韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 1호, 2010. 2. 221-234

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 1, Feb. 2010. 221-234

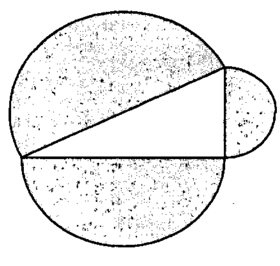
# 피타고라스 정리의 일반화에 관한 고찰

윤 대 원 (경상대학교)
김 동 근 (청구고등학교)

현재 알려진 피타고라스의 정리의 증명은 370여 가지가 될 정도로 다양한 증명 방법이 소개되고 있으며 이를 통해 증명 방법의 분석에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 하지만 피타고라스의 정리의 일반화에 관한 연구는 부족한 실정이다.
따라서 본 연구에서는 유클리드 '원론'의 1권 명제47에 제시된 내용을 바탕으로 수학적 자료 즉, 데이터(길이, 넓이, 각의 크기 등)를 추출하여 학교수학 및 문헌 연구를 통해 피타고라스 정리의 일반화에 관한 다양한 방법을 고찰하였다.

## Ⅰ. 서 론

수학사에서 가장 기본적이면서도 위대한 정리 중의 하나가 피타고라스의 정리라고 볼 수 있다. 특히 기하와 관련된 영역에서는 이 정리가 사용되지 않은 적이 거의 없을 뿐만 아니라 일상생활과 관련된 건축이나 측정 등 많은 분야에서 이용될 정도로 강력한 정리라고 할 수 있다. 이 정리는 유클리드의 '원론'의 제1권 명제47에 제시되어 있다. 그 당시에는 기호가 발달되어 있지 않아서 기하학적 명제로 기술되어 있지만, 16C Viete 이후 기호 체계가 확립되고 17C Descrates가 좌표를 발명함으로써 기하는 새로운 국면을 맞게 된다. 그로 인해 '원론'에 제시된 그 내용은 직각삼각형에서 빗변을 $c$, 나머지 두 변을 각각 $a, b$라 할 때 그 관계식은 $c^2=a^2+b^2$으로 나타낼 수 있다. 피타고라스 정리는 제7차 수학과 교육과정 9-나 단계의 모든 교과서에 다루고 있을 정도로 중요한 정리라고 볼 수 있으며, 특히 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이의 관계에서 이 정리가 성립함을 증명하고 있다. 그리고 오른쪽 <그림 1>과 같이 각 변을 지름으로 하는 반원들의 넓이 사이의 관계에도 피타고라스의 정리가 성립함을 증명하는 내용도 교과서에 제시하고 있다. 이 관계는 정사각형들의 넓이 사이에서 성립하는 정리가 반원들의 넓이 사이에도 성립하므로 이것



<그림 1>

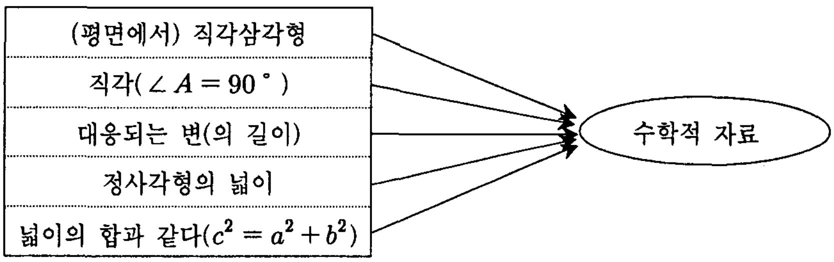
* 접수일(2009년 12월 11일), 심사(수정)일(1차: 2010년 1월 25일, 2차: 1월 31일), 게재확정일자(2010년 2월 9일)
* ZDM 분류 : G14
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 피타고라스 정리, 일반화, 수학적 자료

은 피타고라스 정리의 확장이라고 볼 수 있다. 이것과 관련된 좀 더 일반적인 경우로 닮음도형들 사이의 관계를 '원론' 6권 명제31에 제시하고 있다. 이 두 명제의 내용을 살펴보자.

먼저 유클리드의 '원론'의 제1권 명제47에 기술된 명제의 내용을 살펴보면 '직각삼각형에서 직각에 대응되는 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 다른 변들을 한 변으로 하는 정사각형들의 넓이의 합과 같다.'로 기술되어 있으며, '원론'의 6권 명제31은 '직각삼각형의 세 변에 즉, 각 변에 대응하는 닮음 도형을 만들면 빗변 위의 도형의 넓이는 다른 두 변 위의 도형의 넓이의 합과 같다.'로 제시하고 있다.

명제 47을 현대적 의미로 나타내면 '$\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 $ABC$에서 $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = c$라고 하면 $c^2 = a^2 + b^2$가 성립한다.'와 같다. 명제47에서는 정사각형일 때에 성립함을 보였지만 명제31은 더 확장하여 모든 닮음도형에 대해서도 성립함을 제시하고 있다. 따라서 이 명제31은 명제47의 확장이라고 볼 수 있다. 왜냐하면 정사각형은 닮음도형의 특수한 경우이기 때문이다. 이처럼 '원론'에서 명제들 사이의 일반화에 대해 제시하고 있으며, 이러한 내용은 학교수학에서도 중요하게 다루고 있다.

명제47에 제시된 내용을 바탕으로 다음과 같은 수학적 자료 즉, 데이터를 추출할 수 있다.




피타고라스 정리의 선행연구에 관해 살펴보면 크게 세 가지 방향으로 진행되었고 그 내용을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 피타고라스 정리의 다양한 증명이나 증명 방법 분석에 관한 연구이다(예를 들어, 김민정, 2004; 노희성, 2008; 손은해, 2009; 한인기 외 3명, 2002). 구체적으로 한인기 외 3명은 중학교 수학 내용과 관련된 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법 및 각 증명 방법에 대한 수학적 아이디어를 소개하고 있다. 둘째, 피타고라스 세 수 혹은 세 쌍의 수에 관한 연구이다(예를 들어, 김민경, 2007; 김은규, 1992; 백순기, 1993). 마지막으로 교육용 프로그램을 활용한 피타고라스 정리의 효율적인 지도 방법에 관한 연구이다(예를 들어, 계영희, 2000; 박대우, 1997; 이복구, 1996; 황학선, 1997). 하지만 이러한 연구의 공통점은 피타고라스 정리에 관한 연구이며 이 정리의 일반화에 관한 연구는 부족한 실정이다.

본 연구는 피타고라스의 정리에서 주어진 수학적 자료 즉 데이터(길이, 넓이, 각의 크기 등)들 추출하여 그들 사이의 관계를 확장시켜보고, 그 방법들을 고찰하는 것을 목적으로 하고 있다.

피타고라스 정리의 확장은 중등학교 영재수업의 자료로 이용될 수 있을 뿐만 아니라, 수학을 바라

보는 시각을 폭넓게 확장 시킬 수 있으므로 의미 있는 자료가 될 것으로 기대된다.

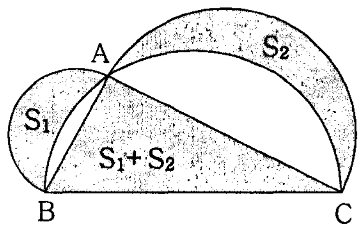
또한, 본 연구에서는 교과서 및 다양한 문헌 연구를 통해, 피타고라스의 정리의 확장에 관한 구체적인 자료를 제시하고 그 방법들을 고찰할 것이다. 이를 통해 영재 학생들의 창의적인 탐구 활동 방법 및 방향에 대해 교수학적으로 의미 있는 시사점을 모색하고자 한다.

## Ⅱ. 본 론

이 장에서는 피타고라스의 정리의 확장에 관한 구체적인 자료를 제시하고 그 방법들을 고찰하고자 한다. 이 정리의 일반화를 도형의 넓이, 일반 삼각형, 사각형, 차원, 피타고라스의 세 수, 일반화의 일반화에 관한 내용으로 나누어 살펴본다.

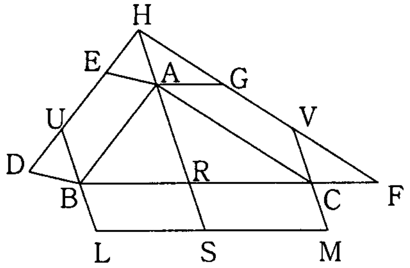
### 1) 도형의 넓이를 활용한 일반화

피타고라스 정리는 직각삼각형의 세 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이들의 관계로 볼 수 있다. 이 절에서는 정사각형의 넓이 사이의 관계를 확장한 궁형구적에 대해 먼저 살펴본 뒤 일반적인 닮음도형들 사이의 관계를 알아본다. BC 450년경 Hippocrates의 궁형구적은 피타고라스 정리에서 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이들 사이의 관계가 확장된 것으로 볼 수 있다. <그림 2>와 같이 궁형의 구적 $S_1$와 $S_2$의 합은 직각삼각형 $ABC$의 넓이와 같다. 여기서 직각삼각형의 각 변에 접한 정사각형들이 각 변을 지름으로 하는 반원으로 대체되었음을 알 수 있다. 다음으로 고대 그리스 시대의 알렉산드리아의 Pappus(300년경)가 그의 저서 '수학집성 (Mathematical Collection)'의 제Ⅳ권에 피타고라스 정리에 관한 가장 뛰어난 확장 중의 하나가 제시되어 있다(Eves, 1964). 그 내용을 살펴보면 <그림 3>과 같이, '$ABC$는 임의의 삼각형이고 $ABDE$, $ACFG$는 변 $AB$와 $AC$ 위에 외접하는 평행사변형이라고 하자. $DE$와 $FG$는 $H$에서 만나고 $BL$과 $CM$은 $HA$와 길이가 같고 평행하도록 그렸다고 하자. 그러면 평행사변형 $BCML$의 넓이는 평행사변형 $ABDE$와 $ACFG$의 넓이의 합과 같다.' 즉 $\square BCML = \square ABDE + \square ACFG$이 된다. 이것의 증명은 $\square ABDE = \square ABUH = \square BLSR$과 $\square ACFG = \square ACVH = \square RSMB$이 성립한다. 그러므로 $\square ABDE + \square ACFG = \square ABUH + \square ACVH = \square BLMC$이 된다. 다른 방법으로 <그림 4>와 같이 임의의 삼각형 $ABC$를 평행이동 시키면 생기는 두 개의 평행사변형을 각각 $A_1BAC_1$과 $C_1ACB_1$라 하면 오각형 $A_1BCB_1C_1$의 넓이에서 삼각형 $ABC$의 넓이를 뺀 부분의 넓이는 두 평행사변형의 넓이의 합과 같고 평행사변형 $A_1BCB_1$의 넓이는 오각형에서 삼각형 $A_1B_1C_1$을 뺀 부분의 넓이와 같다. 그리고

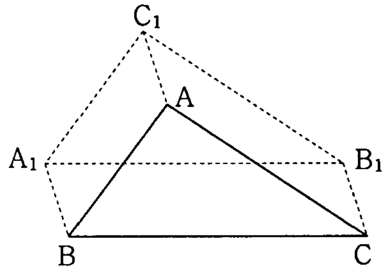


<그림 2>

합동인 삼각형 $ABC$와 $A_1B_1C_1$는 넓이가 같으므로, $\square A_1BCB_1 = \square A_1BAC_1 + \square C_1ACB_1$와 같다(한인기, 2005).




<그림 3>



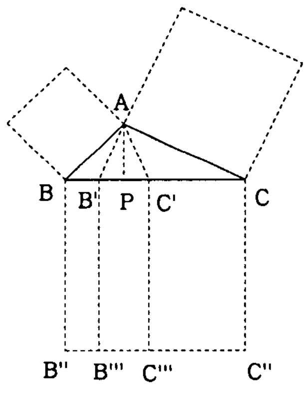

<그림 4>

<그림 1>과 <그림 3, 4>을 통해 살펴본 바와 같이, 직각삼각형의 각 변에 접한 정사각형들은 반원과 임의의 평행사변형으로 대체되었음을 알 수 있다. 피타고라스 정리를 직각삼각형의 각 변에 만들어진 정사각형들의 넓이들 사이의 관계라는 관점에서 본 다면 직각삼각형의 각 변에 만들어진 도형들은 반원과 평행사변형에 대해서도 성립한다는 것이다. 각 변에 만들어진 이런 도형들은 모두 닮음 도형이라고 유추할 수 있고 이를 바탕으로 직각삼각형의 각 변에 만들어진 도형이 서로 닮음 도형이라면 이 도형들의 넓이($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$의 변 위에 그려진 도형의 넓이를 각각 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ이라고 하면)는 Ⅰ + Ⅱ = Ⅲ을 알 수 있다. 즉 각 변에 만들어진 도형이 닮음 도형이면 항상 피타고라스의 정리가 성립한다.

### 2) 일반 삼각형을 활용한 일반화

가) 삼각형의 닮음을 이용

직각삼각형에서 정사각형의 넓이들 사이의 관계를 일반삼각형에서 삼각형의 닮음을 이용하여 넓이들 사이의 관계를 살펴보자. 피타고라스의 정리를 모든 삼각형에 적용할 수 있도록 Pappus와 마찬가지로 Thabit도 일반화하는데 노력하였다. <그림 5>와 같이, '임의의 삼각형 $ABC$의 꼭짓점 $A$에서 각 $AB'B$와 각 $AC'C$가 모두 각 $A$와 같게 되도록 $\overline{BC}$를 점 $B'$과 $C'$으로 나누는 선을 그으면 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BB'} + \overline{CC'})$와 같다.'(Boyer, 1991, p.259). 먼저 $\angle A > 90^\circ$ 이면 $\overline{AB}$ 위의 정사각형은 직사각형 $BB'B''B'''$과 같고, $\overline{AC}$ 위의 정사각형은 직사각형 $CC'C''C'''$과 같다. 여기서 $\overline{BB''} = \overline{CC''} = \overline{BC} = \overline{B'C'}$이다. 곧, $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$ 위

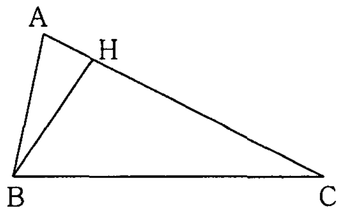



<그림 5>

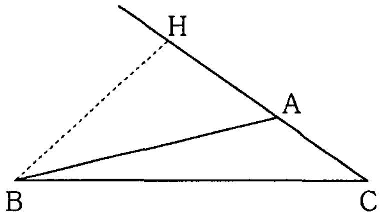
의 정사각형의 합은 $\overline{BC}$ 위의 정사각형에서 직사각형 $B'CB''C''$을 뺀 것과 같다. 그리고 $\angle A < 90°$ 이면 점 $B'$와 $C'$의 위치는 $\overline{AP}$를 기준으로 반대쪽에 나타난다. 여기서 꼭짓점 $A$에서 $\overline{BC}$에 그은 수선의 발이 점 $P$이다. 이 경우에 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$ 위의 정사각형의 합은 $\overline{BC}$ 위의 정사각형에서 직사각형 $B'CB''C''$을 더한 값이 된다. $\angle A = 90°$ 이면 점 $B'$와 $C'$는 점 $P$와 일치하게 되며 이것은 곧 피타고라스의 정리가 된다. 여기서는 닮음 삼각형(삼각형 $AB'B$와 $AC'C$는 $\angle B$가 공통이므로 $AA$닮음)을 이용하여 둔각과 예각일 때 생기는 도형의 넓이의 합과 차로 피타고라스 정리의 확장을 보여주고 있다.

나) 코사인 제2법칙을 이용

직각삼각형의 세 변들 사이에 성립하는 관계식 $c^2 = a^2 + b^2$이 일반삼각형에서는 세 변들 사이에 어떤 관계가 있는지 살펴본다. 중학교 때 배우는 직각삼각형에서의 피타고라스 정리는 일반 삼각형에 대한 코사인 제2법칙으로 일반화될 수 있으며 고등학교 1학년 모든 교과서에서 이와 같은 내용에 대해 다루고 있다. 유클리드 '원론' 제2권의 명제12와 13으로부터 내용은 '삼각형 $ABC$에서 둔각(혹은 예각)의 대변의 길이의 제곱은 다른 두 변의 길이의 제곱의 합에, 이 두 변 중 하나와 다른 하나를 그 변에 사영시킨 선분의 곱의 두 배를 더한(혹은 뺀) 값과 같다.'라고 제시하고 있다(이종우, 2004). 여기에 '원론' 제1권의 명제47을 통합하면 다음과 같이 나타낼 수 있다. 아래 그림에서, 삼각형 $ABC$에서 꼭짓점 $B$에서 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 $H$라 하면 $\angle A = 90°$ 이면 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$이 되며, 다음으로 <그림 6>와 같이, $\angle A < 90°$ 이면 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}$이 된다. 또한 <그림 7>과 같이, $\angle A > 90°$ 이면 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}\cdot\overline{AH}$이다.




<그림 6>




<그림 7>

위의 세 식을 하나로 정리한 것이 바로 코사인 제2법칙이라고 할 수 있다. 임의의 삼각형 $ABC$에서 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$의 길이를 각각 $a, b, c$라 하고, $\angle BAC$의 크기를 $A$라 하면 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$가 된다. 이 법칙은 다른 두 각의 크기 $B$, $C$에 대해서도 성립한다. 여기서 ±부호는 예각이냐 둔각이냐 따라 결정되며, $\angle BAC = 90°$ 이면 피타고라스의 정리가 된다.

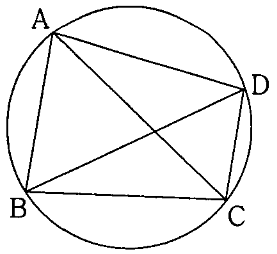
다) 중선의 정리를 이용

직각삼각형은 원에 내접하는 삼각형이 되며, 그 원의 중심은 외심이 된다. 외심은 빗변의 중점에

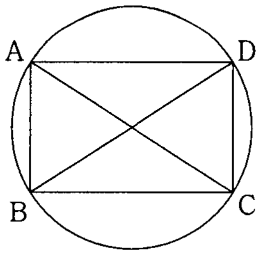
있고, 그 외심에서 각 꼭짓점에 이르는 거리는 반지름으로 길이로 같다. 일반삼각형의 한 꼭짓점에서 그 대응변에 중선을 그으면 어떤 관계식이 만족하는지 살펴보자. 이 내용도 대부분의 고등학교 교과서에서 다루고 있는 내용이라고 할 수 있다. 그 내용은, '삼각형 $ABC$의 $\overline{BC}$의 중점을 $M$이라고 하면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이다'. 이것을 'Pappus 혹은 중선'의 정리라고 한다. 위 식에서 $\angle BAC=90^\circ$ 일 때, $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$이 되므로 $\overline{BC}^2=(\overline{BM}+\overline{CM})^2=\overline{BM}^2$ $2\overline{BM}\cdot\overline{CM}+\overline{CM}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 된다. 이 또한 피타고라스 정리의 확장이라고 볼 수 있다.

### 3) 사각형을 활용한 일반화

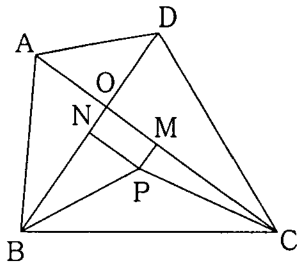
직각삼각형은 원에 내접하는 삼각형이다. 원에 내접하는 사각형과 일반 사각형에서는 어떤 관계가 성립하는지 살펴본다. 먼저 <그림 8>과 같이, '원에 내접하는 사각형을 $ABCD$라고 하면 $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$이다. 이것을 프톨레마이오스(Ptolemaeos, 85~165)의 정리 즉 일명 톨레미의 정리라 한다. 다음으로, <그림 9>와 같이, 사각형 $ABCD$가 직사각형일 때 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$가 되므로 위 식을 정리하면 직각삼각형 $ABC$에서 피타고라스의 정리를 나타낸다.



<그림 8>



<그림 9>



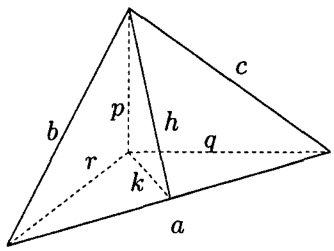
<그림 10>

<그림 10>과 같이, '사각형 $ABCD$의 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 $O$라 하고, $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점을 각각 $M$, $N$이라고 하자. 점 $M$, $N$을 지나고 각각 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$에 평행하게 그은 직선의 교점을 $P$라 하면 $\triangle OAB+\triangle OCD=2\triangle PBC$이다.' 여기서 $\angle BOC=90^\circ$ 이고 $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{OD}=\overline{OC}$라고 가정하면 $\triangle OAB$와 $\triangle OCD$는 직각 이등변삼각형으로 사각형 $ABCD$는 원에 내접하게 되며, $P$는 그 원의 중심이 된다. 또 $\triangle PBC$는 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각 이등변삼각형이 되므로 $\triangle OAB+\triangle OCD=2\triangle PBC$의 관계가 성립하므로 $\frac{1}{2}\overline{OB}^2+\frac{1}{2}\overline{OC}^2$

$=\frac{1}{4}\overline{BC}^2\times 2$가 된다. 즉 $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$이 성립한다(정동권, 1994). 즉 사각형 $ABCD$의 두 대각선이 수직이 아닐 때 두 대각선에 의해 생기는 두 삼각형 $AOB$, $COD$와 삼각형 $PBC$의 넓이들 사이의 관계와 <그림 8>에서처럼 원에 내접하는 사각형이 직사각형이 아닌 일반 사각형일 때 두 대각선과 대변들 사이의 관계들이 각각 피타고라스의 정리의 확장임을 알 수 있다.

### 4) 차원 확장을 통한 일반화

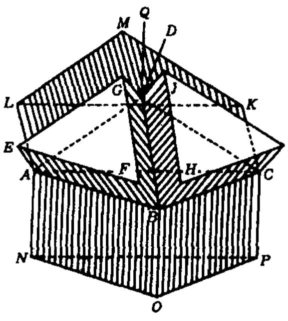
평면에서 성립하는 피타고라스 정리를 유추를 통해 공간으로 확장하여 보자. <그림 11>과 같이, 평면에서 피타고라스 정리를 넓이에 관한 식이라고 한다면 공간에서 직각사면체에서 직각을 낀 세 면의 넓이를 $A$, $B$, $C$라고 할 때, 다른 한 면 $D$의 넓이에 대해 $D^2=A^2+B^2+C^2$라고 유추할 수 있을 것이다. 이것은 종종 '드 구아(de Gua)의 정리'라고 언급된다. $a^2=q^2+r^2$, $b^2=p^2+r^2$, $c^2=q^2+p^2$이고 $A=\frac{1}{2}rq$, $B=\frac{1}{2}pr$, $C=\frac{1}{2}pq$이 된다. 그리고 다른 한 면의 넓이 $D=\frac{1}{2}ah$가 된다. 삼직각꼭짓점을 지나는 평면과 사면체가 만나게 되는 부분은 직각삼각형이 되므로 이때 이 직각삼각형의 빗변의 길이를 $h$, 다른 직각변의 길이를 $k$라고 한다면 $h^2=k^2+p^2$이 되며, $A=\frac{1}{2}ak$라고 할 수 있다(Polya, 1983). 따라서



<그림 11>

$$\begin{aligned}4D^2&=a^2h^2\\&=a^2(k^2+p^2)=4A^2+a^2p^2\\&=4A^2+(r^2+q^2)p^2=4A^2+(rp)^2+(qp)^2\\&=4A^2+4B^2+4C^2\end{aligned}$$

기둥의 부피는 '밑넓이×높이'이므로 위의 관계식에서 일정한 높이 $H$만큼 곱하여도 위 관계식은 변함이 없다. 즉 $D^2H=A^2H+B^2H+C^2H$이 성립한다. 다음 <그림 12>와 같이, '$ABCD$를 임의의 사변체라고 하자. 그리고 $ABC-EFG$, $BCD-HIJ$, $CAD-KLM$을 각각 $ABCD$의 면 $ABD$, $BCD$, $CAD$에 외접하는 임의의 삼각기둥이라고 하자. $Q$를 평면 $EFG$, $HIJ$, $KLM$의 교점이라고 하고, $ABC-NOP$를 그것의 모서리 $AN$, $BO$, $CO$가 벡터 $QD$의 이동인 삼각기둥이라고 하면 $ABC-NOP$의 부피는 $ABC-EFG$, $BCD-HIJ$,



<그림 12>

$CAD-KLM$의 합과 같다.'(Eves, 1983). 여기서는 2차원 평면에서의 피타고라스 정리를 3차원 공간으로 확장하였다. 먼저 <그림 11>에서는 유추를 통하여 공간에서 직각사면체에서 직각을 낀 세 면의 넓이를 $A, B, C$라고 한다면 다른 한 면 $D$의 넓이에 대해 $D^2=A^2+B^2+C^2$로 확장하였으며, <그림 12>에서처럼 평면에서의 넓이에 관한 피타고라스의 정리를 공간에서의 부피로 확장하였다.

### 5) 피타고라스의 세 수를 활용한 일반화

린드 파피루스에 따르면, BC 2300년경 이집트인은 3 : 4 : 5의 길이를 이용하여 직각삼각형을 만들었다고 기록되어 있으며, BC 400~500년경 인도에서는 15, 36, 39를 세 변으로 하는 삼각형으로 이미 직각을 만들었고, 중국뿐만 아니라 우리나라의 신라시대 '주비산경'에서 '구(勾)를 3, 고(股)를 4라고 할 때 현(弦)은 5가 된다.'는 내용이 기록되어 있다. 이들은 $3^2+4^2=5^2$, $15^2+36^2=39^2$와 같이 피타고라스 정리를 만족시키는 자연수임을 알 수 있다. 좀 더 일반적으로 말하자면 이것은 $x^2+y^2=z^2$을 만족시키는 2차 부정방정식의 자연수의 해 $x, y, z$에 해당된다는 것을 알 수 있으며 자연수 $x, y, z$는 다음과 같은 일반적인 형태로 나타난다.

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2$$

이때 $m, n$은 $m>n$인 자연수이다.

### 6) 일반화의 일반화

앞에서 살펴본 피타고라스 정리의 확장을 다시 더 일반화한 즉 중선의 정리를 일반화한 스튜어트 정리, 임의의 삼각형에서 성립하는 코사인 제2 법칙을 볼록$n$각형에서의 코사인 법칙, 톨레미 정리의 일반화, Vecten & Loomis의 문제를 중심으로 직각삼각형과 정사각형들로 둘러싸인 삼각형들의 넓이와 길이 사이의 관계에 대해 살펴본다.

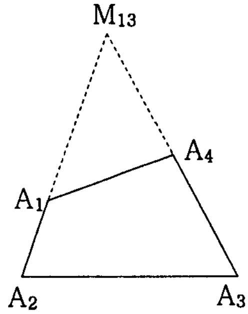
가) Pappus 정리를 일반화한 스튜어트 정리

중선의 정리는 피타고라스의 정리를 확장한 정리라고 볼 수 있으며, 이 내용은 대부분의 교과서에 언급하고 있다. 그중 박규홍 외 3명(2002, p.13), 최봉대 외 6명(2002, p.15), 양승갑 외 8명(2002, p.13)에서는 $\triangle ABC$의 변 $BC$의 중점($\overline{BM}=\overline{CM}$)을 $M$이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 즉, Pappus 정리를 증명하도록 제시하고 있으며, 양승갑 외 8명(2002, p.13)에서는 $\triangle ABC$의 $\overline{BC}$ 위에 $\overline{BD}=2\overline{DC}$ 인 점 $D$를 잡으면, $\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2)$임을 증명하도록 제시하고 있다. 이들은 스튜어트 정리의 특수한 경우로 $\overline{BC}$ 위를 $m:n$으로 내분하는 점 $D$를 잡아서 Pappus 정리를 일반화한 정리라고 볼 수 있으며 그 내용은 다음과 같다.

$$m\overline{AB}^2 + n\overline{BC}^2 = (m+n)(\overline{AD}^2 + \overline{BD} \times \overline{CD})$$

나) 볼록$n$각형에서 코사인 법칙

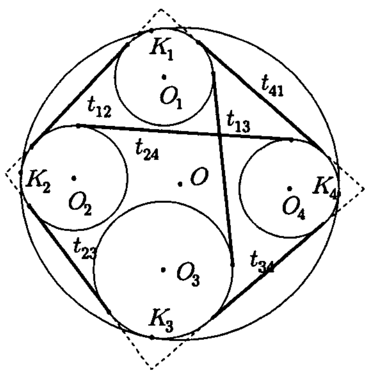
<그림 13>과 같이, 임의의 삼각형에서 성립하는 코사인 제2 법칙을 볼록사각형 $A_1A_2A_3A_4$에서 변 $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_1 = a_4$라고 하면 $a_4{}^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 - 2a_1a_2\cos A_2 - 2a_1a_3\cos M - a_2a_2\cos A_3$, 볼록$n$각형에서의 코사인 정리는 '한 변의 제곱 $a_n{}^2$은 나머지 변들의 제곱 $a_i{}^2$(단, $1 \le i \le n-1$)의 합에서 $a \le j < k \le n-1$인 $2a_ja_k\cos M_{jk}$의 값을 뺀 것과 같다.'라고 제시하였다(한인기, 2007). 이를 바탕으로 유추를 통하여 볼록$n$각형에 대해서도 코사인 법칙이 성립함을 추측하였고 벡터를 이용하여 증명하였다.



<그림 13>

다) 톨레미 정리의 일반화

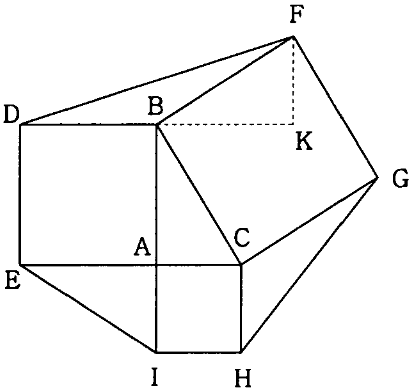
앞의 '사각형을 통한 일반화'에서 원에 내접하는 사각형 $ABCD$라고 하면 $\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{AC}\cdot\overline{BD}$라고 하였다. 그럼 이를 확장하여 원에 내접하지 않는 사각형 $ABCD$이면 $\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} > \overline{AC}\cdot\overline{BD}$이라고 할 수 있으며, 이를 통합하면 임의의 사각형 $ABCD$에 대해서 $\overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} \ge \overline{AC}\cdot\overline{BD}$이 성립한다고 할 수 있다. 그리고 <그림 14>와 같이 이를 더 일반화한 정리가 Casey(1820~1891)의 정리이다. 그 내용을 살펴보면 '원 $O$를 반지름이 $R$라고 하고, 원 $O$에 내접하면서 서로 만나지 않는 네 원을 각각 $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$라고 하자. 그러면 $t_{12}\cdot t_{34} + t_{14}\cdot t_{23} = t_{13}\cdot t_{24}$이 성립한다.' 여기서 각 $t_{ij}$를 원 $O_i$, $O_j$의 공통 외접선의 길이이다. 원 $O$와 네 원 $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$와 각각 만나는 점을 $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$라고 할 때, 네 원이 한 점 $K_i$로 되면 즉 $K_1K_2K_3K_4$는 볼록사각형이 되며, 위 관계식은 정확하게 톨레미의 정리가 됨을 알 수 있다.



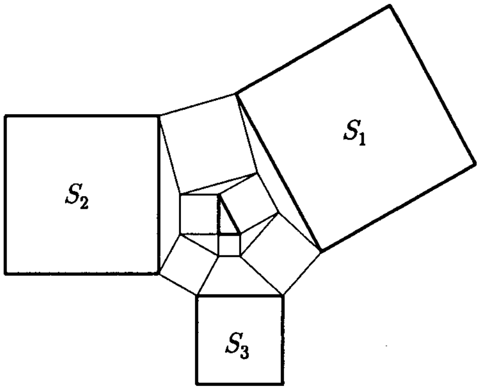
<그림 14>

라) 뷔크튼(Vecten, 1817)에 의하면 다음 <그림 15>과 같이 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 $ABC$의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형들을 각각 $\square ABDE$, $\square BFGC$, $\square ACHI$이라고 하면 $\triangle ABC = \triangle BDF = \triangle AEI = \triangle CGH \cdots$ ①과 $8\overline{BC}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{HI}^2 + \overline{IE}^2$

$+\overline{DE}^2 \cdots$ ②가 성립함을 제시하였다(권영한, 2005). 식 ①은 $\overline{DB}$를 연장하여 $\overline{AB}=\overline{BK}$가 되도록 작도하면 쉽게 $\triangle ABC=\triangle BDF=\triangle BFK$가 성립함이 증명된다.



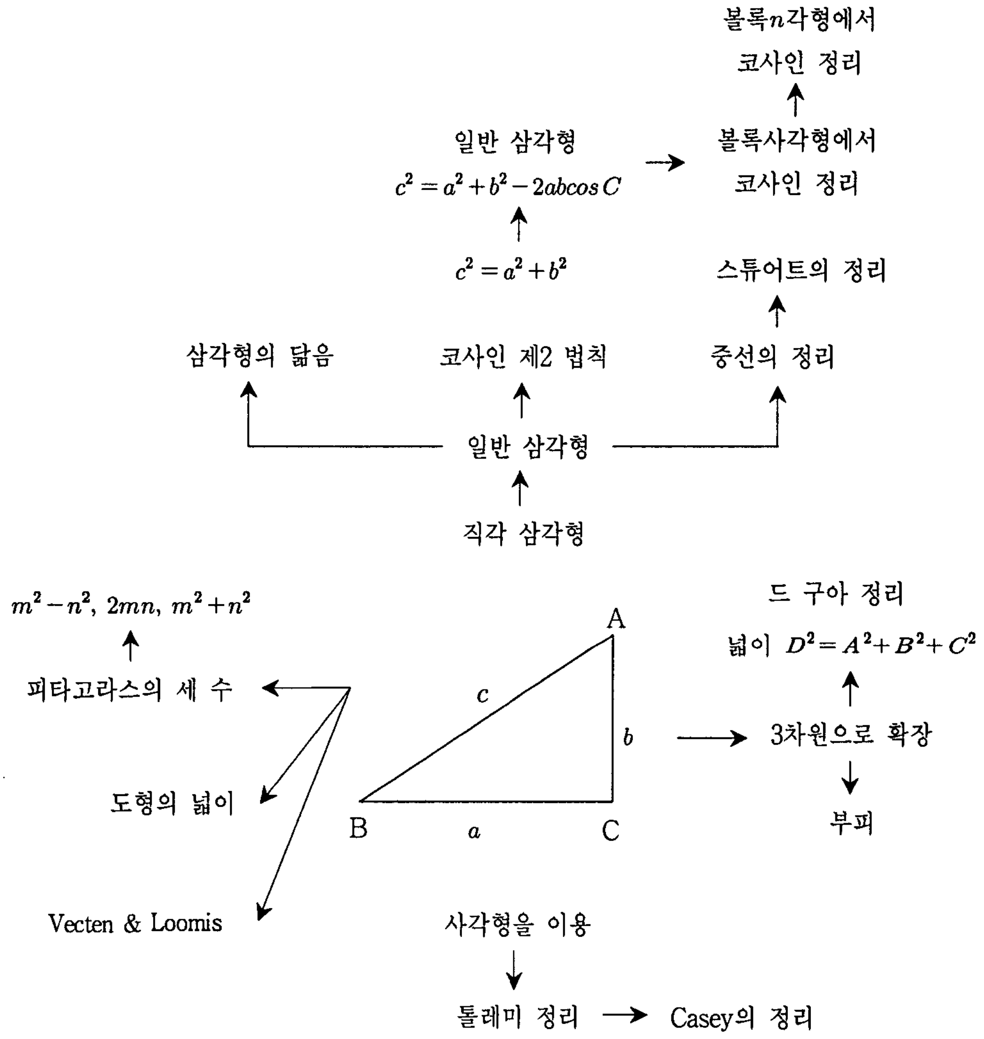

<그림 15>




<그림 16>

여기서 $\angle ABC=\theta$라고 하면 $\angle DBF=\pi-\theta$가 되고 삼각형 $ABC$와 $BDF$의 넓이를 구하는데 사인을 이용하면 된다. 따라서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\theta$, $\triangle BDF=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BF}\cdot\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{BF}\cdot\sin\theta$가 되고 $\overline{AB}=\overline{BD}$, $\overline{BC}=\overline{BF}$이므로 두 삼각형의 넓이는 같다. 같은 방법으로 삼각형 $CGH$와 $AEI$의 넓이도 삼각형 $ABC$의 넓이와 같게 됨을 알 수 있다. 그리고 식 ②에 대한 증명을 앞에서 이용한 Pappus의 중선의 정리를 이용하면 $\overline{DF}^2+\overline{FK}^2=2\overline{BF}^2+2\overline{BD}^2$이 되고 $\overline{FK}^2=\overline{HI}^2$와 같으므로 $\overline{DF}^2=2\overline{BF}^2+2\overline{BD}^2-\overline{HI}^2$로 나타낼 수 있다. 또한, 같은 방법으로 $\overline{GH}^2=2\overline{CG}^2+2\overline{CH}^2-\overline{AB}^2$로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $\overline{DF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HI}^2+\overline{IE}^2+\overline{DE}^2=8\overline{BC}^2$가 된다. 또한, 관계식 ①, ②는 직각삼각형에 대해서만 성립하는 것이 아니라 일반 삼각형에 대해서도 항상 성립함을 확인할 수 있다. 또한, Lommis(1968)는 <그림 16>과 같이<그림 15>를 더 확장하여 피타고라스 정리가 성립함을 증명하였다. 삼각형 $ABC$에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$라고 하면 도형 $S_1$은 정사각형이 되고, 그 한 변의 길이는 $\overline{BC}$의 4배 즉 $4a$와 같다. 마찬가지로 도형 $S_2$, $S_3$도 역시 정삭각형이 되고, 한 변의 길이는 각각 $4c$, $4b$가 되어 피타고라스 정리가 성립함을 알 수 있다. 즉 $(4a)^2=(4c)^2+(4b)^2$이므로 $S_1=S_2+S_3$가 된다.

지금까지 살펴본 내용을 다음 <그림 17>과 같이 정리할 수 있다.




<그림 17> 피타고라스 정리의 확장

## Ⅲ. 결 론

본 연구는 수학사에서 위대한 정리 중의 하나인 피타고라스의 정리에서 수학적 자료 즉 데이터(길이, 넓이, 각의 크기 등)들 추출하여 그들 사이의 관계를 일반화시켜보고, 그 방법들을 고찰하였다. 이를 위해 피타고라스 정리를 일반화하기 위해 주어진 자료를 바탕으로 도형의 넓이, 일반 삼각형, 사각형, 차원, 피타고라스의 세 수, 일반화의 일반화로 나누어 살펴보았다. 특히 일반 삼각형을 활용

한 확장에서 삼각형의 닮음, 코사인 제2법칙, 중선의 정리를 이용하여 일반화하였다. 또한 이들의 확장만으로 그치는 것이 아니라 이들을 다시 일반화한 즉 중선의 정리의 일반화인 스튜어트 정리, 삼각형에서 성립하는 코사인 제2법칙을 볼록 $n$각형에서 코사인 정리, 톨레미 정리의 일반화, 마지막으로 Vecten & Loomis의 문제를 살펴보았다.

이를 바탕으로 영재 학생들의 창의적인 탐구 활동 방법 및 방향에 대해 교수학적으로 의미 있는 시사점을 제시하였다고 본다.

피타고라스 정리의 확장은 중등학교 영재수업의 자료로 이용될 수 있을 뿐만 아니라, 영재수업 때 하나의 문제를 통한 다양한 풀이나 개방형 문제를 통한 여러 유형의 답을 추출하는 것도 중요하지만 본 연구에서처럼 하나의 정리로부터 다양하고 끊임없는 탐구 즉 확산적 사고가 수학을 바라보는 시각을 폭넓게 확장 시킬 수 있다고 기대된다.

## 참 고 문 헌


계영희 (2000). GSP를 활용한 중학교 수학 교과 연구-피타고라스 정리를 중심으로-, 한국수학사학회지, **13(2)**, pp.121-132. 서울: 한국수학사학회.

권영한 (2005). 재미있는 이야기 수학, 서울: 전원문화사.

김민경 (2007). 고대 바빌로니아 Plimpton 322의 역사적 고찰, 한국수학사학회지, **20(1)**, pp.45-56. 서울: 한국수학사학회.

김민정 (2004). 피타고라스 정리의 증명법 고찰, 제주대학교 석사학위논문.

김은규 (1992). 피타고라스 세 수 및 피타고라스 삼각형에 관하여, 경상대학교 석사학위논문.

노희성 (2008). 피타고라스 정리의 다양한 증명들에 내재된 수학교육학적 아이디어 분석, 한국외국어대학교 석사학위논문.

박규홍 외 3명 (2002). 수학 10-가, 서울: (주)교학사.

박대우 (1997). 피타고라스의 정리에 효과적인 지도 방안에 관한 CAI 제작 및 적용을 통한 학습 효과에 관한 연구, 충북대학교 석사학위논문.

백순기 (1993). 피타고라스 세 쌍에 관한 연구, 한남대학교 석사학위논문.

손은해 (2009). 피타고라스 정리의 다양한 증명방법 분석-Loomis의 책에 게재된 367가지 방법을 중심으로-, 한국외국어대학교 석사학위논문.

양승갑 외 8명 (2002). 수학 10-가, 서울: (주)금성출판사.

이복구 (1996). CAI 프로그램을 이용한 피타고라스 정리의 효율적인 지도 방법, 충북대학교 석사학위논문.

이종우 (2004). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

정동권 (1994). 偉大한 遺産 피타고라스 定理, 科學數學敎育年報 **10**, pp.41-51. 인천: 仁川敎育大學敎

科學敎育硏究所.

최봉대 외 6명(2002). 수학 10-가, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

_____ (2007). 유추를 통한 코사인 정리의 일반화에 관한 연구, 한국수학교육학회지시리즈 E <수학교육 논문집> 21(1), pp.51-64. 서울: 한국수학교육학회.

한인기 외 3명 (2002). 피타고라스 정리의 다양한 증명과 교육적 의의, 한국수학교육학회지시리즈 E <수학교육 논문집> 13(2), pp.245-263. 서울: 한국수학교육학회.

황학선 (1997), 중학교 수학과 피타고라스의 정리 학습을 위한 멀티미디어 CAI 설계 및 구현, 한국교원대학교 석사학위논문.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics*, NY: John Wiley & Sons, Inc., c.

Polya, G. (1983). *Mathematical Discovery I*, 우정호 역(2005), 서울: 교우사.

Loomis, E. S. (1968), *The Pythagorean Proposition*, Classics in Mathematics Education Series. Reston, Va. : NCTM.

Eves, H. (1964). *An Intorduction to The History of Mathematics*, N. Y.: Holt, Rinehart and Winston

Eves, H. (1983). *Great Moments in Mathematics*, 허민・오혜영 역(1999), 서울: 경문사.

# The Study of the Generalization for Pythagorean Theorem

**Yoon Dae-won**
Department of Mathematics Education Research Institut, Gyeongsang National University,
900 Gaza-dong, Jinju, Korea
E-mail : yikwon@gnu.ac.kr

**Kim Dong Keun**
Chunggu High School
850-6, Shinchun 3-dong, Dong-gu, Daegu, Korea
E-mail : x-file-9513@hanmail.net

So far, around 370 various verification of Pythagorean Theorem have been introduced and many studies for the analysis of the method of verification are being conducted based on these now. However, we are in short of the research for the study of the generalization for Pythagorean Theorem.

Therefore, by abstracting mathematical materials that is, data(lengths of sides, areas, degree of an angle, etc) which is based on Euclid's elements Vol 1 proposition 47, various methods for the generalization for Pythagorean Theorem have been found in this study through scrutinizing the school mathematics and documentations previously studied.

* ZDM Classification : G14
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Pythagorean Theorem, Generalization, Mathematical Materials