한국초등수학교육학회지 14(1) 65-80.　　Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(1) 65-80.

수학적 추론의 본질에 관한 연구[1]

서동엽[2]

본 연구는 고대 그리스 시대의 수학적 추론의 발달 과정을 통하여 그 본질과 지도 방안을 탐색해 보고자 하였다. 먼저 문헌 연구로서 고대 그리스 시대의 수학적 추론의 발달 과정에 대한 Netz의 분석을 살펴보았고, Freudenthal의 국소적 조직화 이론과의 관련성을 분석해 보았다. 분석 결과 수학적 추론에서 용어와 기호가 자연언어 중심으로 되는 것이 적절한 것으로 파악되었으며, 학생들의 직관에 근거하여 수학적 필연성을 형성하게 하는 지도 방안이 적절한 것으로 생각된다. 또한 다각형의 내각의 합을 소재로 귀납에 의한 발견과 정당화, 나아가 다각형으로의 일반화라는 패턴에 따른 지도 계열과 방안을 제시하였다.

[주제어] 수학적 추론, 연역, 도식, 필연성, 초등수학교육

Ⅰ. 서 론

수학에서 추론은 핵심적인 사고 방법이다. 고대 그리스 시대 이래로 수학의 연역 추론에 의한 방법은 정신도야를 위한 교육 방안으로서 최선의 것으로 생각되어 왔으며, 폴리아(Polya)나 라카토스(Lakatos)가 수학교육에서 귀납 추론 또는 귀납적 발견의 중요성을 강조한 것과 비슷한 맥락에서 최근 우리나라의 수학교육과정에서도 귀납에 의한 발견과 연역에 의한 정당화라는 패턴의 수학적 추론 지도는 더욱 많은 관심을 받고 있다. 이렇듯 수학에서 추론이 중요한 것은 수학 학습에서 어떤 개념에 대한 약속된 정의를 받아들이지 않는 이상 어떤 형태로든 그것이 귀납이든 연역이든 추론에 의한 사고 과정이 개입되기 때문이다.

그 동안 수학에서 추론 또는 증명과 관련된 많은 연구가 이루어져 왔다(권석일, 2006; Fawcett, 1938; 서동엽, 1999). 증명 지도를 주제로 하는 많은 연구에서는 중등학교에서 학생들에게 수학적 증명의 어려움을 논하고 있다. 우리나라에서 제 7차 교육과정 이래로 귀납적 발견의 중요성이 강조되고 있는 것은, 수학적 추론의 중요한 측면으로서 귀납을 강조하고, 이를 통하여 연역적인 증명 지도의 어려움을 해소하고자 하는 노력이 반영된 것으로 생각된다. 또한 전통적으로 기하 단원을 중심으로 기하의 내용보다는 기하를 소재로 수학적 증명을 통하여 논리적·비판적 사고를 기른다는 관점으로부터, 다루는 내용의 가치나 실제적인 응용을 과거보다 더욱 중요하게 생각하는 경향도 최근의 변화에 영향을 준 것으로 생각된다.

추론을 구분하는 한 가지 입장은 귀납 추론과 연역 추론으로 구분하는 이분법이지만, 이

1) 이 논문은 2008년도 춘천교육대학교 국외파견 연구교수 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
2) 춘천교육대학교 수학교육과

러한 구분은 학생들을 지도하는 데 있어서 큰 도움이 되지 못하는 것 같다. 학생들의 추론 방식은 다양하며, 이를 해석하고 바르게 지도하기 위해서는 학생들의 추론의 발달에 대한 다양한 스펙트럼을 알기를 요구하기 때문이다. 예를 들어 제 7차 교육과정 수학 교재에 많이 포함되었던 질문은 '왜 그렇게 생각했습니까?'이며, 이에 대한 학생들의 답으로 흔히 볼 수 있었던 것이 '그냥'이라는 답이다. 2학년 수준에서 '$7+5=(7+3)+2=10+2=12$'라는 덧셈 방법을 지도하지만 이에 대한 적절한 이유를 학생들이 명확히 이해하기는 쉽지 않다. 이는 초등학교 수학에서 최근 강조되고 있는 내용으로, 여러 가지 방법으로 계산하기 관련 내용 지도에서 흔히 볼 수 있는 현상 중 하나이다. 나아가 서동엽(1999)의 연구에서 보는 것처럼 수학의 증명을 학습한 중학생 수준에서조차도 귀납과 연역은 모두 정당화를 위한 서로 다른 수학적 추론 방식으로 생각하기도 한다.

수학적 추론과 관련된 수학교육의 목표를 생각해본다면, 학생들이 귀납 추론과 연역 추론의 서로 다른 역할과 본질, 특성을 이해하고, 연역 추론 능력을 발달시켜 수학적 증명을 이해하게 하는 것이 되어야 할 것이다. NCTM(2000)에서는 "추론을 할 수 있다는 것은 수학을 이해하는 데 핵심적이며, 모든 학년 수준에서 그리고 모든 내용 영역에서 기대치는 다르지만, 아이디어를 개발하고 현상을 탐구하며, 결과를 정당화하고 수학적 추론을 활용함으로써, 학생들은 수학이 합리적이라는 것을 이해하고 기대해야한다"고 말한다. 우정호(1998)는 수학교육의 목적으로서 '합리성의 추구'를 들고 있으며, 이러한 합리성을 추구하는 능력은 수학적 추론을 통하여 길러질 수 있음을 알 수 있다.

본 연구에서는 NCTM(2000)에서 제시하고 있는 문구에서 모든 학년 수준과 모든 내용 영역에서 기대치가 다르다는 말에 주목해 보고자 한다. 이는 학년 수준마다 수학적 추론의 수준이 다를 수 있으며, 또한 내용에 따라 다를 수도 있음을 의미하기 때문이다. 그러나 어떻게 다른 것인지는 명확하지 않아 보인다. 특히나 이러한 문제는 아동들의 성장이 급속하게 이루어지는 초등학교 수준에서는 더욱 문제가 될 수 있는 것 같다. 아동들의 추론 수준과 관련하여 Fischbein(1987)이나 Piaget(1928)의 연구를 찾아볼 수 있기는 하지만, Fischbein이 제시하고 있는 것은 몇 가지 논리적 추론과 관련된 직관에 대한 것이며, Piaget의 연구 결과는 수학적 상황에 곧바로 적용하는 것이 쉽지 않은 것으로 생각된다.

이렇듯 학생들의 수학적 추론의 발달을 규명하기 위한 기초 연구로서 본 연구에서는 수학적 추론의 본질을 규명해 보고자 하였다. 수학적 추론이 형성된 고대 그리스 시대의 발달 과정과 특징을 조사함으로써 초등학생들의 수학적 추론 지도에 대한 시사점을 얻기를 기대하였다. 이를 위하여 주로 Netz(1999)의 분석을 중심으로 하여, 고대 그리스 시대의 수학적 추론의 역사적 전개 과정을 고찰해보고, 이로부터 Freudenthal의 국소적 조직화 방법과 관련하여 수학적 추론에 대한 역사발생적 맥락에서 지도 방안을 제시하였다. 이러한 관점에서 현행 초등학교 교재를 분석해 보고, 삼각형의 세 각의 합을 소재로 수학적 추론을 지도하기 위한 방안의 사례를 제시하였다.

Ⅱ. 고대 그리스 시대의 수학적 추론의 발달

고대 이집트의 수학은 경험적이었던 것으로 알려지고 있으며, 수학의 논증 방법은 고대 그리스에서 발달된 것으로 알려지고 있다. 그래서 이 장에서는 고대 그리스 시대에 수학적 논증이 형성된 과정을 살펴보았다. 이 장은 주로 고대 그리스에서 연역의 형성 과정을 고

찰한 Netz(1999)의 논의를 살펴보는 것을 중심으로 이루어진다.

1. 수학적 추론의 시작

수학의 공리적 방법이 정착된 계기로 Euclid의 원론을 들며, Euclid 이래로 공리에 기초하여 정리를 증명하는 방식은 수학의 고유한 전통이 되어 왔다. 이러한 수학의 공리적 성격은 고대 그리스에서 형성된 것으로 알려지고 있다. 그러나 그 구체적인 과정에 대해서는 명확히 알려지지 않은 것으로 생각된다. 흔히 수학사에서 논하듯이 고대 이집트와 바빌로니아에서 실용적인 성격의 수학이 발생하였고, 고대 그리스에 와서 공리적 방법이 정착되었다면 이 사이의 기간에 수학의 연역적 방법이 탄생하게 된 것은 분명하다. 이 절에서는 이러한 탄생 과정에 대하여 규명하고자 하고 있는 문헌으로서 Dantzig(1955)와 Netz(1999)의 문헌을 살펴보고자 한다.

Dantzig(1955)는 고대 그리스에서 기하학의 방법을 창시한 사람으로 Thales(BC 624?~BC 546?)를 들고 있으며, Thales 이후로 약 200년 동안의 기간에 경험적인 이집트의 기하학으로부터 성숙한 학문으로의 완벽한 변화가 진행된 것으로 보고 있다. Dantzig가 이렇게 판단하는 근거는 3대 작도 문제 중 하나인 '원적문제'의 존재 때문이다. Hippocrates(BC 460?~BC 377?)가 제기한 이 문제를 해결하기 위해 원과 넓이가 같은 정사각형의 한 변의 길이를 결정하기 위해서는 원주율의 값을 결정하는 것이 중요한데, 이는 당시로서는 결정할 수 없는 무리수였으므로, 원적문제가 정확히 언급되었다는 사실은 연역 기하가 형성된 이후에만 가능하다고 보기 때문이다. 그렇기에 그는 Thales로부터 Hippocrates까지의 기간 동안에 기하의 연역적 방법이 형성된 것으로 보는 것이 타당하다고 본다. 이 사이의 기간에 유명한 수학자로 Pythagoras(BC 582?~BC 496?)가 있었는데, Dantzig의 관점에서 Pythagoras는 신비적이고 형이상학적인 측면에 너무 치중한 나머지 기하학적인 여러 가지 테크닉 쪽으로 많은 공헌을 한 것으로 본다. 또한 고대 그리스의 시대적 상황을 고려한다면 당시의 200년은 오늘날 20년 정도의 해당하는 것으로 보고 있으므로, 그리 긴 기간은 아닌 것으로 생각한다.

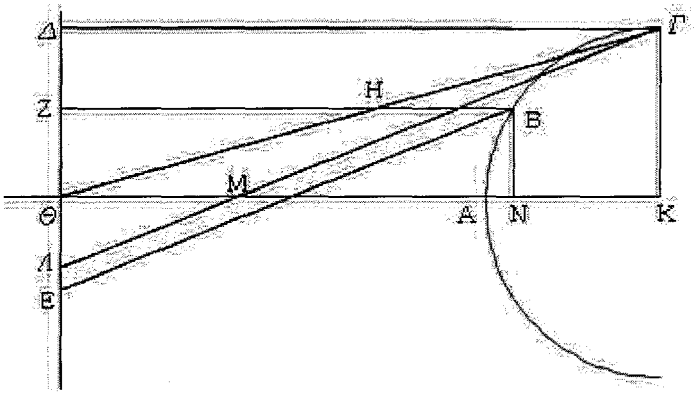
한 가지 아쉬운 점은 Dantzig가 언급하고 있는 것처럼, Thales나 Pythagoras의 저작은 현재 남아 있지 않아서 정확한 형성 과정을 알기 어렵다는 것이다. 그러나 Thales로부터 시작된 고대 그리스의 수학은 이후로 진화를 거듭한 것으로 보인다. 이와 관련하여 Netz(1999)는 고대 그리스 시대에 저술된 여러 수학자들의 저서를 분석하여, 고대 그리스에서 수학적 추론 과정이 진화한 과정을 분석한 결과를 제시하고 있다. 이제 Netz의 분석을 중심으로 고대 그리스의 수학적 추론의 발달 과정을 살펴보기로 한다.

2. 고대 그리스 시대의 도식의 이용에 대한 Netz의 분석

Netz는 고대 그리스에서 연역을 형성하는 데 중요한 역할을 했던 두 가지 도구로서 '문자 도식'(lettered diagram)[3]과 '수학적 언어'의 두 가지를 들고 있다. 이 절에서는 먼저 문자 도식에 대한 그의 분석을 살펴보기로 한다. Netz는 먼저 고대 그리스에서 도식(diagram)과 문맥의 상호 의존성에 주목한다. 즉 현대 수학의 논증 과정에서 도식은 단순 참조물이며 도식이 없더라도 문맥만으로도 논증이 성립하지만, 고대 그리스의 수학에서는

3) '문자 도식'은 'lettered diagram'의 번역이다. 이는 꼭지점에 기호가 붙은 도식을 의미하는 것으로 현재 초등 수학 교재에서도 쉽게 찾아 볼 수 있다.

그렇지 않다는 것이다. 이에 대한 예로 Apollonius의 원추곡선론(Conics) 명제 I.45를 들고 있다. 다음의 [그림 1]과 함께 여기서는 특별한 근거 없이 $MK:K\Gamma::\Gamma\Delta:\Delta\Lambda$라고 주장하며, 이에 대한 암묵적인 근거는 그림에서 직관적으로 파악할 수 있는 삼각형 MKΓ, ΓΔΛ의 닮음이다(Netz, 1999 : 28).



[그림 1] Apollonius의 Conics의 명제 1.45에 이용된 도식

Netz는 이러한 도식과 문맥의 상호 의존성이 완전히 없어진 것은 데카르트 이후의 현대 수학에서인 것으로 보고 있다. 또한 이러한 상호 의존성으로 인하여 고대 그리스 수학에서 증명의 전개는 논리보다는 도식적인 요소가 더욱 우선시 되었으며, 이로 인하여 고대 그리스의 기하 명제는 보편적이고 무한한 공간을 다루지 않으며 도식의 유한한 부분에 주목하고 있다는 것이다. 그리고 선분 위의 점의 수가 무한인 것처럼 도식의 무한인 요소를 유한한 논의로 바꾸기 위하여 문자 도식을 이용하게 되었다고 본다.

문자 도식이란 도식에서 특정한 점에 A, B 등의 문자를 붙인 것을 말한다. 그런데 Netz는 Pierce가 기호를 색인(index), 상(icon), 기호(symbol)의 세 가지로 구분한 것을 이용하여, 고대 그리스의 문자는 이 중 색인에 해당한다고 주장한다. 색인으로서의 기호는 마치 대상을 지칭하는 손가락처럼 이용되는 것으로 그림이 있을 때에만 의미 있다는 점에서 문맥과 도식의 상호 의존성과 일맥상통하는 것이다. 이러한 문자 도식이 고대 그리스에서 연역의 형성 과정에 공헌한 점은 도식이 있기 때문에 다루고 있는 명제와 관련된 존재론적 논의를 할 필요가 없었다는 점이다.

Netz(1999)는 고대 그리스에서 도식과 문자의 관계를 네 가지 측면에서 고찰하고 있는데, 이는 다음의 <표 1>과 같이 정리할 수 있다(p.67).

<표 1> 고대 그리스 수학에서 도식과 문자의 상호 의존성

구분	도식(diagram)	문자(letter)
논리적 측면	연속적인 것	이산적인 것
인지적 측면	시각적 원천	유한하고 조작 가능한 것
어의적 측면	상	색인
역사적 측면	실용적 예술	문화적 소양

다음으로 Netz는 고대 그리스의 수학자들이 도식과 문자를 이용하여 논증을 형성하는 과정을 분석하고 그 결과로 고대 그리스인들이 논증을 만드는 과정을 다음의 3단계로 설명하고 있다.

첫째, 명제에 대한 대략적인 아이디어가 형성되었을 때 그림을 그린다.
둘째, 그림에 대하여 명제의 문맥에 대한 구두(oral) 리허설과 동시에 문자를 붙인다.
셋째, 마지막으로 이러한 문자 도식을 가정하고 문맥을 쓴다. 이 문맥은 문자 도식을 이용하므로 리허설과는 다를 것이다.

여기서 리허설이 구두로 이루어졌다고 보는 이유는 고대 그리스 당시에 종이를 이용하기 어려웠다는 점과 관련이 있다. 특히 Netz는 고대 그리스의 여러 도서를 분석하여, 이러한 문자 이용 과정은 시대적 흐름에 따라 하나의 자기 조절적인 관습으로 자리 잡게 되었음을 주장하고 있다. 다만 이러한 관습은 당시의 한계로 인해 문서화되기보다는 구전으로 전해졌다고 본다.

3. 고대 그리스 시대의 수학 어휘에 대한 Netz의 분석

고대 그리스에서 연역의 형성에 기여한 도구 중 두 번째로 수학 어휘에 대한 Netz의 분석을 살펴보기로 하자. Netz(1999)는 먼저 고대 그리스 문헌에 대한 분석을 통하여 정의되는 피정의항의 형식을 다음 네 가지로 나누고 있다(p.91).

첫째, 피정의항은 명사일 수 있다. '점은 부분을 갖지 않는 것이다'에서 '점'이 예이다.
둘째, 피정의항은 명사와 형용사로 이루어진 명사 구문일 수 있다. '직선은 그 위에 점이 평평하게 놓여있는 선이다.'에서 '직선(straight line)'이 예이다.
셋째, 피정의항은 명사와 형용사로 이루어진 것이 아닌 명사 구문일 수 있다. '원의 호는 한 직선과 원의 한 둘레에 포함되는 그림이다.'에서 '원의 호(segment of a circle)'가 예이다.
넷째, 피정의항은 명사 구문이 아닐 수 있다. '직선이 원에 접한다고 말하는 것은, 원과 만나서 만들지만 원을 절단하지는 않는 것이다'에서 '원에 접한다'가 예이다.

Netz는 피정의항의 네 가지 형식 중에서 하나의 명사를 정의하는 경우는 그리 많지 않다는 점과, 여러 어휘 목록 중에서 정의되는 것은 작은 일부분에 지나지 않는다는 점, 그리고 고대 그리스 언어에서 매우 보편적인 용어를 이용하고 있다는 점을 지적한다. 예를 들어, 고대 그리스 용어 중에서, tomē는 '호(section)'으로, tmēma는 '선분(segment)'으로, tomeus는 '부채꼴(sector)'로 번역되는데, 이 용어들은 비유적으로 말하면 'cutting', 'cut', 'cutter'와 같은 것이다. 또한 새로운 이름이 필요할 때에는 기존의 이름이 확장되는 경우가 많았다. 예를 들면 3차원 용어는 2차원 용어를 근거로 구성되며, 비슷한 확장이 비례 이론, 정수론, 기하와 같은 영역에서 일어났다.
이러한 어휘가 구문을 이룬 것을 Netz는 '공식'(formula)이라고 부르고 있는데, 이는 수학 공식이 아니라 언어 공식이다. 고대 그리스 문헌에 이용되는 공식 중 대부분은 대상을 지칭하는 언어에서 활용되는 '대상 공식'(object formula)이다. Netz(1999)는 고대 그리스에서 이용된 공식을 다음 10가지로 제시하고 있다(pp.133~134).

1. 점을 나타낼 때는 중성 정관사와 한 문자를 이용한다(τὸ A).

2. 직선을 나타낼 때는 여성 정관사와 2개 이상의 문자를 이용한다(ἡ AB).

3. 각을 나타낼 때는 여성 정관사와 복수 여성 관사, 3개의 문자를 이용한다(ἡ ὑπὸ τῶν ABΓ).

4. 각을 나타낼 때는 여성 정관사와 중성 정관사, 한 문자를 이용한다(ἡ πρὸς τὸ A).

5. 원을 나타낼 때는 남성 정관사와 3개 이상의 문자를 이용한다(ὁ ABΓ).

6. 넓이를 나타낼 때는 중성 정관사와 2개 또는 4개 이상의 문자를 이용한다(τὸ AB).

7. 삼각형을 나타낼 때는 중성 정관사와 3개의 문자를 이용한다(τὸ ABΓ).

8. 정사각형을 나타낼 때는 중성 정관사와 여성 정관사, 2개의 문자를 이용한다(τὸ ἀπὸ τῆς AB).

9. 직사각형을 나타낼 때는 중성 정관사와 여성 정관사, 3개의 문자를 이용한다(τὸ ὑπὸ τῶν ABΓ).

10. 수를 나타낼 때는 남성 정관사와 하나 또는 두 개의 문자를 이용한다(ὁ A/AB).

Netz는 여러 가지 어휘나 공식을 조사하여 고대 그리스의 수학적 언어 이용에 대하여 다음과 같은 결론을 내리고 있다.

첫째, 약 100~200개의 단어가 반복적으로 이용되며, 전체의 95%이상을 차지한다(이들 중 많은 것은 관사, 전치사, 문자이다).

둘째, 대부분의 문맥에서 비슷한 수의 공식이 이용된다(이들 중 많은 것은 문자로 된 대상 공식이다).

셋째, 용어와 공식은 경제적인 체계이다(특히 각 개념에 한 가지 어휘 목록의 항목이라는 원리에 따라 용어 뿐 아니라 공식을 갖는 경향이 있다).

넷째, 공식은 유연성이 있으며, 그렇다고 그 명료함이라는 정체성을 잃지는 않는다. 유연성은 대개 점진적인 생략의 형식을 띠며, 결과적으로 어의론적으로 '비정상적인' 문맥을 이루기도 한다.

다섯째, 더욱이 약 절반의 문맥은 매우 어의적으로 유의할만한 공식으로 이루어지며, 이는 문맥을 전체적으로 주목하게 하는 데 기여한다.

여섯째, 유연성으로 인하여 때로는 한 가지 공식이 다른 것으로 전환되기도 하며, 더 일반적으로 공식은 구조적으로 관련된다(수직적으로는 한 가지 공식이 다른 것의 구성요소이며, 수평적으로는 두 가지 공식이 동종인 경우도 있다).

일곱째, 공식의 거미줄은 전체에 투사된다. 문맥의 선형적인 구조와 나란히 우리는 반복되고 변환되고 동종으로 합병되고, 독립적인 공식으로 구성되는 어떤 구조를 드러낼 것이다.

여기서 Netz는 고대 그리스의 언어 이용에서 이러한 체계가 갖추어진 원인이 무엇인지의 문제를 제기한다. 그리고 이에 대한 답으로 마치 Homer의 시에서 운율적인 구조가 언어적 형식을 결정하듯이 수학에서는 수학 어휘의 '자연 언어적인 속성'이 그 내적인 구조를 결정하는 것으로 결론짓는다. 특히 이러한 일이 자연 언어에서 중요했던 것은 고대 그리스의 쓰기 방식에 기인한다고 보고 있는데, 예를 들어 'A+B=C+D'를 고대 그리스 식으로 영어로 나타낸다면, 'THEAANDTHEBTAKENTOGETHERAREEQUALTOTHECANDTHED'와 같고, 이는 어떤 구조적 특징을 필요하게 했으리라는 것이다.

Netz는 지금까지의 분석 결과로부터 고대 그리스 수학자들이 탐구하는 과정을 '소리내어 생각하면서, 몇 개의 적은 수의 단어 집합으로 이루어지는 몇 개의 공식으로, 도식에서 시작하며, 거기에 문자 이름을 붙인다'고 기술하고 있다. 이제 이러한 소재로부터 수학적

추론이 갖는 필연성이 형성되는 과정에 대한 Netz의 분석을 살펴보기로 하자.

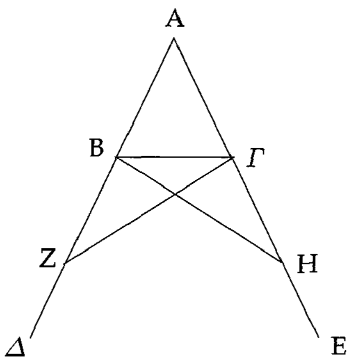
4. 고대 그리스의 필연성의 형성에 대한 Netz의 분석

고대 그리스 수학에서 수학적 필연성을 담보하는 수단에 대하여 Netz(1999)는 '출발점'(starting-point)과 '논의'(argument)라는 두 가지 요소가 있다고 본다. 출발점은 그 자체로 필연적으로 참인 것으로 여겨지는 주장을 말하며 공리를 포함하는 커다란 덩어리이다. Netz가 말하는 출발점은 수학적 정당화를 시작하는 첫 문장을 포함하는 것으로 생각되며, 상대적 출발점과 절대적 출발점을 구분하고 있다.

상대적 출발점은 그 자체로 출발점이기도 하지만 다른 것의 결과인 경우로서, 명시적 참조, 도구 상자, 암묵적 논의의 세 가지로 구분된다. 그는 명시적 참조의 예로 Apollonius의 Conics 명제 I.46에서 첫 문장이 '42번째 정리에서 증명된 것을 통하여'로 시작하는 부분을 들고 있다. 여기서 42번째 정리는 앞에서 증명된 것이기 때문이 이용할 수 있는 것이다. 도구 상자는 명시적 참조와는 다르지만 당연하게 여겨지는 것으로, 한 원의 두 반지름 AB와 AC에 대하여 AB와 AC는 같다고 하는 경우이다. 이는 유클리드 원론의 정의 I.15의 결과로 볼 수도 있지만, Netz는 당시 그리스 수학자들은 원론을 참조하기보다는 이를 당연하게 이용한 것으로 보고 있다. 암묵적 논의는 수학자들의 수준에서는 도구 상자만큼 당연시되는 것이지만, 일반 독자 수준에서는 다소 난해한 그런 것을 말한다.

절대적 출발점은 가설, 도식에 의한 것, 직관에 의한 것의 세 가지로 나누어진다. 가설의 예는 Archimedes의 Spiral Lines에서 따온 것으로 'Z가 H에 대한 어떤 비가 주어져 있고, 이것은 $\Gamma\Theta$가 ΘK에 대한 비보다 더 크다고 하자'와 같은 것이다. 이는 사실은 아니지만 뒤의 설명을 통하여 다루어지게 되는 사실이다. 도식에 의한 것은 시각적인 정보를 풀어놓는 것으로, Netz는 Euclid의 원론의 명제 I.5에서 이용된 다음 주장을 예로 들고 있다 (Netz, 1999 : 175).

'그래서 AZ는 AH와 같고, AB는 $A\Gamma$와 같기 때문에, ZA와 $A\Gamma$는 각각 HA와 AB와 같다; 그리고 이들은 공통의 각을 포함하며 ...'



[그림 2] 유클리드 원론 I.5의 그림

위의 명제에서 도식이 없다면 '공통의 각을 포함'한다는 것은 설득력이 없으므로, 근거는 도식이라는 것이다. 마지막으로 직관에 의한 것은 본질적으로 명백한 것으로 Euclid의

원론에서 제시하는 공리 외에 고대 그리스인들은 많은 사실을 이용하였다고 한다. Netz는 Euclid의 원론의 명제 III.5에서 '그래서 EZ는 EH와 같고, 더 작은 것이 더 큰 것과 같다, 이는 불가능하다'는 주장을 예로 들고 있는데, 여기서 '이는 불가능하다'는 문구는 출발점으로, 더 작은 것은 더 큰 것과 같을 수 없다고 말하는 것과 대등하고, 이는 직관에 의한 것이라고 본다.

결과적으로 위에서 언급된 여섯 가지의 출발점 중에서 Netz가 가장 근원적인 정보 산출 기제로 보는 것은 '도식'과 '직관'이다. 여기서 Netz는 고대 그리스인들이 도식을 신뢰했던 이유로서, 그것은 작도에 의한 것이기 때문이라고 본다. 즉 작도 과정이 이미 정당한 것으로 받아들이고 있었으므로, 작도에 의하여 생성된 도식 역시 정당하다고 보았다는 것이다. Netz는 도식 출발점의 근거가 되는 것이 작도에 의하여 형성된 문자 도식이라면, 직관에 의한 출발점은 형식 언어인 것으로 본다. 특히 Netz는 '격자 논의'(grid argument)라는 것에 주목하고 있는데, 예를 들어 '넓이 Θ는 선분 AHBK, BZΓΛ보다 더 작거나 더 작지 않거나 둘 중 하나다'라고 하는 것은 모든 경우를 '격자'처럼 구분하는 것이다. 여기서 어떤 수가 다른 수보다 작거나 작지 않다는 것은 직관에 의한 것이며, 형식 언어와 더불어 나타난다는 것이다.

논의는 더 이상 분석할 수 없는 논증을 나타내는 말로서,

$$(1)\ a=b,\ (2)\ b=c,\ (3)\ \text{따라서}\ a=c,\ (4)\ c>d,\ (5)\ \text{따라서}\ a>d$$

라는 논증이 있다면, 이 속에는 (1)~(3)의 논의와 (3)~(5)의 논의가 포함되어 있다. Netz는 앞의 출발점에서 구분했던 여섯 가지 중 '암묵적 논의'와 '가설'은 제외하고 네 가지를 이용하여 논의를 설명하고 있다. 첫째, '참조' 논의는 명시적인 정당화가 이루어지는 곳에서 나타나며, 전제와 결과를 진술하는 것 외에 어떤 참조 논의가 어떤 형식으로 주장되는 것이다. 이러한 참조 논의 중에는 명확하지 않은 사실들이 포함된다. 둘째, '도식' 논의는 '만들어진 직선 EZ는 직선 ΘΓ를 절단하며, 따라서 원뿔 곡선과도 만난다'의 예와 같이 그림을 통하여 전개되는 논의이다. 셋째, '도구 상자' 논의는 대개의 경우 '$P \rightarrow Q$'와 같이 조건문 형식의 명시적인 정리를 이용하며, '그러므로'와 같은 논리 접속사를 통하여 의도적으로 계획되는 경우이다. 넷째, '직관' 논의는 '$a:b=c:d,\ c:d=e:f \rightarrow a:b=e:f$'에서와 같이 비례의 추이성을 직관적으로 가정하는 경우이다. 나아가 Netz는 고대 그리스 수학에서 필연성의 근원에 대하여, 도식, 언어 공식 등이 일차적인 근원이며, 도구 상자가 이차적인 근원이라고 주장한다.

Ⅲ. 수학적 추론 발달 과정의 수학교육적 시사점

Netz(1999)의 연구를 중심으로 살펴본 고대 그리스 시대의 수학적 추론의 발달 과정은 수학교육을 위한 몇 가지 시사점을 제공하고 있는 것으로 생각된다. 이 장에서는 Netz(1999)의 연구로부터 알 수 있는 몇 가지 시사점과, 그의 분석을 Freudenthal(1991)의 국소적 조직화 이론과 비교하여 살펴보기로 한다.

1. Netz의 분석이 주는 수학교육적 시사점

앞에서 살펴본 고대 그리스의 수학적 추론 발달 과정에 대한 Netz(1999)의 분석을 통하

여 고대 그리스에서 수학적 추론은 정당화의 과정에서 의사소통의 기능을 위한 것이었음을 알 수 있으며, 이 과정에서 필연성을 획득하기 위하여 언어, 도식, 직관 등에 의존하였음을 알 수 있다. 또한 Netz는 자신의 역사적 분석을 통하여 고대 그리스에서 수학의 연역의 발달 과정은 '과학 혁명의 구조'(Kuhn, 1962)를 띤다고 보고 있다. Kuhn에 따르면 과학의 발전이 주로 질적인 성격을 띤 시기에는 패러다임의 명료화의 문제가 두드러지게 제기되며, 초기의 패러다임에서 모호함을 제거함으로써 정확한 패러다임으로 다가간다. Netz(1999)의 분석은 고대 그리스에서 Thales에서 시작된 수학의 연역적 방법이 자연 언어, 도식에서 출발하여 문자 도식, 언어 공식이 형성되고, 나아가 도구 상자의 형태로 필연성을 획득해 가며, 그러면서 수학적 연역의 성격이 명료해지는 과정을 보여 주고 있는 것으로 생각된다.

이러한 사실이 수학교육에 주는 시사점은 학생들의 수학적 추론의 발달은 점진적으로 이루어지는 정교화 과정이라는 점이다. 이렇듯 점진적으로 정교화되어 간다는 생각은 이 장의 제 2절에서 살펴볼 Freudenthal(1991)의 국소적 조직화와 대역적 조직화를 통한 수학화 과정이라는 관점과도 일맥상통하는 점이 있다. 점진적 발달 과정에서 Netz가 제기한 중요한 쟁점이 되는 문제를 크게 언어의 이용, 도식의 이용, 출발점의 이용, 논의의 이용으로 나누어 좀 더 구체적으로 그 시사점을 살펴보기로 하자.

첫째는 언어의 이용과 관련된 시사점이다. Netz(1999)는 크게 정의와 언어 공식을 분석하였고, 정의에 대하여 자연 언어를 중심으로 정의하며, 피정의항은 명사뿐만 아니라 명사와 형용사, 명사와 명사, 명사와 동사 등 다양한 조합으로 이루어져 있음을 말하고 있다. 이에 비추어 생각해보면 수학적 추론 과정에서 학생들이 자주 이용하게 되는 용어가 있을 때 이를 학생들의 언어로 자연스럽게 정의할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 이러한 용어는 명사에만 국한되는 것이 아니라 다양한 형식을 띨 수 있다. 예를 들어, '세모'나 '네모'는 학생들의 자연 언어에 가까운 것으로 생각되며, '십의 자리'나 '백의 자리' 등의 용어는 명사와 명사의 결합으로 볼 수 있다. 나아가 학생들이 언어를 말하는 과정에서 규칙적으로 활용되는 것을 공식화하게 할 필요가 있다는 것도 알 수 있다. 예를 들어, '선분 ㄱㄴ'이나 '삼각형 ㄱㄴㄷ'으로 부르는 것은 언어 공식의 예가 될 수 있다.

둘째는 도식의 이용과 관련된 시사점이다. 그러나 고대 그리스 시대의 상황과 오늘날의 상황은 다소 차이가 있는데, 중요한 것은 고대 그리스 시대에는 시대적 상황으로 인하여 눈금 없는 자와 컴퍼스에 의한 작도가 도식을 그리는 수단이었고, 작도 과정 속에 많은 논리적 과정이 함의되어 있었다는 점이다. 이러한 작도의 과정까지 학생들에게 부과하는 것은 적절하지 않을 수도 있지만, 고대 그리스의 수학자들 역시 도식에 상당히 의존했다는 점이 중요한 것으로 생각된다. 따라서 초등학생 수준에서의 수학적 정당화 역시 그것이 기하학의 사실에 대한 것이라면 도식에 의존하는 것이 적절하며, 도식에서 당연한 것을 말로 설명할 필요는 없을 수도 있다. 또한 고대 그리스인들의 정당화 순서를 따라 주어진 명제에 대하여 먼저 생각해 보게 한 다음 도식을 그려보게 하는 것을 생각해 볼 수 있을 것이다. 예컨대 학생들에게 삼각형 모양의 색종이의 꼭지각을 오려 모아서 직선을 이루어보게 하는 활동을 하게 한다면, 색종이의 꼭지각이 미리 나누어진 그림을 제공하는 것은 적절하지 않을 수도 있다는 것이다.

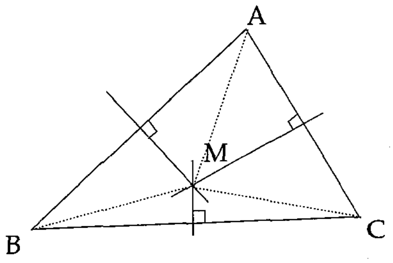
셋째는 출발점의 이용에 대한 시사점이다. 고대 그리스의 수학자들은 다양한 출발점을 허용하였다. 우리가 오늘날 공리로 말하는 것 외에 직관적인 사실이나 도식, 다소 모호해 보일 수 있는 주장도 사용하였음을 알 수 있다. 따라서 학생들의 정당화 과정에서 어떤 정형화된 틀을 따르게 하는 것은 적절하지 않을 수도 있는 것으로 생각된다. 학생들의 생각

은 도식에서 출발할 수도 있고, 자신이 당연하다고 알고 있는 사실에서 출발할 수도 있다. 이러한 것들을 다양하게 허용하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

넷째는 논의의 이용에 대한 시사점이다. 학생들이 주어진 사실을 정당화하는 도구 역시 고대 그리스인들의 과정을 생각한다면 매우 다양할 수 있다. 그것은 직관일 수도 있고, 도식일 수도 있으며, 앞에서 학습하여 알고 있는 사실일 수도 있다. 그러나 조건 명제를 활용하는 것은 초등학교 수준에서 어려울 수도 있다. 이와 관련하여 Fischbein(1987)의 연구는 시사점을 주고 있는 것 같다. Fischbein은 아동들의 추리적 직관을 조사하였고, 이로부터 7~8세 아동들의 80%가 'AAA'형의 삼단 논법에서 옳은 결론을 확인할 수 있으며, 'EAE'형과 'AII'형에서는 65%, 'EIO'형은 5%만이 결론을 확인할 수 있었다고 한다. 그러나 함의 관계인 $p \rightarrow q$를 사용할 때, 12~13세의 아동들은 q를 단언함으로써 나올 수 있는 불확실한 결론과 q의 부정에서 나오는 확실한 p의 기각을 자연스럽게 구분하지 못한다고 한다. 따라서 AAA형의 삼단논법은 초등학교 전 학년에서 이용할 수 있겠지만, P→Q와 같은 조건문의 활용은 초등학교 단계에서는 적절하지 않을 것이다.

2. Freudenthal의 국소적 조직화 이론과의 비교

Freudenthal(1991)은 자신의 수학화 학습 지도론 중에서 도형의 여러 가지 성질을 논리적인 관계로 조직하는 국소적 조직화 이론을 주장하고 있다. 이를 구체화하여 우정호(2000)는 '삼각형의 세 변의 수직 이등분선은 한 점을 통과한다'는 정리의 예를 들어 다음과 같이 설명하고 있다.



점 M은 변 AB의 수직이등분선 위에 있으므로

$\overline{MA} = \overline{MB}$ …… ①

점 M은 변 BC의 수직이등분선 위에 있으므로

$\overline{MB} = \overline{MC}$ …… ②

①, ②로부터

$\overline{MA} = \overline{MC}$

따라서 점 M은 변 AC의 수직이등분선 위에 있다.

이 증명에는 '점 M은 수직이등분선 위에 있으므로 같은 거리에 있다'는 성질과 '점 M은 같은 거리에 있으므로 수직이등분선 위에 있다'는 성질, 곧 역과 필요충분조건이란 논리가 처음으로 직관적으로 자명하게 등장한다. 그리고 이 증명을 이해하려면 겉보기에 평범한 성질인 등식의 추이성이 드러내져야 하므로, 추이성과 그 생산성을 이해하는 첫 번째 예가 된다. (중략) 이 정리의 증명은 아동들이 선분의 수직이등분선이 그 끝점에서 같은

거리에 있는 점의 자취임을 이해하면 곧바로 다룰 수 있다. 그러나 그러한 기본적인 분명한 성질의 증명을 다룰 필요는 없으며, 그러한 증명은 외접원 정리의 이해에 하등 기여하지 못한다. 기초의 탐구는 고등수학의 과제이며, 무한후퇴의 악순환은 공리적 방법에 의해서 멈추게 된다. 그 수준에 이르면 점과 직선은 공리에 의해서 암묵적으로 정의되는 무정의용어가 된다. (중략) 학생들은 국소적인 연역을 할 수 있고 이해할 수 있지만, 전반적인 연역체계를 파악할 수 없다.

위에서 우정호(2000)의 논의는 초등수학교육에 많은 시사점을 주는 것으로 생각되며, 이미 초등수학교육의 많은 부분은 위와 같은 입장을 반영하고 있는 것으로 생각된다. 예를 들어, 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180° 임을 이용하여 사각형의 네 내각의 크기의 합이 360° 임을 정당화하면서 사각형에 대각선 하나를 그린 다음 삼각형 두 개로 나누어지므로, $180° \times 2 = 360°$ 라는 논의 속에는 몇 가지 기본적인 사실이 포함되어 있다. 그것은 먼저 사각형에는 대각선이 존재한다는 사실, 대각선으로 나누어지는 사각형의 한 내각은 나누어지더라도 각의 합이 보존된다는 사실, 각도의 2배를 하더라도 실수 값의 2배를 한 각도와 같다는 사실 등이 될 것이다. 이러한 사실은 직관적으로 당연한 것으로 받아들여진다.

Netz(1999)의 분석을 Freudenthal의 국소적 조직화 이론에 비추어 해석해보면 몇 가지 사실을 유추해낼 수 있는 것 같다. 첫째, 고대 그리스인들이 도식에 많이 의존한 것은 그만큼 직관에 많이 의존하는 것으로, 공리가 되어야 할 기본적인 성질 중 아직 많은 것은 공리가 되지 못하고 있다는 것이다. 사실 위의 우정호(2000)의 지적처럼 공리나 무정의 용어가 등장하게 되는 것은 19세기 말에 Hilbert에 의해서이므로, 이는 고대 그리스 수학의 한계일 수 있다고 생각된다. 둘째, 고대 그리스인들이 명확하지 않은 사실들을 논의에서 활용한 점 역시 현대적 관점에서는 아직 미성숙한 한계점을 드러내는 것으로 생각되며, 한편으로는 위의 예에서 '역과 필요충분조건'이 자명하게 이용되었듯이, 나중에는 문제가 될 수 있지만 당시에는 문제가 되지 않은 것으로 생각해 볼 수 있다.

이러한 사실은 초등 수학교육에서 수학적 추론 지도에 대하여 시사하는 바가 적지 않은 것으로 생각한다. 초등 수학에서 수학적 증명은 다루어지지 않지만, 다양한 학습 장면에서 논리적 추론이 이용된다. 이러한 논리적 추론이 명시적으로 다루어지는 것은 아니며 많은 것은 암묵적이며, 학생들의 직관에 의존한다. 결국 초등학생들에게 수학적 추론을 다룰 때, 어디까지는 직관으로 할 것이며, 어디까지는 명시적으로 드러낼 것인지, 또 어디까지는 다루지 않는지에 대한 관찰이 필요할 것이다. 이와 관련하여 보다 구체적인 시사점을 다음 장을 통하여 살펴보기로 한다.

Ⅳ. 초등 수학에서 수학적 추론 지도

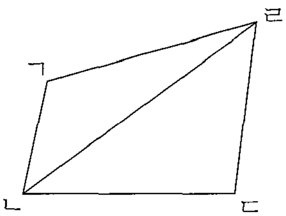
지금까지의 논의와 다른 연구를 참고로 하여 초등 수학에서 수학적 추론 지도 방안에 대하여 논의해 보기로 하자. 이를 위하여 먼저 초등 수학에서 다루어지는 기하 명제를 몇 가지 분석한 후에 지도 방안을 모색해 보기로 한다.

1. 초등 수학에서 다루는 정당화 과정의 분석

서동엽(2003)의 연구에서는 초등학교 수학에서 수학적 추론을 귀납 추론과 연역 추론으로 나누어 교재에 도입된 몇 가지 명제를 분석하고 있다. 본 연구에서는 이를 좀 더 세밀

하게 보아 Netz(1999)의 관점에서 현재 초등수학에서 다루어지는 몇 가지 명제를 먼저 분석해 보기로 한다. 다만 고대 그리스 수학에서는 측정을 논거로 하지는 않았고, 현재는 작도보다는 측정이 중심이 되고 있으므로 이에 대한 비교는 어려운 듯하다.

먼저 서동엽(2003)의 연구에서 다루고 있는 사각형의 내각의 크기의 합에 대한 명제를 살펴보기로 하자.



(사각형의 네 각의 크기의 합)

=(삼각형의 세 각의 크기의 합) ×2

=$\boxed{}$ × 2

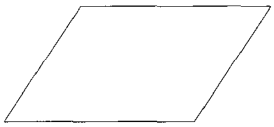
=$\boxed{}$ (교육인적자원부, 2001)

[그림 3] 사각형의 내각의 합의 지도

위 명제는 앞에서 분석한 관점에서 본다면, 몇 가지 특징을 발견할 수 있다. 첫째, 주어진 사각형 그림은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이라는 문자를 이용한 문자 도식이라는 점이다. 둘째, 출발점으로서 이용하고 있는 '(사각형의 네 각의 크기의 합)=(삼각형의 세 각의 크기의 합) × 2'라는 사실은 '도식'으로서의 출발점을 이용하고 있다는 점이다. 셋째, 사각형의 네 각의 크기의 합을 구하기 위하여 이용하고 있는 삼각형의 세 각의 크기의 합에 대한 명제는 '논의' 중에서 '참조' 또는 '도구 상자'의 역할을 하고 있다는 점이다.

여기서 삼각형의 세 각의 크기의 합에 대한 명제가 참조인지 아니면 도구 상자인지는 판단하기 어려운 듯하다. 만약 위와 같은 논의가 수학자의 수준에서 이루어진다면 도구 상자로 보아야 할 것이다. 도구 상자로 이용되는 사실은 명시적인 정리여야 하는데, 이 성질은 수학자에게는 명시적인 정리이기 때문이다. 그러나 학생의 수준에서는 삼각형의 세 각의 합이 180° 인 것이 명시적인 정리인가 아니면 모호한 사실인가에 따라서 논의의 역할은 결정될 것이다. 그러나 삼각형의 세 각의 합을 경험적으로 설명하여서 아직 학생이 확고히 알고 있지 않다면, 이는 모호한 사실로 보아 참조로서의 논의로 보는 것이 타당할 것이다. 따라서 학생의 입장에서는 선행하는 명제를 이용하는 위의 논의가 논리적으로 설득력 있게 해석될 수 있는지가 분명하지 않은 것으로 생각된다.

다음으로 평행사변형이 사다리꼴임을 설명하는 과정도 분석해 보자. 평행사변형은 '마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행인 사각형'으로 정의된다.



여기서 '평행사변형은 마주 보는 두 쌍의 변이 평행이므로 사다리꼴이다'라는 논의 역시 분석하기 어려운 점이 있다. 이 논의를 분석하면 다음과 같다.

평행사변형은 마주 보는 두 쌍의 변이 평행한 사각형이다.
마주보는 두 쌍의 변이 평행인 사각형은 사다리꼴이다.
그러므로 평행사변형은 사다리꼴이다.

여기서 '마주보는 두 쌍의 변이 평행인 사각형은 사다리꼴이다'라는 사실은 정의가 아니며, 앞에서 명시적으로 설명된 사실로 보기도 어렵다. 따라서 Netz(1999)의 기준에 따른다면 모호한 사실에 해당하는 '참조'로 보아야 할 것이다. 위의 분석에서 두 번째와 세 번째 문장 사이에 '두 쌍의 변이 평행이면 한 쌍의 변이 평행이다'라는 문장을 넣는다면 논의는 다소 복잡해지기는 하지만 보다 명시적으로 되는 것으로 생각된다. 그럼으로써 '도구 상자'로서의 논의에 가까워지는 것으로 생각되지만, 문장은 더욱 복잡해지는 것으로 생각할 수 있다.

2. 수학적 추론의 지도 방안 : 다각형의 내각의 합의 지도의 예

고대 그리스 시대의 수학적 추론은 수학사에서 한 단편일 수 있으며, 그 이전 단계는 고대 이집트의 경험적 방법이고, 그 이후는 Hilbert의 현대적 공리 기하이다. 이 중 초등 수학은 경험적 방법과 고대 그리스의 방법이 관련되는 것으로 생각된다. 여기서 역사발생적 원리를 적용하여 본다면, Branford(1906)가 제시하였듯이 경험적 방법, 직관적 증명, 형식적 증명의 순서가 대체로 적절할 것으로 생각된다. 이 중 본 연구에서 살펴본 고대 그리스의 과정은 직관적 증명을 보다 상세히 하고 있는 것으로 볼 수 있다.

직관적 증명은 그 필연성의 근원에 따라서 다시 직관, 도식, 언어 공식 등의 일차적 근원을 갖는 논의의 수준과 명백한 정리를 이용하는 이차적 근원을 갖는 논의의 수준으로 나누어 볼 수 있을 것이다. 그래서 본 연구의 관심은 경험적 방법에서 이차적 근원을 갖는 논의의 수준까지를 다루고 있으며, 초등 수준의 수학과 부분적으로 중등 수준의 수학을 포괄하는 것으로 생각된다. 이러한 아이디어에 비추어 Netz(1999)의 분석과 Freudenthal (1991)의 국소적 조직화 이론을 토대로 하여 다각형의 내각의 합과 관련된 영역의 지도 계열과 방안을 탐색해 보고자 한다.

다각형 중에서 가장 기본적인 도형은 삼각형일 것이며, 그래서 첫 번째로 이루어져야 할 것은 삼각형의 개념 형성과 관련된 활동이 될 것이다. 여기서 주의할 점은 삼각형의 개념 형성에 필요한 '각', '변' 등의 개념 형성 과정이다. 이 두 가지 용어는 아동들에게 친숙한 일상적인 용어는 아닌 것으로 생각된다. 따라서 각이나 변과 관련된 일상적 경험과 도식을 통하여 일상적 용어로 정의해 보게 하는 활동이 선행해야 할 것으로 생각된다. 이 과정에서 '변'은 '선'으로 정의될 수도 있고, '각'은 '꺾인 모양'으로 정의될 수도 있다. 이로부터 삼각형을 정의한다. '삼각형'이라는 용어 역시 학생들에게 보다 친숙한 용어가 있다면 대체될 수도 있을 것 같고, 예를 든다면 '삼선형' 또는 '삼변형' 같은 것이 후보가 될 수 있다.

두 번째로 두 선분의 관계와 그 특수한 경우로서 두 선분의 평행을 다룰 수 있을 것이다. 이와 더불어 '동위각'이나 '엇각' 등의 평행선의 성질을 직관적인 수준에서 다룰 수 있다. '동위각'이나 '엇각' 등의 용어는 반드시 도입할 필요는 없을 것으로 생각된다. 여기서 각을 나타내기 위하여 선분과 선분의 교점 또는 선분 위의 점을 'ㄱ', 'ㄴ' 등의 문자로 표

현하고, 이를 이용하도록 학습한다.

세 번째로 아무런 보조선이 없는 삼각형이 주어진 상태에서 세 각의 합을 생각해 보게 한다. 이 과정은 고대 그리스의 수학자들이 문자 도식을 그리기 이전의 구상 단계에 해당하는 것이며, 현행 교육과정(교육과학기술부, 2007)에서 강조하고 있는 귀납을 통한 발견의 과정에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 세 각의 합을 생각하는 과정에서 측정을 통하여 합을 더해 보는 활동이 이루어질 수 있을 것이다.

네 번째로 적절한 보조선을 그리면서 삼각형의 세 각의 합이 180° 임을 정당화하는 경험을 갖게 한다. 여기서 평행선 공리는 직관적으로 이해할 수 있을 것으로 기대된다.

다섯 번째로 사각형, 오각형, 육각형 등의 내각의 합을 삼각형의 세 각의 합으로부터 정당화하는 경험을 갖는다. 그런 다음 일반적인 n각형의 내각의 합을 생각해보고 정당화해 보게 한다.

이 과정은 다각형의 내각의 합에 대한 지도 계열이며, 그 수준은 명시적으로 제시하기에 쉽지 않은 것으로 생각된다. 또한 여러 가지 삼각형 또는 사각형의 포함 관계 및 여러 가지 성질을 국소적으로 조직화하면서, 다각형의 내각의 합과 대역적으로 조직화하는 방안도 생각해 보아야 할 것이다.

V. 결 론

본 연구에서는 고대 그리스에서 수학적 추론의 발달 과정을 살펴보고, 이로부터 수학적 추론의 지도 방안을 탐색해 보고자 하였다. 이를 위하여 먼저 Netz(1999)의 분석을 중심으로 고대 그리스에서 수학적 연역의 형성 과정을 살펴보았고, 수학교육을 위한 그 시사점을 생각해 보았으며, Freudenthal의 국소적 조직화 이론과의 관련성을 생각해 보았다. 그런 다음 다각형의 내각의 합을 소재로 하여 지도 계열과 방안을 제시해 보았다.

고대 그리스 시대의 수학적 추론에 대한 분석을 통하여 얻을 수 있는 시사점은 무엇보다도 학생들의 자연 언어와 직관에 의존해야 한다는 점이다. 이로부터 언어적 규칙을 만들어가고 필연성이 문제가 되는 상황으로부터 필연적인 논의가 갖추어야 할 특징들에 대하여 학습하게 한다. 이렇듯 점진적인 과정을 통하여 학생들의 수학적 추론은 정교해지며, 궁극적으로 나중에 수학적 증명의 필요성을 이해하게 될 수도 있다.

학교 수학에서 수학적 추론의 지도 계열을 정하는 데에는 많은 것이 관련될 것으로 생각된다. 학생들의 일상적 언어는 어디까지인지, 직관적으로 파악하고 있는 지식은 어디까지인지, 논리 추론과 관련된 아이디어는 어떻게 발달하는지 등 매우 방대한 정보가 필요할 수 있다. 이러한 문제들은 앞으로 계속하여 규명해 나가야 할 문제인 것으로 생각된다. 특히 고대 그리스에서는 측정을 논거로 한 정당화는 없었던 반면, 지금의 수학교육에서는 눈금 있는 자와 각도기가 편리하게 이용할 수 있는 도구라는 점에서 이를 활용하는 것과 관련된 연구도 필요할 것으로 생각된다.

Netz(1999)의 연구는 고대 그리스 시대의 수학을 연역이라는 관점에서 분석했다는 점에서 그 가치가 있는 것으로 생각되며, 다소 생소한 용어를 많이 활용하고 있다. 따라서 앞으로 좀 더 세밀히 음미하고 적용 방안을 생각해 볼 필요가 있는 연구라고 생각한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2001). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

권석일 (2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽 (2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. **수학교육학연구, 13**(2), 159-178.

우정호 (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교출판부.

Branford, B. (1908). *A Study of Matheamtical Education*. Oxford: Clarendon Press.

Dantzig, T. (1955). *The Bequest of the Greeks. New York* NY: Charles Scribner's Sons.

Fawcett (1938). *The Nature of Proof.* 장경윤 · 류현아 · 한세호 역 (2006). 증명의 본질. 서울: 경문사.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* 우정호 외 7인 공역(2006). 수학 과학 학습과 직관. 서울: 경문사.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions.* 김명자 역(1996). 과학혁명의 구조. 서울: 동아출판.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* 류희찬 외 5인 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics : A Study in Cognitive History.* New York, NY: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1928). Trans. by Marjorie Warden. *Judgment and Reasoning in the Child* London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

<Abstract>

A Study on the Nature of the Mathematical Reasoning

Seo, Dong Yeop[4)]

The aims of our study are to investigate the nature of mathematical reasoning and the teaching of mathematical reasoning in school mathematics. We analysed the process of shaping deduction in ancient Greek based on Netz's study, and discussed on the comparison between his study and Freudenthal's local organization. The result of our analysis shows that mathematical reasoning in elementary school has to be based on children's natural language and their intuitions, and then the mathematical necessity has to be formed. And we discussed on the sequences and implications of teaching of the sum of interior angles of polygon composed the discovery by induction, justification by intuition and logical reasoning, and generalization toward polygons.

Keywords: mathematical reasoning, deduction, diagram, necessity, elementary mathemtics education

논문접수: 2010. 02. 02
논문심사: 2010. 03. 10
게재확정: 2010. 03. 25

4) dseo@cnue.ac.kr