韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 02. 제 49권, 제 1호, 85-109.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2010, Vol. 49, No. 1, 85-109.

반힐레 이론과 GSP를 활용한 중학교 기하영역에 관한 연구
- 8-나 단계의 사각형의 성질을 중심으로 -

이 창 연 (고려대학교 교육대학원)
황 우 형 (고려대학교)†

I. 서 론

1. 연구의 필요성

중학교 수학에서 지도하기 가장 어려운 부분으로 8-나에서 나오는 도형을 들 수 있다. 특히, 8-나에서 처음으로 나오는 증명을 지도하는 것이다. 그런데 8-나에서 도형 내용의 대부분이 "도형=증명"일 정도로 명제의 증명을 하는 내용이 많다. 대부분의 교과서 내용이 삼각형의 성질과 사각형의 성질에 대한 관찰은 생략된 채로 7-나에서 배운 삼각형의 합동조건을 이용하여 도형의 성질을 증명하는 것이다. (주)두산동아 교과서(강옥기 외 2인)에서는 각 내용의 도입부분에서 탐구활동 통해 내용을 발견하도록 유도하고 있으나 이 교과서에서 제시하는 탐구활동 역시 도형의 성질들을 발견하는 것이 아니라 성질을 증명하는 과정을 유도하고 있다. 그래서인지 8-나 단계의 학생은 도형의 성질을 자연스럽게 받아들이지 못하고 성질을 외워서 문제를 풀고, 심지어 증명과정은 전혀 이해하지 못해서 흥미를 잃거나 증명 전체를 외워서 증명을 하는 학생들을 보면서 8-나 단계의 학생들에게 도움이 되는 수업의 필요성을 느끼고 연구하게 되었다.

이와 비슷하게 1950년대에 네덜란드의 초임 수학교사였던 van Hiele부부는 자신들이 지도하고 있는 학생들이 기하학습에 곤란을 겪고 있음에 주목하고 그 원인을 밝혀내려고 노력하였다. 남편인 P. M. van Hiele가 piaget에 대하여 연구하던 중이었는데 아동에게 제시되는 문제나 과제가 종종 아동의 사고수준을 넘어서는 용어나 성질에 대한 지식을 요구함에 주목하였다. 그리하여 지도가 아동의 사고수준 이상의 수준에서 이루어지면 그 내용은 적절히 동화되지 못한다는 것을 밝혀내었다. 그가 통찰한 것은 서로 다른 수준에서 생각하고 있는 교사와 학생은 서로 다른 문맥 내에서 말하게 되므로 서로를 이해할 수 없다는 것이며, 만일 n-1수준에 있는 학생이 n수준의 사고를 요하는 문제에 직면하게 되면 좌절, 불안 등의 심리적 요인을 안고 그 문제에 대해 진전을 보이지 못하게 된다는 것이다(우정호, 2000). 그리하여 기하에서의 사고수준 체계를 van Hiele 수준이론으로 세웠다. 또한, van Hiele에 따르면 한 수준에서 다음 수준으로의 발전은 생물학적 성숙이나 발달에는 거의 의존하지 않으며, 교수-학습 과정에서의 교육 내용과 방법을 더 많이 의존하는바, 교사는 학생들의 수준의 발전을 촉진할 수 있다. van Hiele는 이에 대해 각 수준 안에서 교수를 계열화하기 위한 교수학적 수단을 처방하여 van Hiele 교수-학습 5단계를 제시하였다.

따라서, van Hiele이론을 적용하여 수업을 할 필요성 느끼고 선행논문을 연구하게 되었다.

중・고등학생 van Hiele수준에 따른 증명능력을 연구한 논문(최현호, 1990)에서는 첫째, 대상 학생의 86%정도가 van Hiele이론에 적용되고 둘째, 중 2학생의 60%정도가 0수준 및 1수준에 속해 있어서 증명이 도입되기 전에 수준을 높일 수 있는 기하 교육과정이 개발이 필요하며 셋째, 중 2학생의 25%정도와 고 1학생의 60%정도가 3수준에 속해 있는 반면 고 1학생의 5%만이 4수준에 이르고 있어 3수준에서 4수준으로의 이행을 도울 수 있는 기하교육이 빈약하다고 결론지었다.

---

* 접수일(2010년 1월 21일), 수정일(2010년 2월 16일), 게재확정일(2010년 2월 16일)
* ZDM분류 : D13
* MSC2000분류 : 97D10
* 주제어 : van Hiele 수준이론, van Hiele 교수-학습 5단계, GSP, 사각형의 성질, 기하교육.

† 교신저자

van Hiele 기하학습 수준을 기초로 초 · 중 · 고등학교 별로 교과서를 분석한 논문(김미정, 1994)에서는 첫째, 교과내용이 전체적으로는 van Hiele수준의 순서대로 비교적 잘 구성되어 있으나 부분적으로 순서에 어긋나게 조직되어 있는데 특히, 중학교 2학년에서 교과내용이 2, 3, 4수준에 걸쳐 혼합되어 조직되었다고 분석하였다. 둘째, 초등학교와 중학교, 중학교와 고등학교에 있어서 교과내용이 수직적으로 연결되어 있지 않고 같은 수준의 내용이 중복되고 있고 셋째, 중학교 2학년 과정에서 4수준에 해당되는 내용에 앞서 3수준에 해당되는 교과내용이 충분히 구성되어 있지 않다는 결론을 내리고 있다.

중학교 교과서와 중학생들의 van Hiele 수준을 조사한 논문(이중권, 2006)에서 첫째, 중학교 수학과 기하영역의 교육과정을 분석한 결과는 1학년 교과서의 수준은 대부분 van Hiele의 1수준부터 5수준 중 1, 2, 3수준에 해당되어 있고, 2학년 교과서의 수준은 3, 4수준에 해당하고, 중학교 3학년의 경우는 2, 3, 4수준에 해당한다. 즉 van Hiele의 이론상 2학년과 3학년의 수준이 맞지 않게 구성되어 있음을 알 수 있다. 또한 중학교 2학년부터 van Hiele의 4수준에 해당하는 논증의 내용이 많은 부분을 차지하고 있어 학생들에게 논리적이고 형식적인 부분만을 강조할 우려를 안고 있으며 둘째, 중학생들 중 fitters가 차지하고 있는 비율의 결과는 1학년 90.5%, 2학년 85.61%, 3학년 74.44%로 차이는 있지만 전체적으로 약 85.78%가 연속적으로 van Hiele 수준에 도달하여 van Hiele 이론에 따라 수준을 정할 수 있는 것으로 나타났다. 이는 van Hiele의 이론에 따라서 수준이 연속적으로 도달하지 않은 학생(non-fitters)들의 비율이 점차 늘어나고 있다는 것도 간과할 수 없는 문제로 부각되어 non-fitters의 비율을 줄일 수 있는 교육과정 구성이 필요함을 뒷받침해 주고 있다. 또한 non-fitters의 비율에서 준3수준의 학생이 많은 비율을 차지하고 있으며 그 비율이 학년이 올라감에 따라 점차 증가하는 것으로 나타났다. 이는 제 2수준의 문항에 해당하는 '도형의 성질'에 대한 개념의 이해 부족이라는 결론을 내릴 수 있다. 셋째, 중학생들의 기하영역에 대한 van Hiele 수준을 조사한 결과는 연속적으로 van Hiele의 수준에 도달한 학생들(fitters)중에서 1학년 71.5%가 0수준(시각적 수준에도 못 미치는 단계)과 1수준에 몰려있고, 2학년의 경우에는 2수준과 3수준이 각각 20.35%, 19.47%이지만 아직도 0수준과 1수준에 머물고 있는 학생이 전체의 59.29%로 상당수의 학생이 2학년에 처음으로 제시되는 4수준을 이해하기에는 무리가 따를 것으로 해석된다. 3학년의 경우에는 3수준 이상이 되는 학생이 전체의 22.39%로 3수준 이상의 사고력을 요하는 2학년의 과정을 제대로 이해한 학생의 비율이 매우 적음을 알 수 있었다.

P-group에는 7차 교육과정의 교과서의 과정을 따른 기하교육을 실시하고, Q-group에는 van Hiele의 이론에 따른 기하교수법을 적용한 수업을 진행한 후 van Hiele 수준 검사를 실사하여 그 결과를 비교한 논문(한규태, 2007)에서는 첫째, 기하수준이 연속적으로 다음 수준에 도달한 학생이 P-group의 경우 약 79.8%, Q-group의 경우 약 88.3%였다. 그리고 van Hiele 수준분포에 있어서 P-group 학생들은 수준 1, 2, 3, 4가 각각 21.3%, 30.7%, 25.3%, 5.3%로 나타났으며, Q-group의 학생들은 수준 1, 2, 3, 4가 각각 12.0%, 25.3%, 39.8%, 18.1%였다. 또한 연속적으로 수준에 도달하지 못한 학생들의 준수준 분석에서 학생들은 2수준에 도달하지는 못한 채 1수준에서 3수준으로 도달한 준 3수준에 대부분의 학생이 있고 이는 2수준의 문항에 어려움을 겪고 있는 것을 알 수 있다. 둘째, 가장 많은 학생이 분포하고 있는 수준은 P-group은 30.7%로 2수준이고 반면에 Q-group은 39.8%로 3수준이다. 이는 가장 많은 학생이 분포하고 있는 수준이 2수준에서 3수준으로 변화했음을 말한다. 다음으로 P-group에 대해 분석을 하였을 때 이 학생들이 받은 기하교육은 현재 우리나라 교육과정에서 제시되고 있는 평균적인 수준의 교육이라 할 수 있다. 이 학생들 중 연속적으로 van Hiele 수준에 도달한 학생의 30.6%가 3수준 이상이고, 비연속적으로 수준에 도달한 학생들 중에서 준수준이 3이상인 학생이 84.2%인 것으로 미뤄보아 기하 수업을 계획하고 진행하는 과정에서 주된 학습자를 3수준에 도달한 학생이라고 생각해야 함을 의미한다.

2. 연구문제

위 논문의 결과와 제언을 통해 학생들에게 도움이 되도록 8-나 기하수업을 하기 위한 수업자료를 찾았으나 기존의 van Hiele 이론을 수업에 적용한 논문들은 짧은

차시에 수업을 하고, 이론이 수업에 어떻게 도움을 주는지 소수의 학생들을 대상으로 해서 질적연구를 한 것들이었다.

van Hiele 이론의 핵심은 학생들의 수준에 맞는 기하 교육 과정과 교재 구성의 요구이다.[1] 그리하여 실제 교실 수업시간에 수업을 할 수 있도록 van Hiele 기하학습 수준이론에 맞게 교과서를 다시 수준별로 구성하고, van Hiele 교수-학습 5단계를 적용한 수업지도안을 마련하고, 도형의 성질을 탐구하는 활동을 하기위해 GSP를 이용한 수업자료를 만들게 되었다. 그 수업의 효과를 알아보기 위해 다음과 같은 연구문제를 정하였다.

(1) van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 한 학생들과 7차 교육과정의 교과서로 수업을 한 학생들의 van Hiele 수준 검사 결과는 어떠한 분포를 보이는가?

(2) van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용한 수업과 7차 교육과정의 교과서를 사용한 수업에서 van Hiele 수준에 대한 사전검사와 사후검사의 향상 정도는 차이가 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. van Hiele 기하학습 수준이론

van Hiele는 수학적 사고가 「시각적 인식 수준」⇒「도형의 분석적 수준」⇒「이론적 배열 수준」⇒「연역적 추론 수준」⇒「기하학의 엄밀화 수준」으로 발달된다고 하고, 모든 수학 영역에 자신의 이론이 적용된다고 주장하며 수, 함수 등의 학습수준을 거론하고 있다(van Hiele, 1986 : Hoffer, 1983). 이러한 van Hiele의 이론을 도식화하면 <표 1>과 같다.

<표 1> van Hiele 의 기하 인지발달 이론

수준 / 고찰	제 1수준	제 2수준	제 3수준	제 4수준	제 5수준
대 상	주변의 사물	도 형	성 질	명 제	논 리
수 단	도 형	성 질	명 제	논 리	추상화

1) 한태식(1991), 기하교육과 Van Hiele 이론, 한국수학교육학회지 <수학교육> 1991.12. 제 30 권 제3호. 56

van Hiele는 제 1 수준에서 제 5수준까지의 기하학습 수준을 다음과 같이 설명하였다(van Hiele, 1986 ; Usiskin, 1982).

(1) 제 1수준 : 시각적 인식수준

제 1수준은 시각적 인식 수준으로서 이 수준의 학생들은 전체적인 모양 새로 도형을 인식하며 도형의 성질에 주목하지 않는다. '이 도형이 왜 정사각형일까요?'라는 질문에 대해 이 수준의 학생들은 '정사각형처럼 보이니까요'라고 대답한다. 학생들은 도형을 시각적 전체로 인식하며 따라서 시각적 이미지로서는 도형을 정신적으로 표상할 수 있다. 그러나 학생들은 도형의 성질에 주목하지 않는다. 즉, 도형은 그 성질에 의해 결정되는데도 불구하고 제 1 수준의 학생들은 도형의 성질을 인식하지 못한다. 시각적 인식 수준에서의 사고의 대상은 시각적으로 '같은 모양'으로 인식되는 여러 모양이다. 예컨대 '이 도형은 마름모이다'라는 것을 의미한다. 이러한 제 1 수준의 시각적 사고의 마지막 산물은 도형의 성질에 대한 분명한 인식에 근거한 도형의 개념화이다. 학생들이 제 1수준인 시각적 수준에서 제 2 수준인 분석적 수준으로 이행하는 동안, 시각적 대상으로서의 도형은 그 성질들과 결합하기 시작한다.

(2) 제 2 수준 : 기술적/분석적 인식 수준

제 2 수준은 기술적/분석적 인식 수준으로서 학생들은 도형의 성질에 주목하여 도형의 성질을 분석할 수 있다. 학생들은 시각적으로 지각되는 모양을 분석함으로써 도형의 성질을 알게 되고 결과적으로 도형을 성질에 의해 인식하고 특징짓는다. 학생들은 도형을 전체적으로 보지만 사각형형태로서가 아닌 성질의 집합으로서 고려하게 하며, 시각적 이미지는 배경으로 물러나게 된다. 따라서 각 도형은 그 도형을 특징짓는 데 필요한 성질들의 집합이 된다. 예컨대 마름모를 네 변의 길이가 같은 도형으로 생각하게 되며, '마름모'라는 용어는 '마름모라고 부르도록 배웠던 성질들의 집합'을 의미한다. 그러나 학생들은 도형들 사이의 포함 관계를 모호하게 인식하며, 도형에 대한 개인적 특성화에 의해 포함 관계를 거부하기도 한다. 이 수준에서의 사고 대상은 성질의 집합으로서의 도형이다.

(3) 제 3 수준 : 관계적/추상적 인식 수준

제 3 수준은 관계적/추상적 인식 수준으로서, 도형의 성질이나 도형 자체가 논리적으로 정렬된다. 학생들은 개념에 대한 추상적 정의를 형성하고, 개념의 성질에 대한 필요조건과 충분조건을 구분하며, 기하 영역에서 논리적으로 논쟁하기도 한다. 도형의 성질의 일부는 도형의 정의로 채택되고 나머지 성질은 논리적 방법으로 정리되며, 학생들은 여러 도형들의 성질을 정렬함으로써 도형들을 위계적으로 분류할 수 있고 자신들의 도형 분류를 정당화하기 위하여 비형식적 논증을 제시한다. 예컨대, 이 수준의 학생들에게 있어서 정사각형은 마름모인 동시에 직사각형이고 평행사변형이며 사다리꼴이다.

제 3 수준의 학생들은 다양한 성질을 발견함에 따라 그 성질들을 조직할 필요성을 느낀다. 한 성질은 다른 성질의 전제가 다른 성질의 전제가 된다는 것을 인식하는 논리적 사고는 연역적 추론을 향한 첫걸음이라고 할 수 있다. 그러나 학생들은 연역적 추론(형식적 증명)을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계전체를 파악하는 정도에는 이르지 못한다. 이 수준의 학생들에게 연역적 추론은 소규모로 또는 국소적으로 파악된다. 예컨대, 학생들은 사각형이 두 개의 삼각형으로 분해될 수 있고 한 삼각형의 내각의 합은 180°이므로, 사각형의 내각의 합이 360°라는 사실을 이끌어 낼 수 있다.

(4) 제 4 수준 : 형식적 연역 수준

제 4수준은 형식적 연역 수준으로서, 연역의 의의가 전반적으로 이해된다. 학생들은 기하학의 이론 전체를 구성하며 전개시키는 공리적 방법의 의의를 이해하게 된다. 학생들은 공리적 체계 내에서 정리를 확립할 수 있으며, 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식한다. 또한 학생들은 연역적 추론을 이해하며 형식적 증명을 구성할 수 있다. 다시 말해서 학생들은 '제시된 조건'의 결과로서의 결론을 논리적으로 정당화하는 일련의 명제를 만들어 낼 수 있다.

(5) 제 5 수준 : 엄밀한 수학적 수준

제 5수준은 엄밀한 수학적 수준으로서, 대상의 구체적 성질이나 그 성질들 사이의 관계의 구체적 의미가 사상된다. 즉 여러 가지 구체적 해석을 떠나서 발전하는, 여러 수학 체계에 대하여 형식적으로 추론할 수 있는 수준이다. 이 수준에서는 모델을 참고하지 않고 기하를 연구할 수 있으며, 공리, 정의, 정리 등의 문장을 형식적으로 다룸으로써 추론할 수 있다. 다양한 공리 체계와 논리 체계에 대한 논의의 가치를 이해할 수 있으며, 다양한 수학 체계 안에서 가장 엄밀한 방식으로 추론할 수 있다. 이 수준에서는 기하학의 이론이 추상적인 연역적 체계로서 구성된다. 수학적 구조를 잘 이해하며, 구조에 관한 고차원적 수준의 명제를 정당화할 수 있는 등 전문적인 수학자의 수준이라고 할 수 있다. 이러한 추론의 결과는 공리적인 여러 기하 체계들을 확립하여 정련시키는 동시에 유클리드 기하, 비유클리드 기하와 같은 여러 기하 체계를 비교하는 것이다.

2. van Hiele 교수-학습 5단계[2)]

van Hiele의 학습 수준 이론의 가치는 학생의 사고가 어떤 수준에 있는가 하는 학생 사고의 층별화보다는 교수를 위한 처방에 있다. van Hiele에 따르면, 한 수준에서 다음 수준으로의 발전은 생물학적 성숙이나 발달에는 거의 의존하지 않으며, 교수·학습 과정에서의 교육 내용과 방법을 더 많이 의존하는바, 교사는 학생들의 수준의 발전을 촉진할 수 있다. 그렇다면, 교사는 한 수준에서 다음 수준으로의 이행을 어떻게 촉진시킬 수 있는가? van Hiele은 이에 대해 각 수준 안에서 교수를 계열화하기 위한 교수학적 수단을 처방하였다. van Hiele은 학생들이 한 수준에서 다음 수준으로 발전하도록 교사가 어떻게 지도할 것인가에 대해 질의/안내 단계, 안내된 탐구 단계, 발전/명료화 단계, 자유 탐구 단계, 통합 단계의 다섯 단계로 이루어진 교수·학습 과정을 제시하고 있다(van Hiele, 1986).

(1) 제 1 단계 : 질의/안내 단계

질의/안내 단계에서는 교사와 학생 사이의 대화를 통해서 새로운 학습 주제를 소개한다. 학생은 제시된 자료와 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 앞으로 공부할 과제의 방향이 무엇인지 배운다. 교사는 학습할 주제에 관한 학생의 선행 지식이

2) 황혜정 외 5인(2001), 수학교육학신론, 문음사, p. 237-239.

무엇인지를 파악하여 학생이 새로운 주제를 이해하도록 도움을 주고 질문을 하며 관찰을 수행한다.

(2) 제 2 단계 : 안내된/제한된 탐구 단계

안내된 탐구 단계에서 학생은 신중하게 계열화된 활동을 통해 새로운 학습 주제의 특징에 익숙해진다. 학생은 교사가 제공하는 자료를 통해 학습 주제를 탐구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조를 점진적으로 파악한다. 교사는 학습 주제를 탐구하는 활동에 학생이 능동적으로 참여하도록 하기 위하여 조심스럽게 설명해 나간다. 이때 교사의 역할은 학생의 행동을 적절한 탐구로 이끌면서 학생 활동을 지시하는 것이다. 여기에서의 대부분의 활동은 특별한 반응을 유도하는 단일 단계의 과제이다.

(3) 제 3 단계 : 발전/명료화 단계

발전/명료화 단계에서 학생은 교사의 개입이 최소인 상태에서 자신의 개념화와 어휘를 정련시킨다. 이 단계에서는 안내된 탐구 단계에서 익숙해진 새로운 과제를 표현하는 활동을 통하여 그것을 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다. 학생은 예전의 경험과 교사로부터 얻은 최소한의 힌트를 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며, 관계 체계를 형성하기 시작한다.

(4) 제 4 단계 : 자유 탐구 단계

자유 탐구단계에서 학생은 문제해결적 성격을 갖는 보다 복잡한 과제에 도전하게 된다. 학생은 여러 가지 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 되며, 그 과제를 완성한 후에 공부한 그 영역 안에서 스스로 자신이 나아갈 바를 정해서 새로운 관련성을 찾는다. 학생은 나중 단계의 과제나 여러 가지 방식으로 완수 될 수 있는 과제와 접하면서 자신만의 방식을 찾는 경험을 하게 되며, 그럼으로써 탐구 대상 사이의 많은 관계들이 학생들에게 더욱 명확해진다.

(5) 제 5 단계 : 통합 단계

통합 단계에서 학생은 자신의 관찰을 재검토하고 요약하며, 대상과 관계의 새로운 그물망을 형성하기 위해 그동안 배운 새로운 개념과 관련성을 통합한다. 결국 학생은 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다. 교사는 전혀 새롭거나 자연스럽지 못한 아이디어를 내놓지 않도록 주의해야 하며, 학생이 이전의 활동을 반성하고 관찰한 것을 명료하게 정리할 수 있도록 전체적인 개관을 제시하면서 돕는다.

3. van Hiele 기하 학습 수준과 GSP[3)]

GSP에서 도형은 컴퓨터와의 의사소통 과정에서 도형에 대한 명시적인 기술을 통하여 구현된다. 화면상에 그려진 그림은 학생이 프로그램상의 적절한 메뉴를 선택하여 도형의 정의를 명확하게 하는 과정의 결과이다. 손으로 마우스만을 움직여 그림을 그리는 페인팅 프로그램과는 다르며, 그리고자 하는 도형과 그 도형을 이루고 있는 요소들 간의 관계에 대한 이해가 필요하다. 이는 학생들이 도형을 단순한 물리적인 존재로 보는 시각적인 수준(제 1 수준)에서 도형을 이루는 구성 요소에 사고의 초점을 두는 분석적인 수준(제 2 수준)으로 이행하는데 도움을 줄 수 있다.

한편, GSP에서는 도형을 구성하는 요소 중에서 비본질적인 부분을 자유롭게 변화시킬 수 있는 도형의 역동적인 조작이 가능하다. 다시 말해 도형의 가변적이 요소가 수정되었을 때 불변적인 요소의 관계는 보존하면서 여러 가지 그림들을 무한히 만들어 낼 수 있다. 즉, 본질적인 부분을 비본질적인 부분으로부터 분리해냄으로써 도형이 가지고 있는 성질을 추출하여 발견할 수 있도록 하여 van Hiele의 제 2 수준에서의 활동에 도움을 줄 수 있는 것이다. 이는 전통적인 지필환경에서는 찾아볼 수 없는 커다란 장점으로서 이를 이용하여 수학적 다양성의 원리를 구현할 수 있다. 또한, GSP 환경에서는 도형 속에 내재되어 있는 가변성에 입각하여 도형의 다양한 측면을 구체화시킬 수 있다. 이는 도형 사이의 관계에 관심을 보존하면서 다른 구성요소는 변화시킬 수 있다. 이는 도형 사이의 관계에 관심을 갖게 되는 van Hiele의 제 3수준으로의 사고의 향상에 도움을 줄 수 있다.

그러나 대상에 대한 구체적 활동과 함께 중요한 것은 내적 재구성, 즉 행동과 그 결과에 대한 반성임을 간과

3) 천규섭(2006), GSP활용을 통한 학생의 기하사고 수준발달에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문, p. 14

해서는 안 된다. 컴퓨터를 통해 제시되는 수학적 개념은 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통하여 다루어 질 수 있어서 학생들의 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있지만, 이런 대상에 대한 구체적인 활동만 강조하고 그것의 내적 재구성과 그 결과에 대한 반성이 없다면 반영적 추상화가 일어날 가능성이 없어지는 것이다. 이러한 점에서 GSP가 갖는 한계가 있다. 이를 극복하기 위해서는 GSP의 스크립트(script) 기능을 사용하여 작도과정을 기록하도록 하거나 'Undo'항목을 클릭하여 자신의 행동을 재현하게 하는 것이 필요하다. 또는 학생들에게 학습지를 작성하도록 함으로써 자신의 작도과정을 언어로 기술하게 하는 방안도 생각해 볼 수 있다.

4. 기하교육 도구로서 GSP

(1) GSP의 특징[4)]

첫째, 눈금 없는 자와 컴퍼스 사용해서 도형을 작도하는 경우에는 생생한 기하학적 원리를 담는데 여러 가지 한계가 있다. GSP는 점, 선, 원을 그리는 것에서 출발하여 선분의 중점, 평행선, 주어진 선분의 길이와 같은 반지름의 원, 기하학적 관계를 나타내는 그림을 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.

둘째, GSP를 사용하여 그린 도형에서는 도형의 한 부분을 끌면 서로 연관된 부분의 도형이 변하게 된다. 종이 위에 연필을 사용해서 그린 도형이 기하학적 관계를 나타내는 어떤 특정한 경우를 표현한 것인데 비해, GSP를 사용하여 그린 도형은 여러 가지 비슷한 경우를 표현하게 된다.

셋째, 도형을 스크립트로 기록하면 특정한 도형 자체가 아닌 도형 사이의 추상적 관계만이 추측되어 기록된다. 스크립트를 실행하면 도형 사이의 관계와 특정한 도형자체 모두를 관찰할 수 있으므로 설정한 가설이 옳은지 옳지 않은지 동적으로 확인할 수 있다.

넷째, 스크립트는 작도 단계를 기록하는 것이다. 스크립트를 단계별로 직접 기록할 수도 있고 이미 작도된 도형들로부터 만들어질 수도 있다. 스크립트를 도구와 같이 사용하여 도형이나 도형들을 반복적으로 그릴 수 있다. 작은 스크립트들을 사용하여 큰 스크립트를 만들어 아주 복잡한 도형을 그릴 수도 있다.

다섯째, GSP는 도형의 모양을 여러 가지로 바꾸고 설정할 수 있으므로 동적이며 아름답게 자기의 발견을 표현할 수 있다. 도형에 색을 줄 수 있고 이름을 붙일 수 있고 설명을 써넣을 수도 있다. 스크립트에도 설명을 달 수 있고 출력을 할 수 있으며 저장할 수도 있다. GSP는 사용자와 상호작용하는 동적인 칠판으로 사용될 수 있다.

(2) 여러 교실 환경에서의 GSP 수업 활동[5)]

각각의 학교들은 다양한 교실 환경에서 컴퓨터를 사용한다. GSP는 이러한 상황을 염두 해두고 만들어졌기 때문에 서로 다른 환경에서도 적절하게 활용할 수 있다. 다음 내용들은 하나의 컴퓨터가 있는 교실에서, 하나의 컴퓨터와 하나의 프로젝터가 있는 곳에서, 몇 대의 컴퓨터를 가진 교실이나 컴퓨터실에서 GSP를 이용해 가르치는 방법에 대해서 도움을 준다.

1) 하나의 컴퓨터가 있는 교실

프로젝터 없이 하나의 컴퓨터로 학습할 수 있는 가장 좋은 방법은 아마도 작은 그룹의 학생들이 돌아가며 컴퓨터를 쓰는 것이다. 각 그룹은 자나 컴퍼스 같은 기본적인 도구들을 이용하여 그림을 그려서 추측을 하고 또 그 내용을 확인한다. 이러한 경우 각 그룹은 수업 기간 동안 아주 짧게 컴퓨터를 이용할 시간이 주어진다. 아니면 각 그룹에게 하루를 주어 다른 그룹들이 책상에서 학습할 때 컴퓨터로 조사를 하도록 할 수도 있다. 프로젝터나 대형 모니터 없이 하나의 컴퓨터로는 시범 설명 활동을 하기엔 부적절하다. GSP에서 구현 가능한 좋은 작품일지라도 많은 수의 학생들이 작은 컴퓨터 화면의 시범을 따라하기엔 어려울 것이다.

2) 하나의 컴퓨터와 프로젝터

프로젝터, 대형 모니터 같은 것들은 컴퓨터와 연결하여 구현하고자 하는 내용을 많은 수의 학생들에게 한꺼번에 보여줄 수 있다. GSP는 이 경우에 관련된 도구들이 잘 작동하도록 만들어졌다. "다음엔 무엇을 해야 할까? 어디에 선분을 그릴까? 어떤 도형을 선대칭이동 해야 할까? 이 점을 움직이면 어떻게 될까?" 등과 같은 질문을 학급 전체에게 던지며 그 질문에 대한 활동에서 교

4) 예제로 배우는 한글 GSP (수학사랑, 1999)

5) GSP 수업활동 25 (수학사랑, 2003)

사는 사회자와 같은 역할을 할 수 있다. 프로젝터가 있다면 컴퓨터를 이용한 설명을 준비하거나 컴퓨터나 다른 도구를 이용여 발견한 것들을 발표할 수도 있다. GSP는 도형을 더 간단하고 혹은 더 복잡하게 그리고 심지어는 지우거나 다시 그릴 필요 없이 바꾸게 함으로서 "동적인 칠판"이 될 수 있다.

3) 몇 대의 컴퓨터가 있는 교실

만일 학급을 3~5명의 소그룹으로 나누어 각 그룹이 하나의 컴퓨터를 사용할 수 있으면 컴퓨터를 이용한 활동을 1시간 내내 하는 수업 계획을 짤 수 있다. 그 때, 다음 사항들을 준수해야 한다.

① 학급 학생들에게 어떤 것을 해야 하는지 충분히 알려준다.

② 학생들에게 어떤 활동 또는 문제를 다룰 것인지가 안내된 활동지를 나누어준다. 활동지에는 학생들이 발견한 내용을 기록할 수 있는 여백이 있어야 한다. 그러나 단계적 탐구 활동의 경우에는 문제나 질문을 단순히 칠판에 적거나 GSP 문서에 글상자로 직접 적어 넣을 수 있다.

③ 가급적 모든 학생이 컴퓨터를 다룰 기회를 가지게 한다.

④ 컴퓨터를 조작하지 않는 학생은 그룹 토의에 참여시키거나 컴퓨터를 조작하는 학생들에게 조언을 하게 한다.

⑤ 수업의 마지막에 학생들이 발견한 것을 학급 전체가 토의하며 요약, 정리한다.

4) 컴퓨터실

GSP를 수업 시간에 이용한 경험이 있는 교사들은 학생들이 개인적으로 작업을 할 수 있어도 둘씩 짝을 지어 활동하는 것이 제일 좋다고 한다. 학생들은 자신들이 무엇을 배우는지 대화를 할 때 더 잘 배우고 아이디어를 활발하게 교환하며 서로를 도울 수 있다. 만일 학생들이 개인적으로 작업을 할 경우, 다른 사람의 작업을 보며 그들이 무엇을 하고 있는지 말하고 서로 작업을 비교하도록 만들어야 한다. 위의 소그룹 작업의 경우에도 마찬가지다.

(3) GSP사용시 문제점

GSP의 사용으로 기하학적인 도형을 정확하게 빠른 시간 내에 얼마든지 그릴 수 있다. 그러나 그것이 반드시 학습을 돕는다는 것과는 별개의 문제이다. 다시 말해서 GSP의 활용에 교수학적인 전략의 적용이 매우 중요하다. GSP를 사용하여 학생들에게 기하 지도를 하였을 때, 다음과 같은 몇 가지 문제가 나타날 수 있다(노영순, 1999).

첫째, 학생은 GSP를 이용한 기하 학습 과정으로부터 계산적 기술, 연습식과 절차를 사용, 개념간의 관계성을 파악할 수 있는 기회 등을 충분히 제공받을 수 있어야 한다. 그러나 GSP에서는 측정메뉴에서 선분의 길이, 각의 크기, 넓이 등이 바로 계산되어지기 때문에 도형의 넓이 등을 구하는 기초적인 계산능력이 저하될 우려가 있다.

둘째, 선분의 수직 이등분선, 각의 이등분선, 수선, 평행선, 등은 기하학습에서 기초적이고 중요한 개념이다. 그러나 이러한 것들은 GSP에서 바로 작도가 가능하므로 학생들은 용어의 정확한 정의나 성질을 이해하지 못한 채 기계적으로 도형을 작도하는 오류가 생길 수 있다. 예를 들면 각의 이등분선은 작도하는 이유인 이등분선상의 임의의 점에서 두 변에 이르는 거리가 같다는 성질을 이해하지 못한 채 삼각형의 내심을 기계적으로 작도하는 것이 그러하다. 따라서 여러 가지 도형의 정의의 성질들의 충분한 학습 후에 GSP를 활용하여 문제를 풀이한다는 것이 반드시 문제해결을 더 잘하도록 돕는다거나 수학적인 이해나 개념들을 더 잘 나타내 보인다고 단정 지어서는 안 된다. 문제는 GSP의 사용이 학생들의 지식과 이 지식이 구조화되는 방식, 이 지식을 활용하는 학생들의 방식에 어떠한 영향을 미치는가에 대한 면밀한 검토 후 그에 맞는 학습 자료가 개발되어야 한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상 및 연구절차

(1) 2008년 연구대상 및 연구절차

첫번째 연구는 서울시 동대문구에 소재하고 있는 여자중학교 2학년 학급 중 2개반 각각 20명씩 총 40명을 연구대상으로 하였다. 비교집단은 7차 교육과정의 (주)두산동아 8-나 교과서로 수업하였고, 실험집단은 해당 교

과서를 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 활용하여 재구성한 수업지도안과 학습지를 사용하여 수업을 하였다.

본 연구 중학교에서 2학기 중간고사 시험범위에 2-1. 삼각형의 성질의 일부까지 들어갔기에 중간고사 후에 2-1. 삼각형의 성질을 마친 후 실험집단은 2-2. 사각형의 성질을 수업하기 전날 10월 14일에 사전검사로 van Hiele level test를 약 20분에 걸쳐 실시하였다. 사후검사는 2-2. 사각형의 성질의 수업을 마친 후 비교집단과 실험집단 모두 11월 4일에 van Hiele level test를 약 20분에 걸쳐 실시하였다.

(2) 2009년 연구대상 및 연구절차

두번째 연구는 성남시에 소재하고 있는 남자중학교 2학년 학급 중 8개반 총 253명을 연구대상으로 하였다. 비교집단은 7차 교육과정의 (주)탄탄교육 8-나 교과서와 학습지로 수업하였고, 실험집단은 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 활용하여 해당 교과서를 재구성하여 수업지도안과 학습지를 만들어 수업을 하였다.

본 연구 중학교에서 2학기 중간고사 시험범위에 삼각형의 성질 중 2-1-4. 직각삼각형의 합동까지 들어갔기에 중간고사 끝나자마자 사각형의 성질부분을 다루지 않은 10월 14~15일에 8개반 모두 사전검사로 van Hiele level test를 약 20분에 걸쳐 실시하였다. 2-1-5. 삼각형의 외심과 내심까지 수업을 해서 2-1. 삼각형의 성질부분을 마친 후 2-2. 사각형의 성질의 수업을 시작했다. 그런데 신종인플루엔자 확산방지를 위해 학교가 10월 27일~30일까지 휴업을 하여 수업이 중단되었고 11월 2일부터 다시 수업을 시작하여 11월 11일 수학능력시험 예비소집과 12일 수학능력시험으로 수업을 못하고 그 후에 수업을 마친 뒤 11월 18~19일에 사후검사로 van Hiele level test를 약 20분에 걸쳐 실시하였다.

2. 검사도구[6)]

본 연구에서 사용할 검사도구는 van Hiele level test로서 미국 Chicago Project에서 Usiskin(1982)이 개발한 5지 선다형 25문항 중 21~25번을 제외한 20문항이다.

Chicago Project의 van Hiele level test는 van Hiele의 각 수준에 해당하는 5개씩의 문항으로 구성되는데, 21~25번 문항은 van Hiele의 5수준을 측정하기 위한 것이다. Chicago Project에서 Usiskin이 "중등학교에서 5수준은 존재하지도 않고, 측정할 수도 없다."고 내린 결론에 따라 본 연구에서도 5수준을 제외시키고 1수준에서 4수준까지의 20문항을 채택하였다. 또한 van Hiele level test의 제한 시간은 20분으로 하였다.

3. 검사결과 처리

van Hiele level test의 배점 및 수준(level) 부여 방법은 원칙적으로 Chicago Project(Usiskin,1982)에서 사용한 방법에 따랐다. Chicago Project에서는 수준의 규정에 있어서 한 수준의 5문제 중 3문제를 정답으로 한 경우(3/5)와 5문제 중 4문제를 정답으로 한 경우(4/5)의 두 가지를 조사한 결과

(학생이 문항을 전혀 모르고 5문항 중 3문항을 맞출 확률) = 0.0579,

(학생이 문항을 전혀 모르고 5문항 중 4문항을 맞출 확률) = 0.0067

로 기준 3/5를 쓸 때 보다 기준 4/5를 쓸 때 오차를 줄일 수 있다고 보고되었다. 따라서 본 연구에서는 한 학생이 주어진 수준에서 5문제 중 4문제를 정답으로 했을 경우에 그 수준에 도달한 것으로 간주하기로 한다. 즉, 다음과 같은 합산점이 주어진다.

1 ~ 5번의 5문항(제 1수준) 중 4개 이상 맞으면 1점
6 ~10번의 5문항(제 2수준) 중 4개 이상 맞으면 2점
11~15번의 5문항(제 3수준) 중 4개 이상 맞으면 4점
16~20번의 5문항(제 4수준) 중 4개 이상 맞으면 8점

또한 Chicago Project에서는 만약 van Hiele 이론에 맞지 않는 학생, 즉 연속적으로 van Hiele 수준에 도달하지 않은 학생은 제외시켰는데 본 연구에서는 van Hiele 수준에 연속적으로 도달한 학생(fitters)과 비연속적으로 도달한 학생(non-fitters)의 두 그룹으로 나누어 조사하고 다음과 같이 처리하였다.

① fitters그룹 : 연속적으로 도달한 학생의 van Hiele

6) 이중권(2006), van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육 과정 및 우리나라 중학생들의 기하수준에 관한 연구, 한국교육문제연구 **제17집**. pp.63~64

수준은 그 학생이 도달한 가장 높은 수준으로 정하였다. 그러므로 합산점 1, 3, 7, 15는 각각 van Hiele 수준 1, 2, 3, 4와 일치하며, 1수준(시각적 인식 수준)에도 도달하지 않은 학생을 0수준이라 하였다.

② non-fitters그룹 : 수준에 연속적으로 도달하지 않은 학생들로 비연속적으로 도달한 수준 중 가장 높은 수준으로 정하고 준수준이라 정의하였다.

4. 수업진행과정

(1) 2008년 수업진행과정

<표 2> 2008년 수업진행과정

차 시	날 짜	수업 내용	수 준	교수-학습 단계
사전 검사	10/14	van Hiele level test + GSP소개		
1차시	10/15	평행사변형의 성질 (35분 단축수업)	2수준	1,2,3단계
2차시	10/16	평행사변형의 성질 (35분 단축수업)	2수준	4,5단계
3차시	10/20	여러 가지 사각형의 성질	2수준	1,2,3,4,5단계
4차시	10/22	평행사변형이 될 조건	3수준	1,2,3,4,5단계
5차시	10/23	여러가지 사각형이 될 조건	3수준	1,2,3,4,5단계
6차시	10/27	여러가지 사각형 사이의 관계	3수준	1,2,3단계
7차시	10/28	여러가지 사각형 사이의 관계	3수준	4,5단계
8차시	10/29	증명	3수준	1,2,3,4,5단계
9차시	10/30	증명	4수준	1,2,3,4단계
10차시	11/3	증명	4수준	4,5단계
사후 검사	11/4	van Hiele level test + 학력평가		

(2) 2009년 수업진행과정

<표 3> 2009년 수업진행과정

차 시	날 짜	수업 내용	수 준	교수-학습 단계
사전 검사	10/14 ~15	van Hiele level test		
1차시	10/23	평행사변형의 성질	2수준	1,2,3단계
	10/27 ~30	신종인플루엔자 확산방지를 위한 휴업		
2차시	11/2	평행사변형의 성질	2수준	1,2,3,4,5단계
3차시	11/3	여러 가지 사각형의 성질	2수준	1,2,3,4,5단계
4차시	11/4	평행사변형이 될 조건	3수준	1,2,3,4,5단계
5차시	11/5	여러가지 사각형이 될 조건	3수준	1,2,3,4,5단계
6차시	11/9	여러가지 사각형 사이의 관계	3수준	1,2,3단계
7차시	11/10	여러가지 사각형 사이의 관계	3수준	4,5단계
	11/11	수학능력시험 예비 소집일		
	11/12	수학능력시험		
8차시	11/16	증명	3수준	1,2,3,4,5단계
9차시	11/17	증명	4수준	1,2,3,4,5단계
사후 검사	11/18 ~19	van Hiele level test		

Ⅳ. 연구결과

1. 2008년 수업의 결과 및 분석

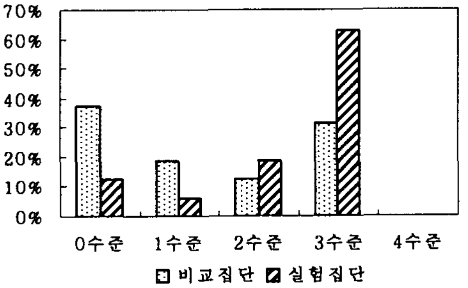
(1) van Hiele 수준 분포

비교집단 20명과 실험집단 20명에게 사후검사로 van Hiele level test를 실시한 결과 각 수준에 연속적으로 도달한 학생이 각 집단에 16명씩 있었다. 이 학생들의 van Hiele 수준 분포는 <그림 1>과 같다.

<표 4> 2008년 van Hiele 수준의 비율표

		0수준	1수준	2수준	3수준	4수준	합계
비교집단	도수	6	3	2	5	0	16
	백분율	37.5%	18.8%	12.5%	31.2%	0%	100%
실험집단	도수	2	1	3	10	0	16
	백분율	12.5%	6.2%	18.8%	62.5%	0%	100%
백분율 차이		-25%	-12.6%	6.3%	31.3%	0%	

도수 (단위 : 명)



<그림 1> 2008년 van Hiele 수준의 그래프

<그림 1>을 보면 실험집단이 비교집단에 비해 0수준과 1수준은 적고 2수준과 3수준이 많고 4수준이 없는 것을 볼 수 있다. 이를 통해 실험집단의 수업이 비교집단의 수업보다 1수준이하의 학생의 비율은 낮추고 2, 3수준의 학생으로 향상시키는데 효과적임을 알 수 있다.

<표 4>를 보면 비교집단은 1수준이하에 해당하는 학생들이 약 56%이고, 3수준은 약 31%이다. 이는 비교집단은 수업 후에 학생들의 기하수준의 양극화가 심화되어 수업을 따라올 수 있었던 학생들은 3수준에 도달하였지만, 56%를 차지하는 과반수이상의 학생들은 2, 3, 4수준의 현 교육과정의 기하내용을 따라갈 수 없다는 것으로 해석되어 앞으로의 기하를 어렵다고 생각하는 문제점을 낳고 있다고 볼 수 있다.

반면, 실험집단은 1수준이하의 학생들이 약 19%이고, 3수준에 도달한 학생들의 비율은 약 62%이다. 특히, 비교집단과 실험집단에서 3수준에 도달한 학생들의 비율 차이가 31.3%이다. 이것은 비교집단에 비해서 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 한 실험집단의 학생들 31% 정도가 더 3수준에 올랐음을 말한다.

다시 말해서 비교집단의 학생들 56%가 교과서를 통한 수업만으로는 학생들이 도형의 부분적인 성질에 대해 이해를 하였더라도 도형의 일반적인 성질을 찾아내지 못하는 상태로 1수준이하에 머물렀고, 실험집단의 학생들 62%가 도형 자체의 성질뿐만 아니라 도형들 간의 관계를 파악 할 수 있게 되고, 또한 비형식적인 논증은 할 수 있는 3수준에 많은 학생들이 도달했다고 해석할 수 있다.

그러나 비교집단과 실험집단 모두에서 4수준에 도달한 학생이 없다. 이것은 본 연구자도 학생들의 수준이 낮아서 3수준 도달을 목표로 수업을 한 이유도 있지만, 특히 3수준에 도달한 학생들이 4수준으로의 수준향상에는 이르지 못함을 의미하는데 김미정(1994), 이중권(2006)의 논문의 결과와 같이 4수준은 대부분의 중학교 2학년에게는 맞지 않게 어렵다고 해석할 수 있다.

(2) 교수법에 따른 van Hiele 수준의 향상 정도

실험집단의 20명의 학생들에게 사전검사와 사후검사로 van Hiele level test(1수준~5수준)를 실시해서 1수준에도 도달하지 않은 학생은 0수준이라 하고, 각 수준에 연속적으로 도달하지 않은 학생들은 수준을 수치로 계산하기 위하여 비연속적으로 도달한 수준 중 가장 높은 수준에서 0.5를 빼서 수준을 나타내었다. van Hiele 수준의 향상정도는 사후검사 수준과 사전검사 수준의 차이로 나타내었다.

2008년 연구결과는 실험집단의 수가 적어서 통계분석을 할 수 없어서 모든 자료의 향상정도를 나타내고 평균 비교를 하였다.

사전검사에서 평균은 약 1수준이고, 사후검사에서 평균은 약 2수준으로 향상 정도의 평균은 1.1수준 즉, 약 1개 수준이 증가한 것이다. 이는 2, 3, 4수준의 현 교육과정의 기하내용이 2수준에서 4수준으로 2개 수준이 향상됨을 바탕으로 하고 있는데 약 1개 수준의 향상을 보인다는 연구결과에 비추어 보면 중학교 2학년에게는 무리가 있다고 볼 수 있다. 또 2, 3, 4수준의 현 교육과정의 기하내용의 수준이 학생들의 비해 높은 것을 알 수 있다. 특히, 사전검사 결과 65%가 1수준이하인데 이는 교과서에서 주로 나오는 3, 4수준의 내용이전에 학생들에게 도형의 성질을 다루는 2수준으로의 van Hiele 교수-

학습 단계가 꼭 필요함을 알 수 있다. 한편 수준의 향상 정도가 0인 25%에서 10%는 0수준에서 0수준으로 수업에 전혀 참여하지 않았거나 0수준 학생이 수업을 따라오지 못했다고 볼 수 있다. 또한 15%는 3수준에서 3수준으로 수준의 향상이 없는데 이는 4수준으로의 향상이 안 되었고 어렵다고 해석할 수 있다.

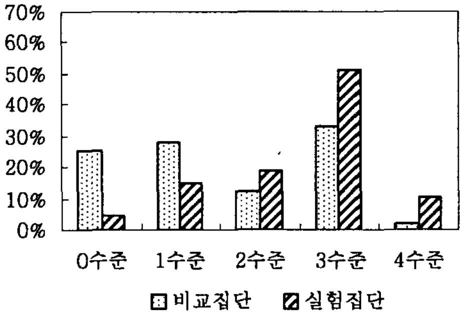
<표 5> 실험집단 van Hiele 수준의 향상정도

번호	사전검사 van Hiele 수준	사후 검사 van Hiele 수준	van Hiele 수준의 향상 정도
1	2.5	3	0.5
2	3	3	0
3	2.5	3	0.5
4	1	2	1
5	2.5	3	0.5
6	1	3	2
7	0	2	2
8	0	2.5	2.5
9	3	3	0
10	1	3	2
11	0	0	0
12	1	2.5	1.5
13	1	2.5	1.5
14	0	0	0
15	1.5	2	0.5
16	0	1	1
17	1	3	2
18	1	3	2
19	0	2.5	2.5
20	3	3	0
합계	25	47	22
평균	1.25	2.35	1.1

2. 2009년 수업의 결과 및 분석

(1) van Hiele 수준 분포

253명의 남학생에게 van Hiele level test를 사전검사와 사후검사로 실시한 결과 각 수준에 연속적으로 도달한 학생들은 203명이였다. 이 203명의 사후검사 결과를 비교집단과 실험집단으로 비교해서 van Hiele 수준 분포를 나타내면 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 2009년 van Hiele 수준의 그래프

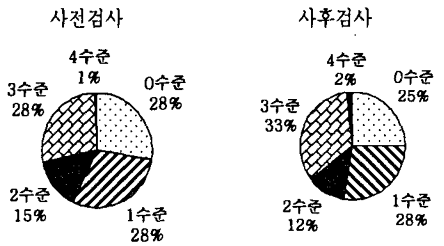
<표 6> 2009년 van Hiele 수준의 비율표

		0수준	1수준	2수준	3수준	4수준	합계
비교집단	도수	29	33	14	39	2	117
	백분율	24.8%	28.2%	12%	33.3%	1.7%	100%
실험집단	도수	4	13	16	44	9	86
	백분율	5%	15%	19%	51%	10%	100%
백분율 차이		-19.8%	-13.2%	7%	17.7%	8.3%	

도수 (단위 : 명)

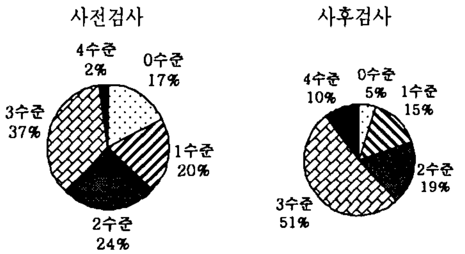
<그림 2>를 보면 2008년 그래프와 비슷하게 실험집단이 비교집단에 비해 0수준과 1수준은 적고 2수준과 3수준이 많은 것을 볼 수 있다. 특히, 2008년 결과에는 없었던 4수준의 학생이 있고 실험집단이 비교집단에 비해 4수준의 학생도 많다.

<표 6>을 보면 비교집단은 1수준이하에 해당하는 학생들이 약 63%이고, 3수준은 약33%이다. 이는 2008년 결과 (1)와 같은 의미로 비교집단에서 과반수이상인 63%의 1수준이하의 학생들은 주로 2, 3, 4 수준인 현 교육과정의 기하내용을 따라갈 수 없다는 것으로 해석되어 기하를 어렵다고 생각하는 문제점을 낳고 있다고 볼 수 있다. 반면, 실험집단은 1수준이하의 학생들이 20%로 많이 줄었고, 51%의 학생들이 3수준에 도달했다. 이것은 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용한 수업이 1수준이하의 학생들의 비율을 줄이고, 도형의 성질을 다루는 2수준과 도형들의 관계를 다루는 3수준의 비율을 증가시킨다는 것을 알 수 있다.



<그림 3> 비교집단의 van Hiele수준 분포 변화

<그림 3>을 보면 비교집단에서 0수준은 28%에서 25%, 1수준은 28%에서 28%, 2수준은 15%에서 12%, 3수준은 28%에서 33%, 4수준은 1%에서 2%로 수준 분포의 변화가 있다. 이는 줄어든 0수준의 학생들 3%가 1, 2수준의 이동하고, 줄어든 2수준의 학생들이 3수준으로 이동하여 3수준은 5% 늘어난 것을 간접적으로 알 수 있다.



<그림 4> 실험집단의 van Hiele수준 분포 변화

<그림 4>를 보면 실험집단에서 0수준은 17%에서 5%, 1수준은 20%에서 15%, 2수준은 24%에서 19%, 3수준은 37%에서 51%, 4수준은 2%에서 10%로 변화가 있다. 0수준의 학생이 줄고 3, 4수준의 학생의 비율이 증가함을 알 수 있다. 이는 줄어든 0수준의 학생들 12%가 1수준의 15%의 학생의 대부분이 되고, 줄어든 1수준의 학생들 5%와 줄어든 2수준의 학생들 5%가 늘어난 3수준의 학생이 되었음을 간접적으로 알 수 있다.

또, 3수준의 분포를 살펴보면 사전검사에서 비교집단은 28%, 실험집단은 37%이고, 사후검사에서 비교집단은 33%, 실험집단은 51%이다. 이 결과는 중학교 2학년에서 3수준의 비율이 25%정도인 최현호의 논문결과와 19.47%인 이중권의 논문결과와 비교집단이 25.3%, 실험집단이 39.8%인 한규태의 논문결과보다 높다. 사전검사에서 3수준의 높은 비율은 학교교육을 받기 전에 이미 사교육을 통해 본 내용의 학습을 마친 학생들이 많은 현실이 반영되었다고 볼 수 있다. 또 비교집단보다는 실험집단의 학생들이 학교수업을 받고 3수준으로 더 많이 향상됨을 알 수 있다. 이와 관련하여 Senk(1985)는 1수준에서 증명 학습을 시작하는 학생들은 15%의 증명 성공률을, 2수준에서 증명 학습을 시작하는 학생들은 20%의 성공률을, 그리고 3수준의 학생들은 85%의 성공률을 보인다고 보고하였다[7]. 따라서 3수준의 학생들의 비율이 높은 본 연구자의 학교에서 증명 학습의 성공률이 높을 수 있음을 예상할 수 있다.

그러나 사후검사에서 4수준에 도달한 학생의 비율은 비교집단에서는 2%이고, 실험집단에서는 10%이다. 이는 비교집단보다 실험집단에서 더 많은 학생들이 4수준에 도달했음을 알 수 있지만 사전검사에서 비교집단과 실험집단 모두 3수준의 학생들이 높은 비율을 차지했음에도 불구하고 사후검사에서 4수준에 도달한 학생의 비율은 한규태의 논문에서 비교집단 5.3%, 실험집단 18.1%에 못 미치는 결과이다. 그 원인으로 김남희 외 5인의 본문 중에서 '우리나라 중학교 기하 단원에서 중점적으로 다루는 증명은 van Hiele 수준 이론에 비추어보면, 제3수준을 넘어서지만 제4수준에는 미치지 못한다. 제4수준에서는 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식할 수 있어야 하지만, 중학교 교과서에서는 무정의 용어나 공리를 다루지 않는다.'는 글[8]을 들 수 있다. 이 글은 교과서를 가지고 증명수업을 한 비교집단이나 본 연구자가 교과서를 van Hiele 수준이론에 맞게 재구성하여 증명수업을 한 실험집단에서 증명을 할 수 있도록 수업을 마쳤다고 해서 4수준에 오르지 못할 수 있음을 설명하고 있다.

(2) 교수법에 따른 van Hiele 수준의 향상 정도

각 수준에 연속적으로 도달한 학생들은 203명을 우선 비교집단 117명과 실험집단 86명으로 나누고 사후검사의 수준에서 사전검사의 수준을 빼서 van Hiele 수준의 향상정도를 나타내서 비교하면 <표 7>과 같다.

7) 김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤(2006), 수학교육과정과 교재연구, 경문사. p.225

8) 김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤(2006), 수학교육과정과 교재연구, 경문사. p224

<표 7> van Hiele 수준의 향상정도 통계량

	교수법	N	평균	표준편차	평균의 표준편차
수준의 향상정도	7차 교육과정	117	0.1538	0.88683	0.08199
	van Hiele 교수법	86	0.6163	0.960001	0.10352

<표 7>에서 7차 교육과정의 교과서로 수업을 실시한 비교집단에서 수준의 향상 정도의 평균과 표준편차는 각각 0.1538, 0.88683이고, van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 실시한 실험집단에서 van Hiele 수준의 향상 정도의 평균과 표준편차는 각각 0.6163, 0.960001이다. <표 8>에서 Levene의 등분산 검정방법으로 검정한 결과 F통계값이 4.248이며, 유의확률(0.041) < 0.05이므로 등분산 가정을 충족하지 않는 경우이다. 두 독립표본 t검정을 사용할 수 없으므로 Welch-Aspin 검정한 결과 t통계값은 3.502, 자유도는 174.708, 유의확률은 0.001이므로 유의수준 0.05에서 향상 정도가 같지 않다고 결론 내릴 수 있다.

<표 8> van Hiele 수준의 향상정도 Welch-Aspin검정 결과

		Levene의 등분산검정		평균의 동일성에 대한 t-검정				
		F	유의확률	t	자유도	유의확률 (양쪽)	평균차	차이의 표준편차
수준의 향상 정도	등분산이 가정됨	4.248	0.041	3.545	201	0.000	0.46243	0.13046
	등분산이 가정되지 않음			3.502	174.708	0.001	0.46243	0.13205

따라서, Welch-Aspin 검정한 결과 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 실시한 학생들과 7차 교육과정의 교과서로 수업을 실시한 학생들의 van Hiele 수준의 향상 정도는 차이가 있다.

또한, 각 수준에 연속적으로 도달한 학생들 203명은 비교집단의 심화반에 41명, 기본반에 37명, 보충반에 39명 있었고 실험집단의 심화반에 42명, 기본반에 44명이 있었다. 즉, 5개의 그룹으로 나누어서 van Hiele 수준의 향상 정도를 나타내면 <표 9>와 같다.

<표 9> 그룹별 van Hiele 수준의 향상정도 교차표

			van Hiele 수준의 향상정도							총합
			-2	-1	0	1	2	3	4	
비교집단	심화반	도수	1	2	27	6	4	1	0	41
		백분율	2.4%	4.9 %	65.9%	14.6%	9.8%	2.4%	0.0%	100%
	기본반	도수	2	5	20	6	4	0	0	37
		백분율	5.4%	13.5%	54.1%	16.2%	10.8%	0.0%	0.0%	100%
	보충반	도수	1	7	24	6	1	0	0	39
		백분율	2.6%	18.4%	60.5%	15.8%	2.6%	0.0%	0.0%	100%
실험집단	심화반	도수	0	4	19	13	5	0	1	42
		백분율	0.0%	9.5%	45.2%	31.0%	11.9%	0.0%	2.4%	100%
	기본반	도수	0	2	20	14	6	2	0	44
		백분율	0.0%	4.55%	45.5%	31.8%	13.6%	4.55%	0.0%	100%

도수 (단위 : 명)

비교집단과 실험집단에서 수준이 하락한 학생들은 성적이 반영되지 않는 사후검사를 건성으로 본 것으로 분석할 수 있다.

심화반을 비교하면 수준의 향상이 없는 학생들은 비교집단에서 약 66%, 실험집단에서 45%이고, 1개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약 15%, 실험집단에서 31%이고, 2개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약10%, 실험집단에서 12%이다. 3개 수준이 향상된 학생이 비교집단에서 1명 있고, 4개 수준이 향상된 학생이 실험집단에서 1명 있다. 특히 수준의 향상이 없는 학생들의 비율이 비교집단과 실험집단에서 각각 66%, 45%인 것은 심화반 학생들의 50%정도가 사전검사에서 이미 3수준에 도달했으나 사후검사에서 4수준으로 향상되지 못했음을 원인으로 들 수 있다. 전체적으로 van Hiele 수준이 향상된 총 비율은 비교집단이 27%이고, 실험집단이 43%이다.

기본반을 비교하면 향상이 없는 학생들의 비율이 비교집단에서 54%, 실험집단에서 46%이고, 1개 수준이 향상된 학생들의 비율은 비교집단에서 약 16%, 실험집단에서 32%이고, 2개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약11%, 실험집단에서 14%이였다. 3개 수준이 향상된 학생들은 실험집단에서 2명 있었다. 전체적으로 van Hiele 수준이 향상된 총 비율은 비교집단이 27%이고, 실험집단이 50%이다.

<표 10> 비교집단과 실험집단의 van Hiele 수준의 향상정도 교차표

		향상정도							총합
		-2	-1	0	1	2	3	4	
비교집단	도수	4	14	71	18	9	1	0	117
	백분율	3.5 %	12.0 %	60.6 %	15.8 %	7.7 %	0.8 %	0.0 %	100 %
실험집단	도수	0	6	39	27	11	2	1	86
	백분율	0.0 %	7.0 %	45.3 %	31.4 %	12.9 %	2.3 %	1.1 %	100 %

도수 (단위 : 명)

교수법에 따라 향상정도를 비교한 <표 10>을 보면, 7차 교육과정의 교과서로 수업을 한 비교집단에 비해 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용한 실험집단에서 수준의 향상이 없는 비율은 15%이 낮고, 1개 수준이 향상된 비율은 두 배로 높고, 2, 3, 4개 수준이 향상된 비율도 다소 높았다.

이를 바탕으로 향상정도에 차이가 있는지 카이제곱 검정을 실시한 결과는 <표 11>과 같다.

<표 11> 비교집단과 실험집단의 van Hiele 수준의 향상정도 카이제곱 검정

	통계량	자유도	유의확률 (양측검정)
Pearson 카이제곱	14.546	6	0.024

유의확률이 0.024 < 0.05이므로 유의수준 0.05에서 향상 정도가 같지 않다고 결론 내릴 수 있다. 즉, van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 실시한 학생들과 7차 교육과정의 교과서로 수업을 실시한 학생들의 수준의 향상 정도는 차이가 있다.

V. 결론 및 제언

1. 결론

학생들이 8-나 단계의 도형의 성질을 자연스럽게 받아들이지 못하고 성질을 외워서 문제를 풀고, 심지어 증명과정은 전혀 이해하지 못해서 흥미를 잃거나 증명 전체를 외워서 증명을 하는 학생들을 보면서 학생들에게 도움이 되는 수업의 필요성을 느끼고 연구하게 되었다. van Hiele 이론과 GSP에 관련된 선행논문을 읽고, 학생들이 기하 특히 증명에서 어려움을 겪는 가장 큰 이유는 아직 하위 수준에 있는 학생들에게 형식적인 증명을 가르치기 때문이라 결론짓고 학생의 수준 향상에 중점을 두고 연구를 진행하였다. 연구자가 세운 논의와 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 8-나 단계 '사각형의 성질'단원의 교과서를 van Hiele 수준으로 분석한 결과 2, 3, 4수준이 혼합되어 있어서 2수준의 기하내용부터 4수준의 기하내용까지 연계성을 고려하여 교과서를 재구성하고 van Hiele 교수-학습 5단계를 적용하여 수업지도안을 개발했다.(부록 참고)

둘째, GSP는 학생들이 도형을 단순한 물리적인 존재로 보는 시각적인 수준(1수준)에서 도형을 이루는 구성요소에 사고의 초점을 두어 분석적인 수준(2수준)으로 이행하는데 도움을 줄 수 있다. 또한, GSP 환경에서는 도형 사이의 관계에 관심을 보존하면서 다른 구성요소는 변화시킬 수 있다. 이는 도형 사이의 관계에 관심을 갖게 되는 van Hiele의 3수준으로의 사고의 향상에 도움을 줄 수 있다. 그리하여 본 연구자는 1수준에서 2수준으로 이행과 2수준에서 3수준으로 이행을 돕기 위해 van Hiele 교수-학습 5단계 중 2단계 '안내된(제한된) 탐구단계'에 사용할 GSP 수업자료를 개발했다.

셋째, 2008년과 2009년 결과 (1)은 비교집단과 실험집단에게 사후검사로 van Hiele level test를 실시해서 각 수준에 연속적으로 도달한 학생들의 van Hiele 수준 분포를 나타내었다. 비교집단은 수업 후에 기하수준의 양극화가 심화되어 30%정도의 학생들이 3수준에 도달하였지만, 과반수이상의 학생들이 1수준이하로 남아있어 2, 3, 4수준인 현 교육과정의 기하내용을 따라갈 수 없어서 기하를 어렵게 생각하는 문제점을 낳고 있다고 볼 수 있다. 반면, 실험집단은 1수준이하의 학생들이 20%정도로 많이 줄었고, 과반수이상의 학생들이 3수준에 도달했다. 이는 도형의 성질을 다루는 2수준과 도형과 성질의 관계를 다루는 3수준으로의 van Hiele 교수-학습 5단계가 꼭 필요함을 알 수 있다. 즉, van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용한 수업을 통해 많은 학생들이 기하내용을 이해하고 3수준에 올랐음을 알 수 있다.

그러나 2008년 결과에서는 4수준에 도달한 학생이 없었고, 2009년 결과에서는 4수준에 도달한 학생의 비율이 비교집단에서 2%이고, 실험집단에서 10%이였다. 이는 비교집단보다 실험집단에서 더 많은 학생들이 4수준에 도달했음을 알 수 있지만, 김미정(1994), 이중권(2006)의 논문의 결과와 같이 4수준은 대부분의 중학교 2학년에게는 맞지 않게 어렵다고 해석할 수 있다. 한편, 4수준에 도달한 학생의 비율이 한규태의 논문에서 비교집단 5.3%, 실험집단 18.1%에는 못 미치는 결과이다. 그 원인으로 김남희 외 5인의 본문 중에서 '우리나라 중학교 기하 단원에서 중점적으로 다루는 증명은 van Hiele 수준이론에 비추어보면, 제3수준을 넘어서지만 제4수준에는 미치지 못한다. 제4수준에서는 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식할 수 있어야 하지만, 중학교 교과서에서는 무정의 용어나 공리를 다루지 않는다.'는 글을 들 수 있다. 이 글은 교과서를 가지고 증명수업을 한 비교집단이나 본 연구자가 교과서를 van Hiele 수준이론에 맞게 재구성하여 증명수업을 한 실험집단에서 증명을 할 수 있도록 수업을 마쳤다고 해서 3수준의 학생들이 4수준에 오르지 못할 수 있음을 설명하고 있다.

넷째, 2008년 결과(2)는 실험집단의 20명의 학생들에게 사전검사와 사후검사로 van Hiele level tes를 실시해서 1수준에도 도달하지 않은 학생은 0수준이라 하고, 각 수준에 연속적으로 도달하지 않은 학생들은 수준을 수치로 계산하기 위하여 비연속적으로 도달한 수준 중 가장 높은 수준에서 0.5를 빼서 수준을 나타내었다. van Hiele 수준의 향상정도는 사후검사 수준과 사전검사 수준의 차이로 나타내었다. 2008년 연구결과는 실험집단의 수가 적어서 통계분석을 할 수 없어서 모든 자료의 향상정도를 나타내고 평균비교를 하였다. 사전검사에서 평균은 약 1수준이고, 사후검사에서 평균은 약 2수준으로 향상정도의 평균은 1.1수준 즉, 약 1개 수준이 증가한 것이다. 이는 2, 3, 4수준의 현 교육과정의 기하내용이 2수준에서 4수준으로 2개 수준이 향상됨을 바탕으로 하고 있는데 약 1개 수준의 향상을 보인다는 연구결과에 비추어보면 중학교 2학년에게는 무리가 있다고 볼 수 있다.

다섯째, 2009년 결과(2)에서 연속적으로 van Hiele 수준에 도달한 203명을 우선 비교집단 117명과 실험집단 86명으로 나누고 사후검사의 수준에서 사전검사의 수준을 빼서 van Hiele 수준의 향상정도를 나타내서 비교하면 다음과 같다. 7차 교육과정의 교과서로 수업을 실시한 비교집단에서 수준의 향상 정도의 평균과 표준편차는 각각 0.1538, 0.88683이고, van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 실시한 실험집단에서 수준의 향상 정도의 평균과 표준편차는 각각 0.6163, 0.960001이다. Levene의 등분산 검정한 결과가 등분산 가정을 충족하지 않는 경우이므로 Welch-Aspin 검정한 결과 유의확률은 0.001이므로 유의수준 0.05에서 향상 정도가 같지 않다고 결론 내릴 수 있다.

또한, 203명을 비교집단에서 심화반 41명, 기본반 37명, 보충반 39명으로 나누고 실험집단에서 심화반 42명, 기본반 44명으로 나누어 5개의 그룹으로 향상정도를 나타내면 다음과 같다. 심화반을 비교하면, 수준의 향상이 없는 학생들은 비교집단에서 약 66%, 실험집단에서 45%이고, 1개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약 15%, 실험집단에서 31%이고, 2개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약10%, 실험집단에서 12%이다. 3개 수준이 향상된 학생이 비교집단에서 1명 있고, 4개 수준이 향상된 학생이 실험집단에서 1명 있다. 전체적으로 van Hiele 수준이 향상된 총 비율은 비교집단이 27%이고, 실험집단이 43%이다. 특히 수준의 향상이 없는 학생들의 비율이 비교집단과 실험집단에서 각각 66%, 45%인 것은 심화반 학생들의 50%정도가 사전검사에서 이미 3수준에 도달했으나 사후검사에서 4수준으로 향상되지 못했음을 원인으로 들 수 있다. 기본반을 비교하면, 향상이 없는 학생들의 비율이 비교집단에서 54%, 실험집단에서 46%이고, 1개 수준이 향상된 학생들의 비율은 비교집단에서 약 16%, 실험집단에서 32%이고, 2개 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 약11%, 실험집단에서 14%이다. 3개 수준이 향상된 학생들은 실험집단에서 2명 있었다. 전체적으로 수준이 향상된 학생들의 분포는 비교집단에서 27%, 실험집단에서 약 50%이였다.

향상정도를 비교집단과 실험집단 둘로 나누어 교수법에 따라 비교해보면, 7차 교육과정의 교과서로 수업을 한 비교집단에 비해 van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용한 실험집단에서 수준의 향상이 없는 비율은

15%이 낮고, 1개 수준이 향상된 비율은 두 배로 높고, 2, 3, 4개 수준이 향상된 비율도 다소 높았다. 이를 바탕으로 향상정도에 차이가 있는지 카이제곱 검정을 실시한 결과 유의확률이 0.024 < 0.05이므로 유의수준 0.05에서 향상 정도가 같지 않다고 할 수 있다. 즉, van Hiele 수준이론과 GSP 수업자료를 사용하여 수업을 실시한 학생들과 7차 교육과정의 교과서로 수업을 실시한 학생들의 수준의 향상 정도는 차이가 있다.

2. 제한점 및 제언

본 연구는 다음과 같은 제한점이 있다.

첫째, 교과서를 수준 분석하여 재구성하고 수업지도안을 개발할 때 van Hiele 수준이론과 van Hiele 교수-학습 5단계를 바탕으로 하였으나 연구자의 주관이 개입되어 객관성의 문제에 영향을 줄 수 있다.

둘째, 본 연구는 van Hiele 수준이론을 사각형의 성질의 내용에 국한시켜서 적용해본 것이다.

셋째, 2008년 연구는 여학생을 대상으로 한 결과이고, 2009년 연구는 남학생을 대상으로 한 결과로써 남·여의 성별이 결과에 어떤 영향을 끼쳤는지 알 수 없다.

넷째, 1수준에서 2수준으로 향상과 2수준에서 3수준으로 향상을 돕기 위해 고안한 GSP 수업자료가 수준향상에 어느 정도 영향을 끼쳤는지 알 수 없다.

따라서, 후에 연구자들이 본 연구자가 개발한 수업지도안과 GSP 학습자료를 보완하여 실제 교실수업에서 사용하고, 더 넓은 내용에서 자료를 개발하여 많은 학생들에게 도움이 되도록 구체적으로 연구하길 바란다. 특히, van Hiele 수준이론과 van Hiele 교수-학습 5단계를 바탕으로 교과서를 재구성한 것만으로는 3수준의 학생 중에 일부를 제외한 많은 학생들을 4수준으로 향상시키지 못한 연구자의 결과를 보고 이를 보완하는 연구를 하길 바란다.

마지막으로 van Hiele의 생각대로 n수준의 학생들이 n+1수준 이상의 기하수업을 듣는다면 그 수업을 이해할 수 없으니 교사는 수준 차이를 없애기 위한 교수학습을 해야한다. 교사는 학생들의 수준을 파악하여 학생들과 의사소통할 수 있도록 그 단계에 알맞은 용어와 기호, 설명을 해야 할 것이다. 그리고 van Hiele 교수-학습 5단계의 마지막 단계인 통합단계에서 학생들의 한 수준을 올릴 수 있으려면 먼저 교사 자신이 그러한 높은 안목을 지녀야함을 알고 계속 연구하길 바란다.

참 고 문 헌

강옥기·정순영·이환철 (2001). 중학교 수학 8-나 교사용 지도서, 서울: (주)두산동아

김미정·이종희 (1994). van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 33(2). pp.251~265

김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구, 서울: 경문사.

노영순 (1999). 학교 현장의 정보화 시설 보급 및 운용과 정보화 교육 정책에 중등학교 수학교사들의 의식 조사, 공주대학교 교육연구소 교육연구 15.

배종수·박종률·윤행원·유종광·김문환·민기열·박동익·우현철 (2001). 중학교 수학 8-나 교사용 지도서, 서울: (주)탄탄교육

이중권 (2006). van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육 과정 및 우리나라 중학생들의 기하 수준에 관한 연구, 한국교육문제연구 17. pp.55-85.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부

제 7차 교육과정 교과서 보충자료집 중학수학 8단계 교사용 CD-ROM, 서울: (주)두산동아

최현호 (1990). van Hiele의 기하인지 발달이론과 증명능력에 관한 기초 연구, 연세대학교 교육대학원 석사학위논문

천규섭 (2006). GSP활용을 통한 학생의 기하사고 수준 발달에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문

한규태 (2007). 중학교 기하영역에 관한 연구 - Van Hiele 이론을 중심으로 -, 한양대학교 교육대학원 석사학위논문

한태식 (1991). 기하교육과 Van Hiele 이론, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 30(3). pp.47-69.

황혜정 외 5인 (2001). 수학교육학신론, 서울: 문음사

Hoffer. A. (1983). Van Hiele-based research. In R. Lesh, & M Landau(Eds.), *Acaquisition of mathematics concepts and processes.*, New York: Academic Press.

Senk, S. L. (1985). *HOW WELL DO STUDENTS WRITE GEOMETRY PROOFS?*, Mathematics Teacher, pp.378, pp.6, pp.448-456

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels nd achievement in secondary school geometry,* Final report of the CDASSG University of Chicago.

van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: *A theory of mathematics education,* Academic Press.

A Study of the Syllabus Based on van Hiele Theory using GSP in Middle School Geometry

- Focused on the 2st Grade Middle School Students -

Lee, Chang Yeon

Korea University The Graduate School of Education, Anam-dong, Seongbuk ku, Seoul, Korea

E-mail : chang_t@naver.com

Whang, Woo Hyung

Korea University, Anam-dong, Seongbuk ku, Seoul, Korea

E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study is to devise syllabus in which traditional textbooks were rearranged by van Hiele Level theory and van Hiele instruction step 5 was applied to syllabus which used computer software, GSP especially in step 2 for students who studied properties and relations of the figure. Another purpose is to analyze the van Hiele Level distribution and find out how significant improvement syllabus based instruction could make compared with the traditional classes using textbooks.

The results of the study revealed that more than half of the students were less than Level 1 in the comparative group but more than half of the students have reached Level 3 in the experimental group. And improvement of van Hiele Level was significant in syllabus based classes compared with traditional classes using textbooks by the Welch-Aspin tests and Chi-squared tests.

* ZDM classification : D13

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D10

* Key Words : van Hiele level theory, van Hiele professor -learning step 5, GSP, properties of tetragonal. Geometry.

<부록> van Hiele 수준이론을 적용한 수업지도안

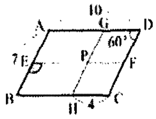
<table>
<tr><td>단원명</td><td>II. 도형의 성질
2. 사각형의 성질
1. 평행사변형</td><td>차시</td><td>1~2 /10</td><td>쪽수</td><td>P.62 ~65</td></tr>
<tr><td>학습목표</td><td colspan="5">GSP를 이용하여 평행사변형의 성질을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">학습 내용</td></tr>
<tr><td>도입
ㅣ
질의
ㅣ</td><td colspan="5">도입활동1. 평행사변형의 정의는 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형입니다. 7-나에서 배운 평행선의 성질은 어떤 것들이 있었나요?

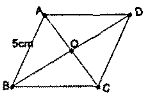
풀이) 평행선의 성질
: (1) 두 직선이 평행하면, 동위각의 크기가 같다.
(2) 두 직선이 평행하면, 엇각의 크기가 같다.</td></tr>
<tr><td>전개
ㅣ
안내된
탐구
ㅣ</td><td colspan="5">※ GSP를 통해 그린 평행사변형ABCD을 관찰하고 다음 물음에 답하세요.
<탐구활동1>
① $\overline{AB}$의 길이= $\overline{DC}$의 길이=
② $\overline{BC}$의 길이= $\overline{AD}$의 길이=
③ 평행사변형의 모양을 변형하면서 ①,②의 관계를 적어보세요.

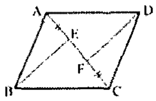
<탐구활동2>
① $\angle A$의 크기= $\angle C$의 크기=
② $\angle B$의 크기= $\angle D$의 크기=
③ 평행사변형의 모양을 변형하면서 ①,②의 관계를 적어보세요.

<탐구활동3>
① $\overline{AO}$의 길이= $\overline{CO}$의 길이=
② $\overline{BO}$의 길이= $\overline{DO}$의 길이=
③ 평행사변형의 모양을 변형하면서 ①,②의 관계를 적어보세요.</td></tr>
<tr><td>전개
ㅣ
명료화
ㅣ</td><td colspan="5"><탐구활동1>, <탐구활동2>, <탐구활동3>의 ③을 표현해보자.
평행사변형의 성질
(1)
(2)
(3)

<확인평가1> p.69 자기학습1
<확인평가2> p.69 보충학습1
<확인평가3> p.79 연습문제2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>전개
ㅣ
자유
로운
탐구
ㅣ</td><td>문제1. 오른쪽 그림은 평행사변형 ABCD 안에 있는 점 P를 지나 두 변 AD, AB에 각각 평행한 직선 EF, GH를 그은 것이다. 다음을 구하고, 이용된 평행사변형의 성질을 말하세요.

(1) $\overline{EP}$의 길이
(2) $\angle BEP$의 크기

문제2. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}=5\text{cm}$이고, 두 대각선의 길이의 합이 18cm일 때, $\triangle OAB$의 둘레의 길이를 구하고 이때 이용된 평행사변형의 성질을 말하세요.


문제3. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 대각선 AC위에 $\overline{AE}=\overline{CF}$가 되게 점 E, F를 잡으면, $\triangle ABE \equiv \triangle CDF$이다. 합동임을 보일 때 사용된 평행사변형의 성질을 말하세요.


평행사변형의 성질이 활용되는 예
문제4. 다음 그림은 계단 옆에 안전을 위하여 설치된 난간이다. 이 난간은 위와 아래에 평행한 두 개의 긴 막대와 그 사이에 여러 개의 평행한 짧은 막대로 만들어져 있다. 따라서 이 난간에서 만든 임의의 □ABCD는 평행사변형이다. 이 기구에서 평행사변형의 성질이 어떻게 쓰이고 있는지 설명하세요.


풀이) □ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB}=\overline{DC}$이다.
즉, 난간의 높이는 계단의 어디에서도 항상 일정하다.
그러므로 우리는 안전하게 난간을 잡고 오르내릴 수 있다.</td></tr>
<tr><td>정리
ㅣ
통합
ㅣ</td><td>오늘 수업 시간에는 GSP활동을 통해서 두 쌍의 대변이 평행한 평행사변형의 성질을 발견했죠. 정의와 성질을 말해봅시다. 그 평행사변형의 성질을 이용하여 도형의 문제를 해결했고, 실생활에서 평행사변형의 성질을 이용한 예도 찾아보았습니다.

「참고」 평행사변형의 정의와 성질을 구별하지 못하는 학생이 많이 있다. 따라서, 학생이 정의와 성질을 정리할 수 있도록 지도한다.</td></tr>
</table>

단원명	II. 도형의 성질 2. 사각형의 성질 2. 여러 가지 사각형	차시	3 / 10	쪽수	P.70 ~72
학습 목표	GSP활동을 통해 여러 가지 사각형의 성질을 알 수 있다.				

학습 내용

도입 - 질의 -

지난 시간에는 평행사변형의 성질을 알아봤는데요, 오늘은 직사각형, 마름모, 정사각형의 대각선의 성질을 알아보도록 하겠습니다.

각 사각형의 정의는 무엇인가요?

직사각형 : 네 내각의 크기가 같은 사각형

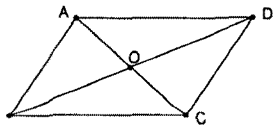
마 름 모 : 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

정사각형 : 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

이 사각형들의 성질을 GSP활동을 통해 발견해 봅시다.

전개 - 안내된 탐구 -

<탐구활동1>. GSP화면을 보고 표에 ○또는 ×를 선택하여 봅시다.



	$\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$	$\overline{AC}=\overline{BD}$	$\angle BOA=90°=\angle DOA$
평행사변형			
직사각형			
마름모			
정사각형			

<탐구활동2>. <탐구활동1>을 보고 표에 ○또는 ×를 선택하여 봅시다.

	두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는가?	두 대각선의 길이가 항상 같은가?	두 대각선이 항상 수직으로 만나는가?
평행사변형			
직사각형			
마름모			
정사각형			

전개 - 명료화 -

<탐구활동 2>를 통해 알게 된 직사각형, 마름모, 정사각형의 대각선의 성질을 표현해봅시다.

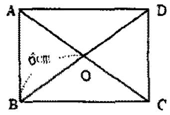
직사각형의 성질: 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

마 름 모의 성질: 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.

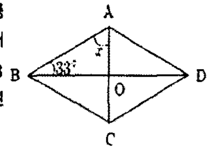
정사각형의 성질: 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.

전개 - 자유로운 탐구 -

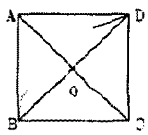
문제1. 오른쪽 직사각형□ABCD에서 $\overline{OB}=6cm$일 때, $\overline{AC}$의 길이를 구하고, 이때 이용된 직사각형의 성질을 말하세요.



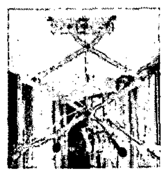
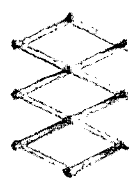
문제2. 오른쪽 그림과 같은 마름모 □ABCD에서 $\angle ABO=33°$일 때, $\angle OAB$의 크기를 구하고, 이때 이용된 마름모의 성질을 말하세요.



문제3. 오른쪽 그림과 같은 정사각형 □ABCD에서일 때, $\overline{BD}=12cm$일 때, □ABCD의 넓이를 구하고, 이때 이용된 정사각형의 성질을 말하세요.



문제4. 다음은 우리 생활 주변에서 마름모의 성질을 이용하는 빨래 걸이와 옷걸이이다. 이 기구들에서 마름모의 성질이 어떻게 쓰이고 있는지 설명하세요.

정리 - 통합 -

① 평행사변형 대각선의 성질을 정리하여 보세요.

② 직사각형 대각선의 성질을 정리하여 보세요.

③ 마 름 모 대각선의 성질을 정리하여 보세요.

④ 정사각형 대각선의 성질을 정리하여 보세요.

단원명	II. 도형의 성질 2. 사각형의 성질 1. 평행사변형	차시	4/10	쪽수	P. 66~69
학습목표	GSP활동을 통해 사각형이 평행사변형이 될 조건을 알 수 있다.				

학습 내용

도입 - 질의 -

명제가 참이면 그 명제의 역은 참일 수도 있고, 거짓일 수도 있는데 평행선 성질의 역

「 동위각의 크기가 같으면, 두 직선은 평행한다
엇각의 크기가 같으면, 두 직선은 평행한다 」

이 성립함은 중1때 이미 배웠습니다.

이제 지난 수업 시간에 배웠던 평행사변형의 성질의 역에 대한 참, 거짓을 알아봅시다.

도입활동. 평행사변형의 정의와 평행사변형의 대변, 대각, 대각선에 관한 성질을 말하고, 그 역을 말해 볼까요?

(1) 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형이다.
(2) 평행사변형이면 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
(3) 평행사변형이면 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
(4) 평행사변형이면 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

역) (1)
(2)
(3)
(4)

역(1)은 평행사변형의 정의이므로 참임을 알 수 있으니, 역(2)~(4)의 참, 거짓을 판단하여 봅시다.

전개 - 안내된 탐구 -

<탐구1>다음의 각 조건이 역(2)~(4)중에 어느 조건에 해당하는지 말하고, 주어진 □ABCD가 평행사변형인지를 GSP화면을 통해 확인해 보세요.

조건	역(번호)	참 또는 거짓
$\overline{AB}=4cm, \overline{BC}=6cm, \overline{CD}=4cm, \overline{DA}=6cm$	역( )	
$\angle A=120^\circ, \angle B=60^\circ, \angle C=120^\circ$	역( )	
$\overline{OA}=\overline{OC}=3cm, \overline{OB}=\overline{OD}=6cm$	역( )	

<탐구2>다음의 주어진 조건에 의해 □ABCD가 평행사변형인지를 GSP화면을 통해 확인해 보세요.

조건	평행사변형(여부)
$\overline{AB}//\overline{DC}, \overline{AD}=\overline{BC}=5cm$	평행사변형( )
$\overline{AB}//\overline{DC}, \overline{AB}=\overline{DC}=5cm$	평행사변형( )

전개 - 명료화 -

<탐구1>의 활동의 결과를 표현해 봅시다.

➡ 평행사변형의 성질의 역은 참이다.

<탐구2>의 활동을 통해서 평행사변형이 되었던 조건을 표현해 봅시다.

➡ 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같으면, 평행사변형이 된다.

이 조건들을 정리해 보면,

1. 두 쌍의 대변이 각각 평행하다. (정의)
2. 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
3. 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
4. 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
5. 한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.

사각형이 다음 조건 중 어느 하나를 만족하면 그 사각형은 평행사변형이라고 판단할 수 있습니다.

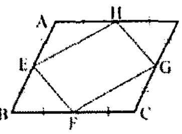
이 조건들이 항상 참임을 보일려면 증명을 해야 합니다. 증명은 다음 시간에 해보기로 하고, 문제를 풀어봅시다.

전개 - 자유로운 탐구 -

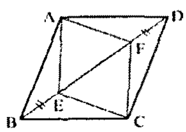
문제1. 다음에 주어진 □ABCD가 평행사변형인지를 판단하고, 그 이유를 설명하세요.

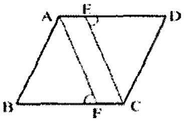
① $\angle A=60^\circ, \angle B=120^\circ, \overline{AD}=5cm, \overline{BC}=5cm$
② $\angle A=\angle B=80^\circ, \angle C=\angle D=100^\circ, \overline{AD}=5cm$

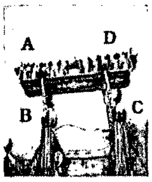
문제2.오른쪽 그림과 같이 평행사변형ABCD의 각 변의 중점을 차례로 E, F, G, H 라고 하면 □EFGH는 평행사변형이 된다. 그 이유는 평행사변형이 될 조건 중 어떤 조건이 성립하였기 때문인가?



문제3.오른쪽 그림과 같이 평행사변형ABCD의 대각선 BD 위에 두 점 E, F를 $\overline{BE}=\overline{DF}$가 되게 잡으면 □AECF는 어떤 사각형이 되는지, 합동인 삼각형을 찾아서 설명하세요.



<table>
<tr><td>전개
-
자유로운
탐구
-</td><td>문제4. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 변 AD, BC 위에 각각 점 E, F를 ∠AFB = ∠CED가 되게 잡으면, □AFCE는 어떤 사각형이 되는지, 합동인 삼각형을 찾아서 설명하세요.


<참고문제>
오른쪽 사진은 「마법의 양탄자」라는 놀이기구이다. 이 놀이 기구를 타면 어느 위치에 있더라도 기울어지지 않고 항상 지면과 평행하다. 그 이유를 설명하세요.
</td></tr>
<tr><td>정리
-
통합
-</td><td>평행사변형이 되는 조건들을 정리해 보면,
1.
2.
3.
4.
5.

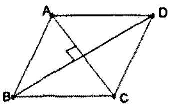
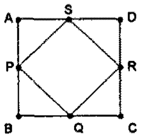
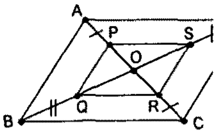
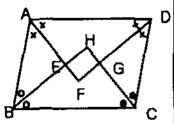
사각형이 다음 조건 중 어느 하나를 만족하면 그 사각형은 평행사변형이라고 판단할 수 있습니다.</td></tr>
</table>

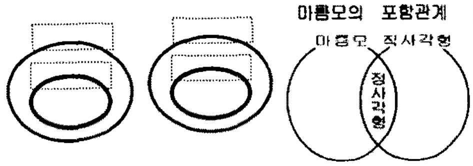
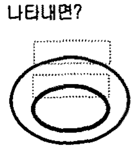
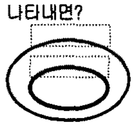
<table>
<tr><td>단원명</td><td>II. 도형의 성질
2. 사각형의 성질
2. 여러 가지 사각형</td><td>차시</td><td>5 / 10</td><td>쪽수</td><td>P. 70 ~72</td></tr>
<tr><td>학습 목표</td><td colspan="5">GSP활동을 통해 여러 가지 사각형이 되는 조건을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="6">학습 내용</td></tr>
<tr><td>도입
-
질의
-</td><td colspan="5">지난 시간에 평행사변형의 성질의 역은 성립함을 확인했습니다. 오늘은 배웠던 직사각형, 마름모, 정사각형의 대각선 성질의 역에 대한 참, 거짓을 확인해봅시다.

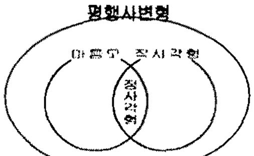
직사각형, 마름모, 정사각형의 대각선의 성질을 복습해보면,
직사각형이면 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.
마 름 모이면 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.
정사각형이면 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.
역) (1) 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분하는 사각형이면 ________이다.
(2) 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형이면 ________이다.
(3) 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형이면 ________이다.

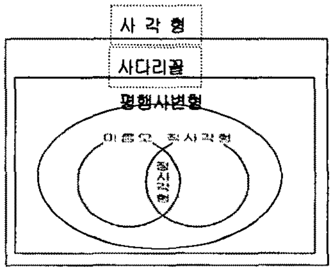
역(1)~(3)의 참, 거짓을 GSP활동을 통해 판단하여 봅시다.</td></tr>
<tr><td>전개
-
안내된
탐구
-</td><td colspan="5"><탐구활동>다음의 각 조건이 역(1)~(3)중에 어느 조건에 해당하는지 말하고, GSP화면을 통해 참 또는 거짓을 가정해 보세요.
<table><tr><td>조건</td><td>역(번호)</td><td>참 또는 거짓</td></tr><tr><td>$\overline{AC} = \overline{BD}$,
$\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$</td><td>역( )</td><td></td></tr><tr><td>$\overline{AC} \perp \overline{BD}$,
$\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$</td><td>역( )</td><td></td></tr><tr><td>$\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$,
$\overline{OA} = \overline{OC}$, $\overline{OB} = \overline{OD}$</td><td>역( )</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>전개
-
명료화
-</td><td colspan="5">탐구활동을 통해 참이라고 할 수 있는 것을 명제로 표현해 봅시다.
________________사각형은 직사각형이다.
________________사각형은 마름모이다.
________________사각형은 정사각형이다.

<확인문제>
□$ABCD$에서 두 대각선의 교점을 O라 할 때, 다음 조건을 만족하는 사각형을 말하세요.
㉠ $\overline{AC} = \overline{BD}$ ㉡ 점 O는 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 중점</td></tr>
</table>

전개 및 과제 제시 - 자유로운 탐구 -	문제1. 오른쪽 그림에서 □ABCD는 평행사변형이고 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$일 때, □ABCD는 어떤 사각형인지 쓰고, 그 이유를 설명하세요.  문제2. 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD의 네 변의 중점을 연결하여 만든 □PQRS는 어떤 사각형인지 쓰고, 그 이유를 설명하세요.  문제3. 평행사변형 ABCD의 대각선 AC, BD위에 점 P, Q, R, S를 $\overline{AP}=\overline{CR}$, $\overline{BQ}=\overline{DS}$가 되도록 잡으면 □PQRS는 어떤 사각형이 되는지 쓰고, 그 이유를 설명하세요.  문제4. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 네 각의 이등분선과 그들의 교점을 각각 E, F, G, H라 할 때, □EFGH는 어떤 사각형이 되는지 쓰고, 그 이유를 설명하세요. 
정리 - 통합 -	직사각형이 되는 조건을 정리하여보세요. ① 정의: ② 마름모가 되는 조건을 정리하여보세요. ① 정의: ② 정사각형이 되는 조건을 정리하여보세요. ① 정의: ②

단원명	Ⅱ. 도형의 성질 2. 사각형의 성질 2. 여러 가지 사각형	차시	6~7/10	쪽수	P.76 ~78
학습 목표	여러 가지 사각형 사이의 포함관계를 알 수 있다.				
학습 내용					
도입 - 질의 -	지난 시간에 배운 여러 가지 사각형에 대한 대각선의 성질을 말하여 볼까요? (1) 평행사변형: 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다. (2) 직사각형 : 두 대각선의 길이는 같고, 서로 다른 것을 이등분한다. (3) 마 름 모 : 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다. (4) 정사각형 : 두 대각선의 길이는 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다. 여러 사각형에 대한 대각선의 성질이 관련되어 있는 것을 알 수 있는데요,이 번 시간에는 이를 통해 여러 가지 사각형 사이의 포함관계를 알아봅시다.				
전개 - 안내된 탐구 -	<탐구활동1> 여러 가지 사각형의 정의와 대각선의 성질을 생각하고, 다음 명제의 참 또는 거짓을 판단하세요. ① 직사각형은 항상 평행사변형이다. ( ) ② 마 름 모는 항상 평행사변형이다. ( ) ③ 정사각형은 항상 평행사변형이다. ( ) 정사각형은 항상 직사각형이다. ( ) 정사각형은 항상 마름모이다. ( ) ④ 직사각형은 항상 마름모이다. ( ) ⑤ 마름모는 항상 직사각형이다. ( ) <탐구활동2> 탐구활동1의 결과를 벤다이어그램으로 나타내세 요. 빈 칸에 해당하는 사각형을 써 넣으세요. ①의 결과 ②의 결과 ③ 정사각형, 직사각형, 마름모의 포함관계  <참고활동> 다음 물음에 답하세요. ①사다리꼴의 정의는? ②사다리꼴과 평행사변형의 포함관계를 벤 다이어그램으로 나타내면? ③사각형과 사다리꼴의 포함관계를 벤 다이어그램으로 나타내면?  					

전개 - 명료화 -	탐구활동을 통해. < 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 포함관계를 벤다이어그램으로 나타내면 >  문제1. 다음에 주어진 사각형 중에서 두 대각선의 길이가 같은 사각형을 모두 찾아라. ① 평행사변형 ② 직사각형 ③ 마름모 ④ 정사각형 ⑤ 사다리꼴 문제2. 다음 중 마름모의 성질이 아닌 것을 모두 찾아라. ① 두 대각선의 길이가 같다. ② 한 쌍의 대변이 서로 평행하다. ③ 네 각이 모두 직각이다. ④ 두 대각선이 서로 수직으로 만난다. ⑤ 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.
전개 - 자유로운 탐구 -	문제3. 평행사변형 ABCD 가 다음 조건을 만족하면 어떤 사각형이 되는지 쓰고 그 이유를 설명하세요. (1) $\angle B = 90^\circ$ (2) $\overline{AB} = \overline{BC}$ (3) $\angle B = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{BC}$ (4) $\overline{AB} = \overline{BC}$., $\angle B = 90^\circ$ 문제4 .다음은 어떤 사각형인가? (1) 이웃하는 변의 길이가 같은 평행사변형 (2) 한 내각의 크기가 90°인 마름모 문제5. 평행사변형 ABCD가 아래 대각선의 조건을 만족하면 어떤 사각형이 되는지 쓰고 그 이유를 설명하세요. (1) $\overline{AC} = \overline{BD}$ (2) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ (3) $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ (4) $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{AC} = \overline{BD}$

전개 - 자유로운 탐구 -	문제6. 문제5의 대각선 성질(1),(2),(3),(4) 관계를 그림으로 나타내어 보세요.
정리 - 통합 -	<사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 포함관계를 벤 다이어그램으로 나타내면>  이를 부분집합기호를 사용하여 나타내면 정사각형⊂직사각형⊂평행사변형(⊂사다리꼴⊂사각형) 정사각형⊂마 름 모⊂평행사변형(⊂사다리꼴⊂사각형) 위의 포함관계를 보고 사각형의 성질을 정리해보면, 직사각형의 성질 1. 평행사변형의 모든 성질을 만족한다. 2. 두 대각선의 길이가 같고, 서로 다른 것을 이등분한다. 마름모의 성질 1. 평행사변형의 모든 성질을 만족한다. 2. 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다. 정사각형의 성질 1. 직사각형의 모든 성질을 만족한다. 2. 마름모의 모든 성질을 만족한다. 3. 두 대각선은 길이가 같고, 서로 다른 것을 수직이등분한다.

단원명	II. 도형의 성질 2. 사각형의 성질	차시	8~10 / 10	쪽수	P. 62 ~63
학습 주제	사각형과 관련된 명제의 증명				
학습 목표	사각형과 관련된 명제를 증명할 수 있다.				

학습 내용

도입 - 안내 -

여러 사각형과 관련된 성질들을 알아봤는데요.
그 성질들이 항상 참임을 보이기 위해서는 증명이 필요합니다.
오늘 이 시간에는 삼각형의 합동조건을 이용하여 여러 사각형과 관련된 명제를 증명해보도록 하겠습니다.

전개 - 안내된 탐구 -

<탐구활동1> '평행사변형 ABCD 이면 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$이다'를 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써 넣어라.

① 가정 : □ABCD에서 $\overline{AB}//\overline{DC}, \overline{AD}//\overline{BC}$
결론 :

② 가정을 그림으로 나타내세요.

③ 그림에 대각선 AC를 긋고, $\triangle ABE \equiv \triangle CDA$의 합동조건을 말하세요.

④ 증명을 완성하세요.

> 대각선 AC를 그으면 △ABC 와 △CDA 에서
> $\overline{AB}//\boxed{\quad}$ 이므로
> $\angle BAC = \boxed{\quad}$ ……①
> $\overline{AD}//\boxed{\quad}$ 이므로
> $\angle ACB = \boxed{\quad}$ ……②
> $\boxed{\quad}$는 공통인 변 ……③
> ①,②,③에 의해 $\triangle ABC \equiv \boxed{\quad}$
> $\therefore \angle B = \angle D$ ……㉠
>
> 또, 대각선 BD를 그으면 △ABD 와 △CDB 에서 같은 방법으로 하면 $\angle A = \angle C$ ……㉡
>
> 따라서, ㉠,㉡에서 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$이다.

전개 - 안내된 탐구 -

<탐구활동2> '두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형은 평행사변형이다.'를 증명하는 과정이다. 다음 순서에 따라 증명하여라.

① 가정과 결론을 기호를 사용하여 쓰세요.
가정 : □ABCD에서 $\overline{OA} = \overline{OC}, \overline{OB} = \overline{OD}$
결론 :

② 가정을 그림으로 나타내세요.

③ $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$의 합동조건을 말하세요.

④ 증명을 완성하세요.

> 먼저, △OAB 와 △OCD 에서
> $\overline{OA} = \boxed{\quad}$ ……①
> $\overline{OB} = \boxed{\quad}$ ……②
> $\boxed{\quad}$ ……③
> ①,②,③에 의해 $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$
> $\therefore \angle OAB = \angle OCD$
> $\therefore \boxed{\quad}$ ……㉠
> 또, △OAD 와 △OCB 에서
> 같은 방법으로 하면 $\overline{AD}//\overline{CB}$ ……㉡
>
> 따라서, ㉠,㉡에서 □ABCD 는 평행사변형이다.

<탐구활동3> '두 대각선의 길이가 같은 평행사변형은 직사각형이다.'를 다음 순서에 따라 증명하여라.

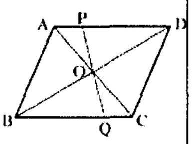
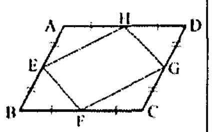
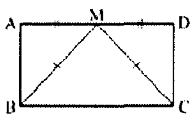
① 가정과 결론을 기호를 사용하여 쓰세요.
가정 : 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AC} = \overline{DB}$
결론 :

② 가정을 그림으로 나타내세요.

③ 그림에 대각선 AC를 긋고, $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$의 합동조건을 말하세요.

④ 증명을 완성하세요.

> △ABC 와 △DCB 에서
> $\overline{AC} = \boxed{\quad}$ ……①
> $\overline{AB} = \boxed{\quad}$ ……②
> $\boxed{\quad}$는 공통인 변 ……③
> ①,②,③에 의해 $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$
> $\therefore \angle ABC = \angle DCB$ ……㉠
> 또, 평행사변형의 성질에 의해서,
> $\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$ ……㉡
> 따라서, ㉠, ㉡에서 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$

전개 ㅣ 명료화 ㅣ	<탐구활동1>은 같이 해보았고요, <탐구활동2,3>을 발표하여 봅시다.
과제 제시 ㅣ 자유 로운 탐구 ㅣ	문제1. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점 O를 지나는 직선이 두 변 AD, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 점 O는 $\overline{PQ}$의 중점임을 증명하여라.  문제2. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 차례로 E, F, G, H라고 하면 □EFGH는 어떤 사각형이 쓰고, 증명하여라.  문제3. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 변 AD의 중점을 M이라고 할 때, $\overline{MB}=\overline{MC}$ 이면 □ABCD는 어떤 사각형인지 쓰고, 증명하여라.  문제4. 두 대각선이 서로 수직인 평행사변형은 마름모임을 증명하여라.
정리 ㅣ 통합 ㅣ	여러 가지 사각형과 관련된 명제가 참임을 보이기 위해서 증명해봤는데요. 지금까지 했던 명제의 증명 과정을 정리해보면, 첫째, 명제(문제)의 뜻을 이해하고 가정과 결론으로 나누고 둘째, 명제(문제)의 내용에 알맞은 그림을 그리고, 기호도 붙였죠. 셋째, 주로 합동인 삼각형을 찾아서 넷째, 체계적으로 설명해가며 증명을 하였습니다.