제를 인식하고, 주어진 문제를 해결하기 위해 참가해야 한다. 즉, 교사는 동시에 공동 학습자가 되고, 가장 알맞은 활동의 안내자요, 학습자의 의견을 존중하고 표현의 기회를 제공하며 활동을 고무해 주는 격려자가 되어야 한다는 것이다.

학습자들은 수학적 결과에 대한 의심, 더 나은 수학적 사고, 종합적이면서 구조적인 지식망을 형성할 수 있는 자세를 습관화해서 실질적으로 활용할 수 있어야 수학에 대한 새로운 것을 추구할 수 있다.

초등 교사들은 수학에 대한 폭넓은 시각과 수학화 과정, 수학사를 통해 본 수학에 대한 발전의 원리들을 학습과정에서 학습자가 실행하도록 환경을 조성해야만 한다. 작금의 현장 수학에서 가장 부족한 것은 현실에서 수학을 만드는 수평적 수학화, 과학적 원리에 입각한 수학을 만드는 경험의 부족 등이 문제점 중의 예들이다. 이러한 활동들과 행위들이 수학적 창의성 향상의 중심에 있음을 이해하고 구체적으로 실행할 방안을 강구해야만 한다.

## Ⅲ. 분동을 활용한 수학적 탐구

### 1. 분동을 활용한 문제 제작 과정 탐색

이 사례는 이미 널리 알려진 정형문제를 개방형으로 변환하는 과정 및 의의를 밝히고자 한다. 아울러 이와 관련한 활동의 개괄적인 내용은 김상룡(2004) 논문에 제시되어 있으며, 보다 체계적으로 분석하고 그 의미를 명확하고 다양하게 전개하였다.

"1g, 3g, 9g, 27g, 81g의 분동 5개를 사용하여 연속해서 측정할 수 있는 무게는 어디까지인가?"의 문제는 동일 알고리즘을 반복하여 적용할 수 있으며, 최대 121g까지 측정이 가능하다. 예를 들어 16g은 27g과 1g을 왼쪽에 두고 오른쪽에 9g, 3g을 놓고 재고자 하는 물건을 오른쪽에 올려놓으면 된다. 즉, 16=(27+1)-(9+3)이므로 가능하다. 이 문제가 나오게 된 배경을 생각하여, 문제를 이렇게 바꾸어 제시하여 보자.

문제 상황 또는 프로젝트 과제 : 양팔 저울을 사용하여, 1g에서 1,000g까지 모든 경우의 무게를 모두 측정하고자 한다면, 분동은 어떤 것으로 몇 개나 있으면 될까?

이 문제는 수학적 아이디어를 하나씩 적용하면서 나타나는 수학의 힘에 대한 경험, 십진법의 힘, 다음 2-4절에서 제시되는 다양한 전략, 수학적 아이디어들과의 관련성, 활동을 수학적 표현으로 바꾸고 그 관련성을 구체화 시키는 과정, 이러한 과정에서 얻게 되는 수학화 및 수학적 아이디어를 설명하는 그러한 활동과 표현들이 내포되어 있다.

이러한 과정에서 나타나는 수학교과 내용학을 간단히 살펴보면, 수의 대소 비교, 10진법이 만들어지는 과정, 덧셈과 뺄셈, 분동수를 구하는 과정에서의 곱셈, 수들의 적절한 합성과 분해, 2진법과 덧셈적 사고, 3진법과 덧·뺄셈 활용, =(또는 상등) 이해, 이항에 대한 이해(평형저울의 좌·우 이동), 수열, 등비수열 및 그 합, 지수표현, 지수와 로그의 관계(분동 개수를 구하는 과정에서 합과 개수와의 관계) 등 초·중등 수학교육과정의 200시간 정도를 관련시킬 수 있는 좋은 과제라 할 수 있다.

## 2. 문제해결과정 및 다양한 해, 그리고 관계성 탐구

다음의 몇 가지 구체적인 해결 방안과 관련된 수학 내용들을 간략히 나타내 보자. 첫째, 수학에서 수만 읽을 수 있거나 단순히 수세기만 할 경우, 즉 체계적인 수학적 사실을 전혀 사용하지 않는 경우에 해당된다. 1g에서 1000g까지 각각을 모두 만들면 된다. 즉 1000개의 분동이 필요하다. 아니면 1g짜리가 1000개 있으면 된다. 그러나 너무 중복되는 것이 많으며 단순 조작만을 의미하며 수학적 사고는 전혀 하지 않는 경우에 해당한다. 이 첫 번째 활동에는 1 : 1 대응적 사고, 언어적 관점에서 찾기 및 사용, 1000까지의 대소비교 및 덧·뺄셈 문제를 제기하고 해결할 수 있다.

둘째, 첫 번째에서 중복된 것들을 과감히 제하여 체계적으로 나타낸다면, 이 문제는 묶음을 활용하여 십진법 원리를 이용하면 된다. 이러한 경우는 1g짜리 10개, 10g짜리 9개, 100g짜리 9개로 모두 28개의 분동이 있으면 충분하다. 위의 1000개의 분동 개수에서 획기적인 28개로 줄였다. 이것으로 추론하여 보건데, 수학을 활용하면 매우 경제적이며 간단하게 할 수 있다는 것이다. 이 분동을 활용한 수학적 활동 과정에서는 10진법의 power 이해, 10진법을 활용한 덧셈, 뺄셈, '='의 표현 및 이항, 구체적인 덧·뺄셈의 문제 장면을 만들 수 있는 활동을 장려할 수 있다. 그러나 이 경우에도 상당히 중복된다, 그렇다면 분동 개수를 더 줄일 수 있는 방법은 어떠한가를 옛날 선조들이 사용한 주판을 사용하여 나타내 보면 다음과 같다.

셋째, 이는 낱개 5개가 되면 주판 위의 한 알을 사용하는 경우로, 1g짜리 5개, 5g짜리 1개, 10g짜리 5개, 50g짜리 1개, 100g짜리 5개, 500g짜리 1개로 모두 18개의 분동이 있으면 족하다. 이 경우 한 아이디어를 조금만 더 사용해도 경제적인 효과를 낼 수 있음을 미루어 짐작할 수 있다. 위의 두 번째와 같은 수학 내용의 활동이 주요 대상이 된다.

넷째, 이러한 과정을 거쳐 초등학교 4학년 학생들(대구시내 4학년 학급 중간 정도 2명, 상위 학생 2명과 방과 후 활동으로 2시간 정도 실시)에게 이 문제해결을 요구하였더니 다음과 같이 10과 100, 1000을 각각 자리수 개념으로 활용하여 단순화 전략을 활용하여 제시하였다. 교사는 아이들에게 "이 문제를 단순화하여 10g까지만 생각한다면? 그리고 10g 단위 100g 단위로 확산하면,"라는 발문을 활용할 수 있다.

몇 가지 사례를 들어 본다면, ① 1g, 2g, 3g, 4g으로 10g까지 측정 가능하다. 따라서 10g, 20g, 30g, 40g, 100g, 200g, 300g, 400g의 12개 분동으로 가능하다. 이 경우에는 단순한 덧셈만 활용하면 된다.

② 1g, 2g, 3g, 5g으로 10g까지 측정 가능하다. 따라서 10g, 20g, 30g, 50g, 100g, 200g, 300g, 500g의 12개 분동으로 가능하다. ①의 경우보다는 좀 더 많은 양까지 측정이 가능하다는 장점이 있으며, 이 과정 역시 단지 단순한 덧셈만 활용한 경우이다.

③ 동일하지만 다른 방법은, 3g, 4g, 5g으로 9g까지 가능하다. 따라서 30g, 40g, 50g, 300g, 400g, 500g으로 1에서 999g까지 측정이 가능하고 나머지 1g이나 1000g으로 만들면 된다. 즉 10개면 족하다. 이 경우 위에 비해 분동 개수가 줄어 들고 덧셈과 뺄셈을 활용해야 되므로 이항에 대한 이해를 구할 수 있다.

다섯째, 위의 네 번째 경우에도 어떤 한 양을 재고자 할 경우에 중복되는 경우가 다소 발생된다. 그렇다면 더 줄일 수 있는 방법은 있는가에 대한 탐구를 한 결과들을 나타내면 다음과 같다. ① 한 방안은 1g, 2g, 6g이면 9g까지 측정할 수 있으므로, 10g, 20g, 60g, 100g, 200g, 600g, 1에서 999g까지 측정이 가능하고 나머지 1g이나 1000g으로 만들면 된다. 즉 10개면 족하다. 4g을 구하고자 하는 경우 10-6이거나 6-2로 중복된다. ② 또 다른 방안

은 1g, 3g, 6g이면 10g까지 측정할 수 있으므로, 10g, 30g, 60g, 100g, 300g, 600g 9개 분동이면 족하다. 10g인 경우 1, 3, 6을 동시 사용하면 되기 때문에 중복이다. ③ 또 다른 방안은 1g, 2g, 7g이면 10g까지 측정할 수 있으므로, 10g, 20g, 70g, 100g, 200g, 700g 9개 분동이면 족하다. ②와 마찬가지이다.

네 번째 경우까지의 수학적 활동이 가능하고, 나아가 한 자리 수가 늘어날수록 분동 개수를 구하는 문제는 곱셈 문제로 바꿔도 알 수 있다.

2진법의 경우와 3진법에 관해서는 따로 분리하여 제시하고자 한다.

### 3. 분동활동과 2진법, 수학적 관계성 탐구

이와는 달리 이렇게 접근해 보자. 1g을 만들고 2g을 재야하므로 2g을 만들고 1+2=3이므로, 4g을 만들고, 8g, 16g, 32g, 64g, 128g, 256g, 512g으로 10개지만, 처음부터 순차적으로 만들어 나간다. 이것은 2진법의 원리가 된다. 또한 이들 분동으로 어떤 무게를 측정하게 되면 이진법을 이해하고 응용하는 장으로 만들 수 있다. 이 일련의 수들의 표현으로 지수를 도입하고, 규칙성 탐구로 수열 중 등비수열을 도입할 수 있으며, 일반항, 합을 구하는 공식의 유도 등을 공부할 수 있다. 그러나 이것도 분동을 한쪽에만 사용하며 '+'만 계속 반복하는 것이 된다.

우리가 이미 알고 있는 2진법을 구하는 알고리듬과 이 활동을 관련지어 보자. 즉, 위와 같은 과정에서 구체적인 이진법 표현의 탐구를 살펴본다면, 어떤 분동이 선택 사용되면 1, 선택되지 않으면 0으로 해서 큰 것부터 차례로 나타내면 그것이 이진법 표현이 된다.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 111 | |
| 2 | 55 | -1 |
| 2 | 27 | -1 |
| 2 | 13 | -1 |
| 2 | 6 | -1 |
| 2 | 3 | -0 |
| | 1 | -1 |

왼쪽 표에서 보는 바와 같이 111을 2로 계속해서 나누어 나타낸 나머지들을 거꾸로 나타낸 것이 $1101111_{(2)}$이다.

그러나 분동을 활용하게 되면 111보다 적은 분동 중 가장 큰 64를 먼저 사용하고, 남은 부분인 57을 다시 32를 사용하고, ... 계속한 과정은

$$111 = 64 + 32 + 8 + 4 + 2 + 1$$

$= 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ 으로 표현되어지고 위의 이진법에서 0에 해당되는 것은 분동을 선택하지 않는 경우에 해당된다.

이 외에도 이 본동 활동은 규칙성 탐구와 관련된 문제, 지수와 관련된 문제, 등비수열의 합 구하기($2^0 + 2^1 + ... + 2^n = 2^{n+1}-1$)로 다음 추는 1g 부족하기 때문에 그 합을 쉽게 이해하고 구할 뿐만 아니라 형상화할 수 있다.

나아가 필요한 분동 개수 구하기 문제로 "만일 $10^6$g까지 측정한다면 몇 개가 가능한가?"라는 문제는 $\min(2^{n+1} \geq 10^6)$에서 n+1을 구하는 과정에서 로그로 변환하여 해결해야만 한다. 그래서 로그는 매우 큰 수를 적절한 상황에서 획기적으로 줄이는 역할을 수행함을 미루어 짐작 할 수 있으며, 어떤 상황에서 유도되고 활용되는지도 학습자들은 구체적으로 알 수 있다.

### 4. 분동활동과 3진법, 수학적 관계성 탐구

위에서 보았듯이 이진법은 +만 사용하였다. 다른 수학적 사고인 -를 고려하면 다음과 같은 과정을 생각할 수 있다. 이진법이 활용된 분동 2개로, 즉 1g과 2g의 문제에서 3g까지만 잴 수 있지만 1g과 2g을 재기 위해 그 차이를 이용한 3g을 생각하면 4g까지 측정이 가능하다. 마찬가지로 5g을 재기 위해서는 앞의 원리와 동일하게 적용하게 되면, 9g이 되고 그

차이를 이용하면 간단히 해결된다. 즉 덧셈과 뺄셈의 원리를 적절히 응용하면 적은 추로 더 많은 경우의 수가 측정 가능해진다. 이렇게 만든다면, 1000g까지는 1g, 3g, 9g, 27g, 81g, 243g, 729g의 7개의 추로 모든 경우가 가능해진다. 3진법은 정규과정에서 활용은 되지 않지만 이 분동활용에는 특히 이 3진법의 개념이 잘 나타나기에 구체적으로 언급한다.

여기에서 다른 접근을 시도해 보자. 7개의 추는 $3^0$, $3^1$, $3^2$, ... $3^6$에 해당된다. 이는 모든 수를 3진법의 표현과 관련시키는 것으로 이해된다. 그런데 3진법은 자리수에 0, 1, 2를 사용하며 2진법에서와 마찬가지로 '+'만 활용한다. 이미 우리가 알고 있다시피, $1(3^0)$을 2번 사용하게 되며, 5는 $3^0$과 $3^1$을 2번 사용하여 나타낸다. 그러면 이러한 분동 활용은 3의 거듭제곱에 해당하는 분동이 각각 2개씩 있어서, 평형저울의 한 쪽만 사용해서 나타내는 것이 된다.

여기서 활용한 것을 기록하여, 적합한 표현으로 표기하여 그 의미를 잘 음미해 보면 많은 수학적 사실들을 알 수 있다. 2진법을 만드는 방법에 대해서는 수학에서 학습한다. 이를 3진법에서도 동일하게 적용시키면 그 원리는 다음과 같다. 다음 예를 들어 구체적으로 나타내어 보자.

$$\begin{array}{r|l l} 3 & \underline{624} & \\ 3 & \underline{208} & -0 \\ 3 & \underline{69} & -1 \\ 3 & \underline{23} & -0 \\ 3 & \underline{7} & -1 \\ & 2 & -1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 624 &= 243 + 243 + 81 + 27 + 27 + 3 = 212010_{(3)} \\ &= 3^5 + 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^3 + 3^1 \\ &= 2 \cdot 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3^1 \\ &= 729 - 81 - 27 + 3 \\ &= 3^6 - 3^4 - 3^3 + 3^1 \end{aligned}$$

이 과정을 잘 살펴보자. 위의 왼쪽에 나타낸 일반적인 3진법을 구한 과정은 624를 3으로 계속해서 나누어 나타낸 나머지들을 거꾸로 나타낸 것이 $212010_{(3)}$이다. 그러나 오른쪽 수식활동은 분동을 활용하게 되면 큰 수부터 처리하게 되므로 양을 어떻게 3의 거듭제곱으로 나타내는지를 구체적으로 알게 된다. 상황에서 주어진 수를 적절하게 분해하고 합성하는 과정에 해당된다. 반면 양팔저울 양쪽을 사용하는 경우는 이 경우 큰 것($3^6$=729)을 먼저 사용하고 그 나머지를 다시 다른 쪽 저울에 놓아 균형을 회복하고 계속 활동한 결과이다. 한쪽만 사용하면 분동은 6개를 사용했지만, 양쪽을 사용하는 경우는 4개로 보다 경제적임을 쉽게 알 수 있다.

사용되는 추가 다르면 그 표현은 다르다. 1개의 set(3의 거듭제곱이 각각 2개씩 활용 할 수 있는 경우)와 또 다른 1개의 set(3의 거듭제곱을 각 1개씩만 활용 할 수 있는 경우)를 활용한 경우와는 각기 표현은 다르지만, 1:1 대응시키고 아이디어를 표현하는 것으로는 같다고 볼 수 있다. 이러한 활동 과정에서 일어나는 수학적 표현 간 관계 및 수학적 아이디어를 살펴보면 다음과 같다. Ng의 양을 측정하기 위해서는 다음과 같은 아이디어 및 그 관계를 규명할 수 있다. 이 아이디어는 Eileen(2007)은 단지 3진법 2가지 표현 간 관계를 다루었지만, 본 연구자는 분동활동을 구체적으로 연결시켜 이 아이디어를 시각화 구체화시켰다. 다음 표는 이들 2가지 관계를 체계화하여 나타낸 것이다.

<표 1> 3의 거듭제곱의 활용에 따른 차이

| | 3의 거듭제곱을 각 1개씩 활용 | 3의 거듭제곱을 각 2개씩 활용 |
|---|---|---|
| 절차 | 1) If $\frac{3^{n+1}-1}{2} < N < 3^{n+1}$, then<br>choose n+1 such that min{$3^{n+1} \geq$N}<br>Else choose n such that max{$3^{n} \leq$N}<br>2) N- $3^n$ or $3^{n+1}$-N 에 대하여 위의 절차 수행 | 1) choose n such that min{ $3^n \geq$ N}<br>2) N- $3^n$ -N에 대하여 위의 절차 수행 |
| 계수 및 설명 | 계수는 { -1, 0, 1 }이며, 평형저울의 오른쪽이며 +1, 왼쪽이면 -1, 선택되지 않으면 0 | 계수는 {0, 1, 2}에 해당되며, 선택되어지는 각 분동 개수가 계수 |
| 사고 | +, - 두 가지 연산 사용 | 한쪽 + 연산만 사용 |
| 변환 | 3의 거듭제곱수들의 합으로 표현 (다른 경우로의 변환 규칙)<br>$3^{n+1}$ - $3^n$ ↔ $2 \cdot 3^n$ | |
| 활용된 분동 개수 비교 | 오른쪽 활용 분동 수 x, 왼쪽 분동 수 y<br>(1) 왼쪽 표현에서 2가 계수로 나타나지 않으면 x=y<br>(2) x ≥ y 상쇄되는 것이 없을 경우 =<br>상쇄되는 것이 있는 만큼 적게 사용됨<br>$3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n$ ( 아래의 예들을 살펴보면) | |

실재 이 아이디어를 표현하기 위해 사용한 예제들로, ① $54 = 81-27 = 3^4 - 3^3 = 2 \cdot 3^3$ ② $25 = 27 - 3 + 1 = 3^3 - 3^1 + 3^0 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0$ ( $= 3^3 - 3^2 + 3^2 - 3^1 + 3^0$ ) ③ $48 = 81-27-9 + 3 = 3^4 - 3^3 - 3^2 + 3^1 = 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 3^1$ ④ $5 = 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3^1 + 3^1 - 3^0 = 2 \cdot 3^1 - 3^0 = 3^2 - 3^1 - 3^0$ ⑤ $8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3^2 - 3^1 + 3^1 - 3^0 = 3^2 - 3^0$ ⑥ $40 = 27 + 9 + 3 + 1 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$

이 3진법과 관련된 활동 역시, 이 문제는 위의 2진법 경우와 마찬가지로 등비수열(공비가 3인)을 이루며 보다 일반적인 등비수열의 합을 계산할 수 있으며, 만일 100만g까지 측정한다고 가정하면 대수(log)를 도입하는 문제의 장을 만들 수 있다. 이를 통해 지수와 로그의 관계를 이해할 수 있는 계기가 된다.

### 5. 활동의 종합적 반성을 위한 제안

위에서 언급한 사례들을 종합적으로 살펴보고 우리가 더 추구해야 할 수학적 생각에는 다음의 사항들이 있다. 수학문제의 해결은 끝이 아니라 새로운 시작이다. 새로운 시작을 하기 위해 우리는 문제인식을 해야만 한다. 구슬이 서말이라도 꿰어야 보배이듯이, 이러한 수학적 아이디어와 그 관련성들, 실재 문제에서의 응용, 수학적 힘의 인식 등은 구체적인 반성이 필수적이다. 종합적인 문제로 "이러한 활동을 통하여 알게 된 수학적 사실을 설명하거나 증명하라"는 문제인식은 새로운 프로젝트로 나아가게 되며, 구체적인 수학실행에

대해 반성하게 된다.

초등 수학에서 수학적 연결성을 강조하고 있다. 다만 이러이러한 성격을 갖는다고 제시될 뿐 구체적인 상황이 없다. 이러한 관점에서 이 분동활동을 통한 수학적 탐구는 그러한 구체적인 사례로서 충분한 역할을 할 수 있다. Ⅲ장에서 언급한 내용들은 수학적 아이디어 및 사고를 낳게 하는 과정을 보여 주었다. 사칙연산을 비롯한 수학적 아이디어간 비교도 가능하다. 조금만 조건을 변경한다면 많은 문제의 장으로 활용 가능하다. 분동과 관련된 사고 활동을 수학적 표현으로 나타내고 검정할 수도 있다. 이것이 계기가 되어 계열성으로 나아가 상위 개념으로 나아갈 수 있다. 이러한 의미에서 초등수학에서 아이디어 탐구는 매우 중요하다. 학생들과 상호작용으로 만들어진 이러한 과정 및 그 결과는 이러한 활동을 제시하는 교사가 인내를 가지고 적극적이고 구체적으로 실행할 때만 가능하다.

전반적으로 이 문제는 실생활에서 수학적 사고를 적용한다면 중복되는 요소를 없애고 논리적인 사고, 보다 더 고민하며 수학적 사실을 더 많이 사용할수록 물자의 절약과 수학적 사고력 향상을 동시에 이룰 수 있다. 나아가 수학 내에서의 영역 간 연결, 개념의 활용 장면, 도입 이유 및 개념들 간의 상호관련성, 통합적 사고, 수학의 가치를 이해하는 장을 만들 수 있다. 또한 What if not 전략을 적절히 사용하여 학습자로 하여금 스스로 이 장면을 활용하여 다양한 문제를 만들 수 있는 기회를 많이 제공하는 것이 필요하다.

이러한 평형저울을 활용한 내용에 대한 수학적 아이디어를 구체적으로 알아보면 위에 나열한 것들 외에도, 수학학습에서 매우 중요한 아이디어인 상등(=)에 대한 것으로 오른쪽과 왼쪽의 값이 같으면 평형을 유지하는 시각적인 것을 추상화함으로써 쉽게 이해될 수 있다. 저울이 평형을 이루는 각 경우를 자세히 음미하고 통찰해 본다면, 같은 것을 더하거나 빼면 평형은 유지되어 같다는 것을 쉽게 볼 수 있다. 방정식의 해를 구하는 아이디어와 연결시킬 수 있다. 또한 어느 한 쪽에서 다른 쪽으로 이동하게 되면 균형이 이루어지지 않으며 이 경우 이항하는 것으로 -를 도입해 표현하면 될 것이다.

제시된 프로젝트 문제 활용을 중심으로 수학교육 아이디어를 고려해 본다면, 교사는 구체적인 활용 장면 하나를 가지고 표현의 다양성, 표현간의 관계, 행위와 수학 표현과의 관계 탐구, 비교 및 판단. 평가, 문제 만들기 및 그 해결 과정을 통한 구체적인 수학 세계를 탐구하도록 안내할 수 있어야 한다.

## Ⅳ. 결 론

정보화 · 세계화 사회로 특징지어지는 21세기를 이끌어 갈 유능한 인재를 양성하는 초석을 다지는 초등 수학교육의 중심은 주어진 상황에서 문제를 인식하고, 주어진 문제를 자기 주도적으로 해결하는 자율적 학습자를 기르는 것이다. 즉 새로운 지식과 가치를 창조할 수 있는 고도의 수학적 사고력이 있는 인간 양성에 두어야 한다. 이에 따라 학생들로 하여금 스스로 사고하고, 논리적으로 탐구하며, 추론하는 능력 즉 수학적인 힘을 기르며, 활동적이고 자발적인 자세로 문제해결능력 및 다양한 수학적 사고 기능을 도와주는 것이 최근의 수학교육의 흐름이라 할 수 있다.

본 논문에서 제시한 분동 활동은 수학적 사고 실험의 일종으로 생각해야 하고, 개방적인 접근이 필요하다. 교사는 교육과정을 잘 관련시켜 학생들로 하여금 수학적 사고 함양의 장이 되도록 배려해야 한다. 장기간에 걸친 프로젝트로서 활용해도 매우 좋은 소재이며,

다양하고 많은 문제를 만들고, 다양한 수학적 표현의 소재로도 적극 활용되기를 바란다.

본 논문에서 제시한 평형저울을 이용하여 무게를 측정하기 위한 분동설계 과정 및 그 활용에 대한 활동을 음미하고 수학적 아이디어 탐구, 수학적 표현, 내용 영역간 연결성, 문제제기 등이 학습자들의 인지적, 정의적 수학 능력을 향상시키는 계기가 되었으면 한다. 특히 영재학생들에게 투입되어 양질의 프로그램이 되어 수학적 사고력 향상에 기여할 수 있었으면 한다. 초등현장에서 실행하면서 그 과정을 기록하여 분석하면 좋은 참고자료가 될 것이다.

참 고 문 헌

김상룡 (2008). 수학적 사고와 그 함양에 관한 연구. **초등교육연구 논총, 24**(2), 79-94.

김상룡 (2004). 학습자 능력과 반응에 기초한 발문, **초등교육연구 논총, 20**(1), 39-68.

신인선, 권점례 (2003). 제 7차 수학교육과정에 따른 수학과 문제 중심 학습 자료 개발 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A, **수학교육,** 8(42), 369-286.

Fernadez, E. (2007). Learning from the "Unknown" in mathematics teacher education: One teacher educator's reflections. In M. E. Strutchens & W. G. Martin (Eds.), 69th NCTM Yearbook, The Learning of Mathematics (pp.331-343). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and for standards school mathematics.* Reston, VA: The author.

Wheatley, G. H. (1991). Constructivist perspectives on sciences and mathematics learning. *Science Education, 75*(1), 9-21.

<Abstract>

# Mathematical Exploration of Counterweight Activities

Kim, Sang Lyong[2]

Recently, mathematics education have been emphasized on developing students' mathematical thinking and problem solving abilities. Accordance with this emphasis, dramatical changes are needed in learning mathematics not merely let alone students solve real-made mathematics problems.

The project learning to explore a counterweight activity will have an effects on positive mathematical attitude(to pose problem, to have curiosity) and mathematical thinking(power 10-digit representation, 2-digit number, two representation of 3-digit number, connect exponential number and log situation) which could develop understanding problems and critical thinking.

Keywords: counterweight activity, mathematical thinking, two representation of 3-digit number, teachers' role

논문접수: 2010. 03. 08
논문심사: 2010. 03. 28
게재확정: 2010. 04. 03

2) slkim@dnue.ac.kr