韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 1호, 2010. 2. 195~220

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 1, Feb. 2010. 195-220

정사각형 형태가 아닌 마방진에 대한 고찰

이 경 언 (한국교원대학교 대학원)

방진 또는 마방진(magic square, 魔方陣)은 정사각형 모양으로 수를 배열하여 가로, 세로, 대각선의 합이 같아지도록 만든 수배열을 말한다. 마방진의 '방'에는 정사각형이라는 의미가 포함되어 있다. 만약 '방' 즉 정사각형이라는 조건을 제거한다면 어떤 수배열이 가능할 것인가? 중국의 『양휘산법』 과 『산법통종』 에는 취오도(聚五圖)와 취육도(聚六圖), 취팔도(聚八圖), 찬구도(攢九圖), 팔진도(八陣圖), 연환도(連環圖)와 같은 다양한 수배열이 제시되어 있다. 또한 조선 시대 수학자 최석정의 『구수략』 에는 지수귀문도(地數龜文圖)라는 독창적이고 아름다운 수배열이 제시되어 있다. 이밖에도 원 모양의 마방진, 별 모양의 마방진 등 다양한 마방진이 존재한다. 본고에서는 이러한 정사각형 형태가 아닌 마방진을 소개하고 이들이 갖는 몇 가지 성질과 이에 대한 활용 방법을 제시하였다.

I. 시작하며

대부분의 수학 학습은 규칙과 관련된다. 어떤 규칙에 따라 수나 식 또는 도형의 개념이 형성되기도 하고 또 그에 따라 분류하기도 한다. 수학 내에서 뿐만 아니라 자연 현상 가운데서 발견되는 규칙을 수학적으로 표현하기도 하며, 서로 관련이 없어 보이는 대상 사이의 규칙성이 발견되어 놀라움과 아름다움을 느끼는 경우도 많다. 이처럼 수학 자체의 발달뿐만 아니라 수학의 학습에서 가장 중요한 요소 중의 하나는 결국 관찰되는 현상에서 어떤 규칙성을 발견하고 이를 체계적으로 정리하는 활동이라고 할 수 있다. 수학과 교육과정(2007)에서도 "수학의 교수・학습에서 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다."라고 제시하고 있는데, 결국 수학적인 해석과 조직, 구체에서 추상으로의 점진적 이해, 통찰과 같은 수학적 경험의 이면에는 모두 규칙에 대한 탐구가 바탕이 된다고 할 수 있다.

수학적 사고력의 신장을 위한 수업은 모든 교사나 연구자들이 바라는 바이다. 그러면 어떻게 학생들로 하여금 규칙의 탐구나 체계화와 같은 활동으로 적극적으로 이끌 수 있는가? 여러 가지가 필요하겠지만 그중 하나는 학생들의 호기심을 자극하고 도전하게끔 하는 문제 또는 자료일 것이다. 이러

---

* 접수일(2009년 12월 11일), 심사(수정)일(1차: 2010년 1월 8일, 2차: 1월 25일), 게재확정일자(2010년 2월 9일)
* ZDM 분류 : A30
* MSC2000 분류 : 97-03
* 주제어 : 정사각형 형태가 아닌 마방진, 원진, 성진, 지수귀문도, 최석정

한 자료는 정형화된 형태이어서는 안 될 것이다.

비록 마방진이라는 소재 역시 이미 많은 연구가 진행되었으며, 관련 도서나 활동 자료로서 개발된 자료가 많지만 대부분 자료들이 정사각형 형태의 마방진을 중심으로 하고 있다. 동양 산학서를 찾아보면 중국 양휘의 『양휘산법』 이나 정대위의 『산법통종』, 그리고 조선시대 수학자 최석정의 『구수략』, 메이지유신 이전 일본 제1의 수학자라고 일컬어지는 세키타카카즈(關孝和, 1642~1708)의 『발미산법(發微算法)』 에도 마방진에 대한 연구가 포함되어 있다(장혜원, 2006). 본고에서는 이러한 산학서에 제시되어 있는 정사각형 형태가 아닌 다양한 형태의 마방진 중에서 취오도(聚五圖)와 취육도(聚六圖), 취팔도(聚八圖), 찬구도(攢九圖), 팔진도(八陣圖), 연환도(連環圖), 지수귀문도(地數龜文圖)를 중심으로 이러한 마방진이 가지는 몇 가지 성질과 이에 대한 활용 방법을 제시해 보고자 한다.

Ⅱ. 선행 연구의 고찰

마방진과 관련된 연구와 직접적인 관련이 있는 연구는 크게 두 부류이다. 첫째는 마방진의 성질을 제시하는 연구이며, 둘째는 마방진을 이용한 학습 자료로 개발과 적용에 관한 연구이다.

1. 마방진의 성질을 제시한 연구

마방진의 성질을 연구한 논문으로는 이진경(2004), 최준승(2005), 최현(2007)의 연구가 있다. 이진경(2004)은 마방진은 학생들에게 흥미와 호기심, 창의력을 유발시켜 수학에 관심을 갖게 하여 수학에 좀 더 친밀하게 접근할 수 있을 것이라는 가정에서 출발하여 마방진의 역사적 배경과 교과서에 나오는 마방진을 살펴보았으며, 일반적으로 마방진을 만드는 방법과 별 모양의 방진(성진)을 제시하고 있다. 이 논문에서는 3×3 마방진과 4×4 차 마방진, 6×6 마방진과 같이 정사각형 모양의 마방진을 만드는 방법을 제시하고 있다. 또한 연립방정식을 이용하여 1에서 10까지의 숫자를 오각별에 넣어서 별 모양의 성진을 만들 수 없음과 1에서 14까지의 숫자를 이용하여 칠각별 형태의 성진을 만들 수 있음을 설명하고 있다.

최준승(2005)도 역시 마방진에 대한 연구에서 정사각형 모양의 마방진의 종류와 한 변의 칸의 수가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 마방진의 작성법을 설명하고 있으며, 별 모양의 방진으로 5각과 6각, 8각의 형태를 갖는 성진을 한 가지씩 제시하였고 각 성진이 가지는 마법의 수를 계산하여 제시하고 있다. 또한 동심원 방진, 즉 각 동심원 상의 숫자들의 합이 일정한 마방진을 제시하고 있는데 중심에 올 수 있는 숫자가 다양함에도 한 가지 경우 만을 예로 제시하여 원주 위의 숫자의 합과 지름에 있는 숫자의 합이 일정하다는 성질만을 제시하고 있다.

최현(2007)의 경우는 기존의 연구들이 1 에서 n^2 까지의 수를 이용하여 마방진을 완성하였음을 지적하고 마방진을 새롭게 해석하여 마방진에 들어가는 수가 어떤 수이든 상관없는 것으로 해석하고

이러한 성질을 적용하여 새로운 배열의 마방진을 제시하였다. 특히, 이 논문에서는 등차수열을 만족하는 수를 이용하여 마방진을 완성하였는데, 들어가는 수를 다양화하기 위하여 하나의 등차수열을 사용하지 않고, 공차는 일정하지만 초항을 임의로 선택하여 여러 개의 등차수열이 결합된 일반화된 등차수열을 이용하여 마방진을 제시하였다. 최현의 연구는 기존의 연구와는 달리, 마방진에 들어가는 숫자의 조건을 바꿈으로서 새로운 마방진의 존재와 작성 가능성에 대하여 연구한 것으로 의미가 있다고 볼 수 있다.

마방진의 성질을 제시한 이러한 연구들을 보면, 주로 정사각형 형태의 마방진에 대해서만 다루고 있으며 원모양이나 별 모양의 마방진의 경우는 가장 간단한 성질인 일정한 합을 제시하고 이름을 소개하는 수준에 머물고 있다.

2. 마방진을 이용한 학습 자료로 개발과 적용에 관한 연구

마방진과 관련된 두 번째 유형의 연구는 마방진을 이용하여 학습 자료를 개발하거나 또는 이를 적용하여 교육적인 효과를 검증한 연구들이다. 이러한 연구는 주로 창의력의 개발, 학습 흥미 유발을 위한 자료 개발, 수학사 학습 자료의 효과를 검증하는 연구에서 마방진을 여러 자료들 중 하나로 제시하였다. 이의태(2006)는 고등학교 이산수학의 선택과 배열단원에 도입할 수 있는 수학사 소재로 '마방진'을 제시하고 이를 활용한 탐구활동 자료를 제시하였다. 개발된 자료는 고등학교 수준에서 개발된 자료이나 단순히 3차와 4차 마방진에서 몇 개의 칸을 비우고 그 칸에 들어갈 수 있는 숫자를 찾는 문제를 제시하고 있다. 이는 마방진의 작성법을 이용하거나 간단한 덧셈 계산으로 해결할 수 있는 수준의 문제라는 점이 아쉽다.

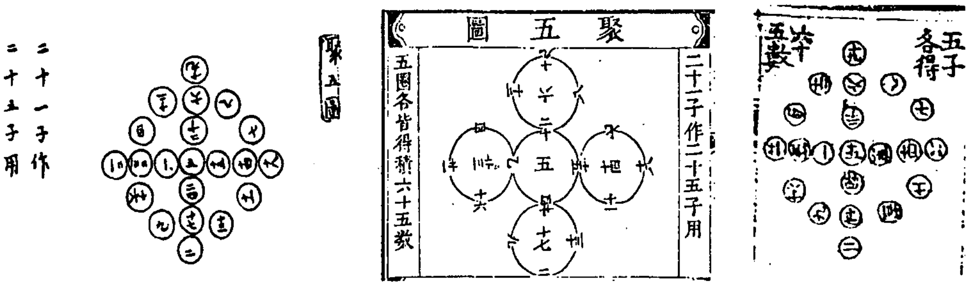
안희정(2007)은 수학사를 활용한 수업이 학생들의 학습 흥미 유발에 미치는 영향을 조사하였는데, 마방진을 이용한 학습 지도안을 제시하고 이를 활용한 수업을 실시한 후 수학사를 활용한 수업에 대한 학생들의 반응을 분석하고 있다. 이 연구에 따르면 학생들은 수학사 자료를 활용한 수업을 통해 우월감, 자신감, 흥미도에서 높은 변화를 보였다고 제시하고 있다. 이외에도 박혜영(2006), 유난희(2007)의 논문에서 수학학습에서 활용할 수 있는 수학사 자료로 마방진에 대하여 다루고 있으나 단순히 마방진의 역사와 정사각형 모양의 3차, 4차 마방진을 제시하는 데에서 그치고 있다.

이처럼 마방진에 대한 연구와 마방진을 활용한 학습 자료의 개발과 효과를 분석하는 연구는 많지만 대부분의 연구가 정사각형 모양의 3×3, 4×4, 5×5 의 마방진의 성질과 작성법을 중심으로 하고 있으며 정사각형 모양이 아닌 마방진에 대한 연구는 한 가지 경우를 예로 제시하여 일정한 합을 제시하는 수준에 머문 연구가 많다. 이러한 면에서 중국과 조선의 산학서에서 제시되고 있는 정사각형 형태가 아닌 마방진과 그 성질을 체계적으로 탐구해 보는 것은 의미가 있다고 생각된다.

Ⅲ. 정사각형 형태가 아닌 마방진과 그 성질

1. 취오도(聚五圖)

양휘산법, 산법통종, 구수략에 제시되어 있는 취오도는 아래의 <그림 1>과 같다. 취오도는 1에서 24까지 숫자 중에서 3, 10, 22를 제외한 21개의 숫자를 사용한 배열이다. 합을 계산할 때 21개의 숫자가 25개의 역할을 한다. 즉, 5, 6, 23, 17, 14를 중심으로 하는 5개의 원을 생각하면 20, 1, 24, 15는 두 번씩 사용한다.



(a) 양휘산법 (b) 산법통종 (c) 구수략

<그림 1> 취오도

<그림 2>를 모면 모두 7개의 원이 있다. 7개의 원에 포함된 5개의 수를 합하면 모두 65가 된다. 즉,

① $5+1+20+15+24=65$

② $5+23+6+14+17=65$

③ $5+21+19+18+2=65$

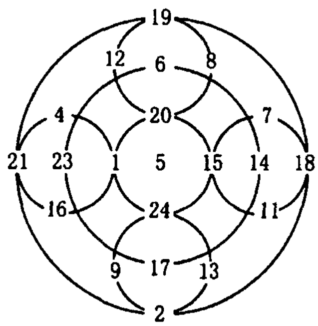
④ $6+12+19+8+20=65$

⑤ $14+15+7+18+11=65$

⑥ $17+9+24+13+2=65$

⑦ $23+21+4+1+16=65$

이다.

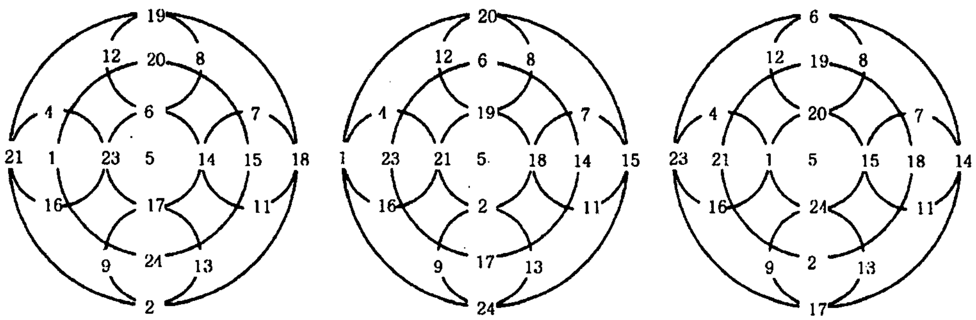


<그림 2> 취오도에서의 합 65
(중국수학사대계 5권, p.708)

이와 같이 취오도에서는 5개의 숫자의 합이 65가 되는 7가지 배열을 찾을 수 있다.

또한 5를 중심으로 하는 세 개의 동심원을 보면 모두 그 합이 65이므로, 위치를 바꾸어도 그 합은 변하지 않는다. 즉, 가장 안쪽의 첫 번째 원과 두 번째 원에서 대응되는 숫자의 위치를 바꾸는 경우, 마찬가지로 첫째와 셋째 원, 둘째와 셋째 원의 숫자를 바꾸는 경우 그 합은 65로 일정하다. 이러한 교환에 의하면 다음 <그림 3>과 같이 5개씩 숫자의 묶음(5,614,17,23; 15,7,18,11,14; 24,17,13,2,9;

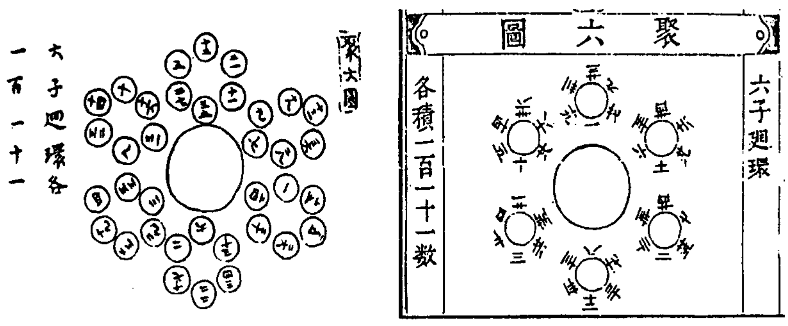
1,4,23,16,21; 20,19,8,6,12)은 일정하면서 작은 각각의 원의 배열이 조금씩 다른 3개의 취오도를 얻을 수 있다[1].



<그림 3> 배열이 다른 취오도

2. 취육도(聚六圖)

취육도는 1에서 36개까지 36개의 숫자를 사용한다. 최석정의 『구수략』 에는 취육도가 제시되어 있지 않지만, 『양휘산법』 과 『산법통종』 에는 취육도가 제시되어 있다. 『양휘산법』 과 『산법통종』 에 있는 취육도는 다음 <그림 4>와 같다.



(a) 양휘산법 (b) 산법통종

<그림 4> 취육도

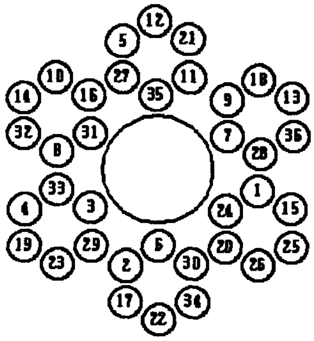
<그림 4>의 양휘산법의 취육도를 아라비아 숫자로 바꾸어 보면 다음 <그림 5>와 같다. 여기서 중앙의 원을 둘러싸고 있는 작은 원들의 무리를 6개씩 모으면 숫자의 합이 111이 된다. 그런데 여기

---

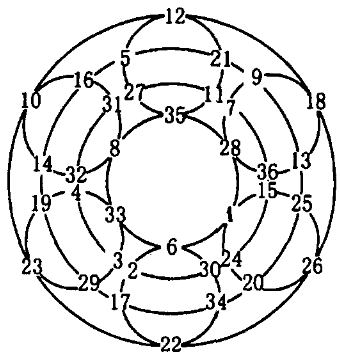
1) 두 개의 n^2 차 마방진의 경우에는 회전이나 반사에 의해 서로 같지 않을 때, 그 두 개의 마방진을 서로 다른 마방진이라고 하는데, 취오도와 같은 경우에는 어떤 경우에 서로 다른 마방진이라고 할 수 있는지 생각해 볼 필요가 있다.

서 몇 개의 숫자의 위치를 바꾸면 <그림 6>과 같이 6개의 숫자의 합이 111이 되는 것이 8개가 되며, 또한 중간에 있는 12개의 숫자의 합은 222가 된다.

즉, <그림 5>에서 31을 포함한 6개의 숫자(31, 8, 32, 14, 10, 16)로 구성된 원과 24를 포함한 원(24, 1, 15, 5, 26, 20)의 경우에 반시계 방향으로 1회전 하여 중앙에서 가장 가까운 숫자가 각각 8과 1이 되게 한다. 또, 7을 포함한 원(7, 9, 18, 13, 36, 28)과 3을 포함한 원(3, 29, 23, 19, 4, 33)의 경우에는 시계방향으로 1회전 하여 중앙에서 가장 가까운 숫자가 각각 28과 33이 되도록 하면 아래와 같이 <그림 6>과 같이 된다.



<그림 5> 양휘산법, 취육도



<그림 6> 취육도에서의 합 111
(중국수학사대계 5권, p.709)

<그림 6> 을 보면 모두 10개의 원이 있다. 이중 8개의 원에 포함된 6개의 수를 합하면 모두 111이 된다. 즉,

① $35+28+1+6+33+8=111$
② $12+18+26+22+23+10=111$
③ $35+27+5+12+21+11=111$
④ $28+7+9+18+13+36=111$
⑤ $1+15+25+26+20+24=111$
⑥ $6+30+34+22+17+2=111$
⑦ $33+3+29+23+19+4=111$
⑧ $8+32+14+10+16+31=111$

그리고, 중간에 있는 두 개의 원에 포함된 12개의 수들의 합은 222가 된다.

$$27+11+7+36+15+24+30+2+3+4+32+31=222$$
$$5+21+9+13+25+20+34+17+29+19+14+16=222$$

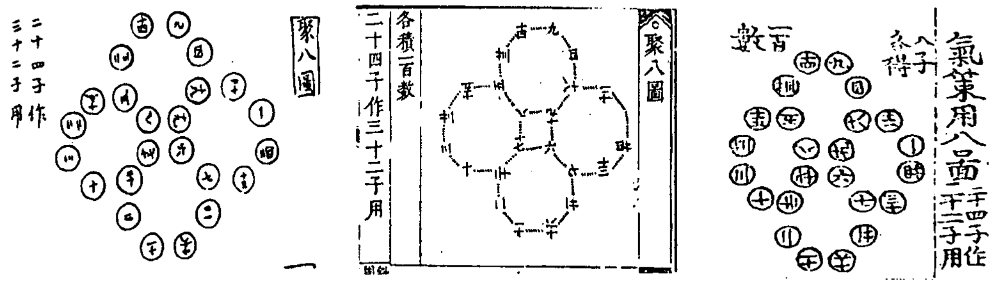
가 된다.

또한, <그림 6>과 같이 배열된 수를 대칭의 위치에 있는 수들끼리 적당하게 6개씩 모으면 그 합이 111이 되는 경우가 6가지가 더 존재한다. 즉,

⑨ $12+5+21+22+17+34=111$ ⑩ $35+27+11+6+30+2=111$
⑪ $8+31+32+1+24+15=111$ ⑫ $33+4+3+28+36+7=111$
⑬ $10+14+16+26+25+20=111$ ⑭ $23+29+19+18+9+13=111$

3. 취팔도(聚八圖)

『양휘산법』과 『산법통종』에서는 취팔도이며, 최석정의 『구수략』에서는 기책용팔도(氣策用八圖)라는 이름으로 불린다. 취팔도는 <그림 7>과 같이 1부터 24까지 24개의 숫자로 이루어져 있으며 변을 공유하는 네 개의 팔각형 모양으로 구성되어 있다. 합을 계산하는 경우는 32개의 숫자의 역할을 하는데, 5, 8; 20, 17; 6, 7; 18, 19 가 겹쳐서 2번씩 사용하게 된다.



(a) 양휘산법 (b) 산법통종 (c) 기책용팔도

<그림 7> 취팔도와 기책용팔도

이름과 같이 8개의 숫자를 선택해서 숫자의 합이 100이 되는 경우를 찾아보자.

① $9+4+18+19+8+5+23+14=100$

② $1+24+13+7+6+19+18+12=100$

③ $6+7+21+16+11+2+20+17=100$

④ $5+8+17+20+10+3+22+15=100$

⑤ $4+12+13+21+2+10+15+23=100$

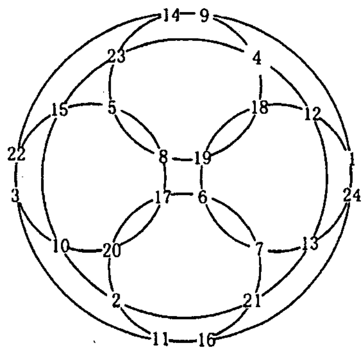
⑥ $9+1+24+16+11+3+22+14=100$

이밖에도 중앙에 있는 8개의 숫자의 합도 역시 100이며, 취육도와 마찬가지로 서로 대칭인 위치에 있는 4개씩의 숫자의 합 역시 100이 된다.

⑦ $8+19+6+17+5+18+7+20=100$

⑧ $14+9+23+4+11+16+2+21=100$

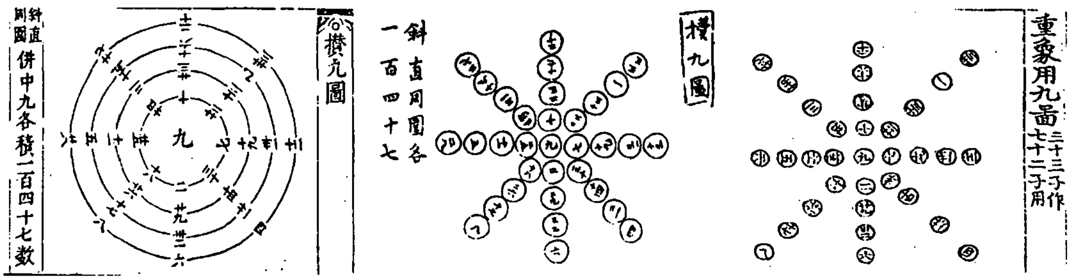
⑨ $12+1+24+13+15+22+3+10=100$



<그림 8> 취팔도에서의 합 100

4. 찬구도(攢九圖)[2]

『양휘산법』과 『산법통종』에서는 찬구도이며, 최석정의 『구수략』에서는 중상용구도(重象用九圖)라는 이름으로 불린다. 찬구도는 <그림 9>와 같이 1부터 33까지 33개의 숫자를 이용한 수배열로 직선으로 연결되는 9개의 숫자의 합과 9를 중심으로 한 동심원 상에 있는 8개의 숫자와 9의 합이 모두 147이다.



(a) 양휘산법 (b) 산법통종 (c) 구수략

<그림 9> 찬구도와 중상용구도

이름과 같이 9개의 숫자를 한데 모아서 합이 147이 되는 경우를 찾아보면, <그림 10>과 같이 모두 8가지가 있다.

먼저 직선 방향으로 수를 모으면,

① $20+16+23+10+9+2+29+32+6=147$

② $33+1+13+22+9+18+26+17+8=147$

③ $12+31+19+7+9+25+11+5+28=147$

④ $4+21+14+30+9+24+3+15+27=147$

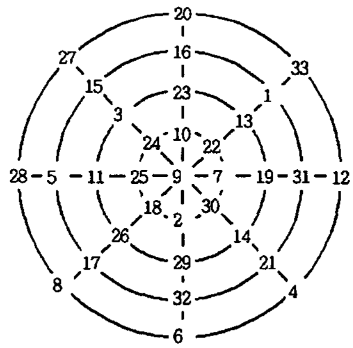
두 번째로 원 방향으로 수를 모으면

⑤ $20+33+12+4+6+8+28+27+9=147$

⑥ $16+1+31+21+32+17+5+15+9=147$

⑦ $23+13+19+14+29+26+11+3+9=144$

⑧ $11+22+7+30+2+18+25+24+9=147$



<그림 10> 찬구도에서의 합 147

또한 찬구도는 가운데 있는 9를 중심으로 대칭의 위치에 있는 4개의 수들이 합이 69로 모두 같다. 이를 달리 생각해보면, 직선 방향으로의 합이 같아야 하므로 사용된 모든 수의 합인 561에서 중앙의 9를 빼면 552가 된다. 9를 지나는 4개의 직선 방향의 수의 합이 같아야 하므로 각각의 직선 위에 있는 수의 합은 138이다.

9의 한쪽 직선에 있는 4개의 수의 합이 69가 되어야 하는데, 69를 34와 35의 합으로 생각하면 다

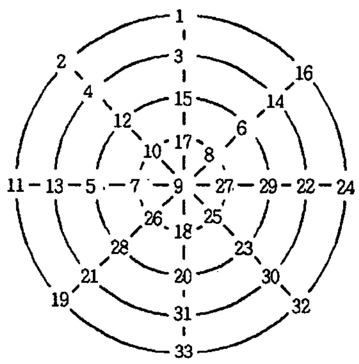
2) 攢 은 扌(手, 손)+贊(=全, 갖추어지다)의 뜻으로 "한데 모으다"는 뜻이다.

음과 같이 합이 34가 되는 수 결합 8가지와 합이 35가 되는 수 결합 8가지를 생각할 수 있고, 각각을 한번씩 더하면 69가 되는 8가지 결합을 찾을 수 있다.

<표 1 > 중앙의 수가 9인 경우: 합이 34와 35가 되는 수 결합

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
33	32	31	30	29	28	27	26	*	25	24	23	22	21	20	19	18
34	34	34	34	34	34	34	34	9	35	35	35	35	35	35	35	35

34와 35가 직선 방향으로 두 번씩, 동심원 방향으로 두 번씩 나오게 하면 <그림 11>과 같은 새로운 배열의 찬구도를 얻을 수 있다. 하지만 이러한 배열의 찬구도는 9를 중심으로 대칭 위치에 있는 4개의 수의 합이 69로 일정하게 나타나지는 않는다.



<그림 11> 찬구도 2

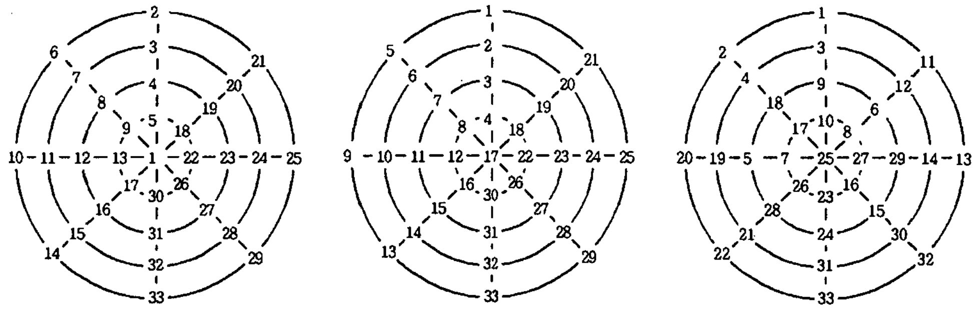
또 다른 성질을 생각해보면, 『양휘산법』과 『산법통종』의 찬구도는 중앙의 숫자가 9이다. 그러나 위에서 새로운 배열을 찾는 방법을 다시 살펴보면, 중앙의 숫자가 반드시 9일 필요는 없다. 예를 들어, 중앙의 숫자가 1이라고 하면, 나머지 숫자의 합은 560이 되고, 직선방향으로 8개씩의 숫자의 합은 70이 되어야 한다. 그러므로, 대칭의 위치에 있는 4개의 숫자들의 합이 35가 되도록 결합을 생각하면 된다.

<표 1>을 만든 방법을 다시 고려하면, 다음과 같은 <표 2>를 만들 수 있다. <표 2>의 수 결합을 적절하게 배열하면 <그림 12>의 (a)와 같은 찬구도를 얻을 수 있다.

<표 2> 중앙의 수가 1인 경우: 합이 35가 되는 수 결합

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
*	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
중앙	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

중앙에 올 수 있는 수에 대하여 같은 방법으로 가능한 경우를 모두 생각해보면, 다음과 같은 <표 3>을 얻을 수 있고, 중앙의 값이 17인 경우와 25인 경우에 대하여 <그림 12>의 (b), (c)와 같은 새로운 찬구도를 얻을 수 있다.



(a) 중앙 1 (b) 중앙 17 (c) 중앙 25

<그림 12> 중앙의 수가 다른 찬구도

<표 3> 찬구도에서 중앙에 올 수 있는 수와 찬구도 구성 가능성

중앙의 수	중앙을 제외한 직선 방향의 8개의 수의 합	수 결합	찬구도 구성 가능성
1	560 ÷ 4 = 140, 140 = 70+70	35, 35, 35, 35	○
3	558 ÷ 4 = 139.5		×
5	556 ÷ 4 = 139, 139 = 70+69	35, 35, 35, 34	×
7	554 ÷ 4 = 138.5		×
9	552 ÷ 4 = 138, 138 = 69+69	34, 35, 34, 35	○
11	550 ÷ 4 = 137.5		×
13	548 ÷ 4 = 137, 137 = 69+68	35, 34, 34, 34	×
15	546 ÷ 4 = 136.5		×
17	136 = 68+68	34, 34, 34, 34	○
···	···	···	
25	134 = 67+67	33, 34, 33, 34	○

<표 4> 중앙의 수가 17 인 경우 : 합이 34가 되는 수 결합

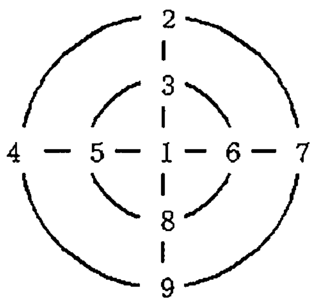
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	*
34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	중앙

<표 5> 중앙의 수가 25 인 경우 : 합이 34와 33이 되는 수 결합

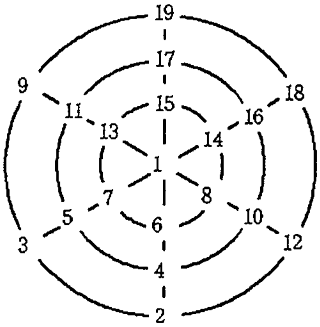
1	2	3	4	5	6	7	8	*	9	10	11	12	13	14	15	16
33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
34	34	34	34	34	34	34	34	중앙	33	33	33	33	33	33	33	33

찬구도를 보면 지름방향과 원주 방향으로 모두 9개의 숫자로 구성된다. 그렇다면 각각의 방향으로 5개, 7개, 9개, 11개··· 인 경우를 생각해볼 수 있다. 몇 가지 경우를 살펴보면 다음과 같다. <그림 13>은 중앙의 값을 1로 하고, 가로와 세로의 지름방향과 동심원 방향(중심 포함)에 모두 5개의 수가 존재하는 경우이다. 가로, 세로, 원주 방향으로 5개의 수의 합이 모두 23이 된다. 『구수략』 에서는

중앙의 수가 5인 경우가 제시되어 있으며 이를 범수용오도(範數用五圖)라고 부르고 있다. 마찬가지로 <그림 14>의 경우에는 가로, 세로, 동심원 방향에 모두 7개의 수가 있으며 이들의 합은 모두 64이다. 『구수략』에서는 중앙의 수가 7인 경우가 제시되어 있으며 장책용칠도(章策用七圖)라고 부르고 있다. 이러한 범수용오도와 장책용칠도의 경우도 앞서 살펴본 찬구도의 구성 방법을 적용하여 쉽게 다양한 배열을 구성할 수 있다.



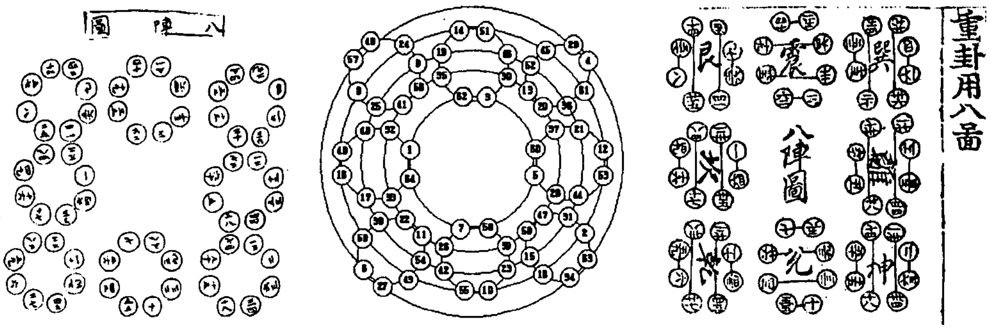
<그림 13> 범수용오도 (중앙 1)



<그림 14> 장책용칠도 (중앙 1)

5. 팔진도(八陣圖)

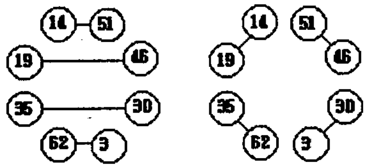
『양휘산법』과 『산법통종』에서는 팔진도이며, 최석정의 『구수략』에서는 중괘용팔도(重卦用八圖)라는 이름으로 불린다. 팔진도는 <그림 15>의 (a)와 같이 1부터 64까지 64개의 숫자로 이루어져 있다. 8개씩 원형 형태로 무리를 짓고 있으며 이들 8개 각각의 수의 합은 260이다.



(a) 양휘산법 (b) 팔진도의 수의 합 (c) 구수략

<그림 15> 팔진도와 중괘용팔도

『양휘산법』의 원형 형태로 8개의 숫자를 보면 <그림 16>과 같은 규칙이 있음을 알 수 있다.



(a) 합 65 (b) 합 33과 97

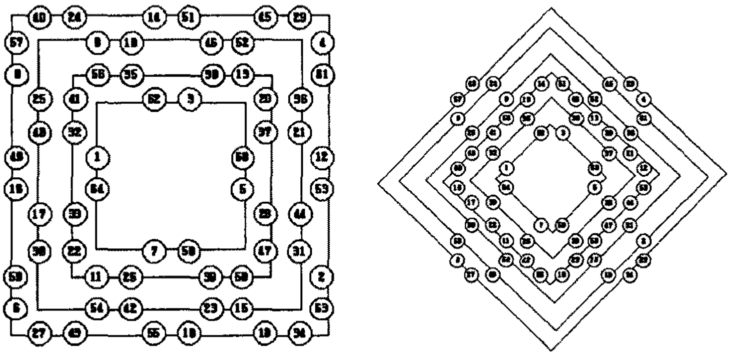
<그림 16> 팔진도 8숫자의 합

즉, <그림 16>의 (a)와 같이 그 합이 65가 되는 네 쌍의 수들로 이루어졌다고 생각할 수도 있고 (b)와 같이 33 두 쌍과 97 두 쌍으로 이루어졌다고 생각할 수 있다. 어떤 경우이든 이들의 합은 260 이다. 이 사실을 이용하면 팔진도에서 8개씩 무리를 짓고 있는 수들의 합뿐만 아니라 다양한 형태의 합을 <그림 15>의 (b)와 같이 생각해볼 수 있다. 즉, 숫자들을 중심으로 같은 거리에 있는 것들끼리 모아 동심원을 만들어 보면 반지름이 작은 순으로 각각 8, 16, 16, 16, 8 개의 숫자들로 이루어져 있으며, 이들의 합은 각각 260, 520, 520, 520, 260 이다. 또한 숫자들을 정사각형 모양으로 모아보면 <그림 17>의 (a)와 같이 8, 16, 16, 24 의 숫자로 이루어지고 그 합은 260, 520, 520, 780이 된다. 마찬가지로 (b)에서는 숫자의 개수는 8, 8, 24, 8, 8, 8개이며 합은 각각 260, 260, 780, 260, 260 이 된다.

또한 <그림 16>의 (a)와 같이 8개씩 원형 형태의 두 수의 합이 65인 4개의 쌍으로 이루어져 있다는 사실을 이용하여 팔진도의 배치를 변화시킬 수 있다. 즉, <그림 15>의 (b)에서 꼭짓점 위치에 있는 8개의 숫자들의 위치를 회전시키면 <그림 18>의 (a)과 같이 동심원 상에 그 합이 모두 65인 쌍들로 짝지을 수 있다. 합이 65인 쌍들로 이루어졌다는 사실을 이용하면 <그림 18>의 (b)와 같이 간단하게 팔진도를 구성할 수 있다. 1부터 32까지 숫자들을 먼저 팔진도에 그림과 같이 배열한 후, <그림 16>의 (a)와 같이 합이 65가 되도록 33부터 64까지 수를 배치하면 팔진도를 만들 수 있다.

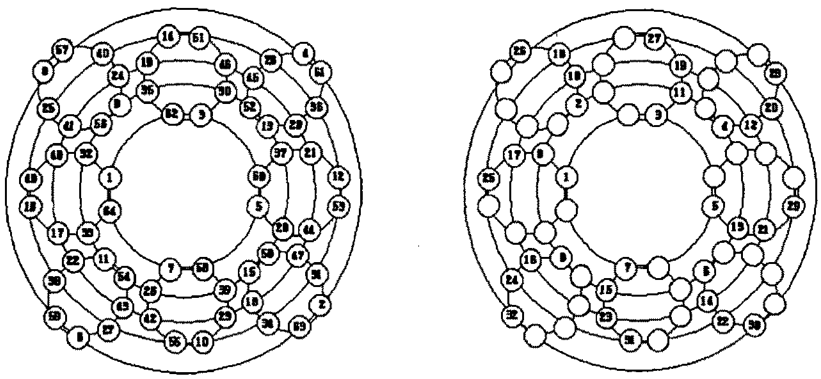
6. 연환도(連環圖)

「양휘산법」과 「산법통종」에서는 연환도이며, 최석정의 「구수략」에서는 후책용구도(候策用九圖)라는 이름으로 불린다. 「양휘산법」의 연환도는 <그림 19>와 같이 1부터 72까지 숫자로 이루어져 있다. 8개씩 원형 형태로 무리를 짓고 있으며 이들 8개 각각의 수의 합은 292이다. 또한 41, 34, 31, 40 과 같이 정사각형 모양의 네 수의 합은 146이 된다.



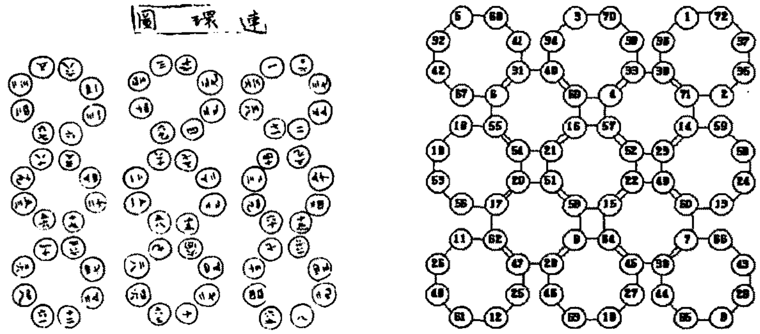
(a) (b)

<그림 17> 정사각형 모양의 합 260



(a) (b)

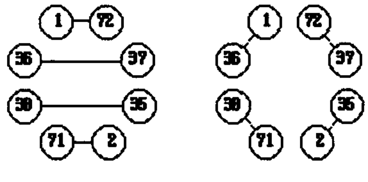
<그림 18> 팔진도의 합 65와 이를 이용한 팔진도 만들기



(a) 양휘산법의 연환도 (b) 연환도에서의 합 292

<그림 19> 양휘산법의 연환도와 그 합 292

또한 팔진도와 마찬가지로 팔진도의 중심을 기준으로 동심원을 그리면 동심원 상에 있는 8개의 숫자가 있는 경우 그 수들의 합은 292가 된다. 수의 위치를 조금 바꾸어 동심원 상에 있는 두 수의 짝이 항상 73이 되도록 배치할 수 있다. 앞서 살펴본 팔진도에서 합이 65와 33, 97이 되는 짝을 지을 수 있는 것과 같이 연환도의 경우는 <그림 20>의 (a)와 같이 합이 73이 되도록 짝을 지을 수 있으며, 또한 (b)와 같이 37과 109가 되도록 짝을 지을 수 있다. 두 경우 모두 수의 합은 292가 된다.

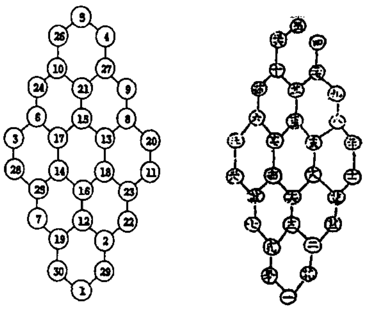


(a) 합 73 (b) 합 37과 109

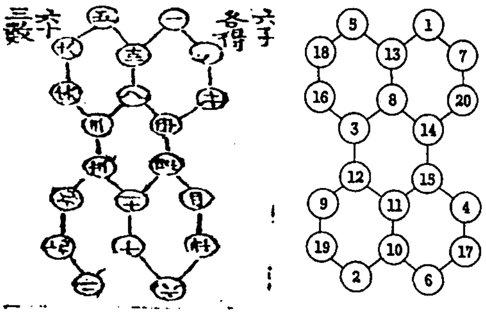
<그림 20> 연환도 8숫자의 합

7. 지수귀문도(地數龜文圖)

지수귀문도는 조선시대 수학자인 최석정의 저서인『구수략』에 제시되어 있는데, <그림 21>과 같이 1부터 30까지의 수를 변을 공유하는 육각형으로 배열한 것이다.



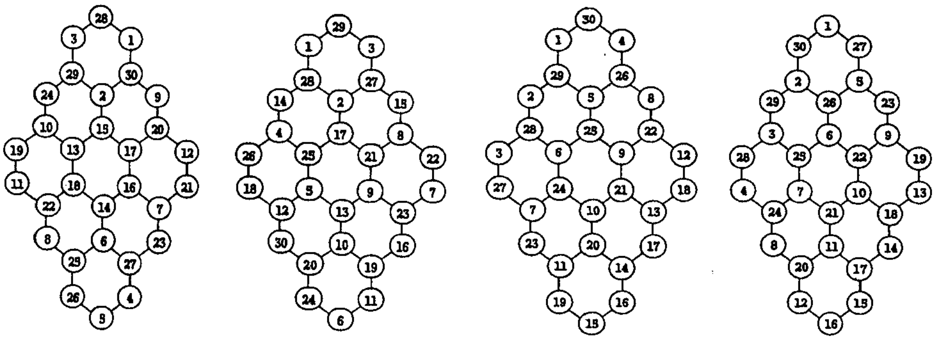
<그림 21> 지수귀문도



<그림 22> 지수용육도

모두 9개의 무리로 나눌 수 있는데 각 무리에 있는 여섯 개의 수의 합은 항상 93이다. 최석정의『구수략』에는 지수귀문도와 유사하게 변을 공유하는 육각형으로 수를 배열한 것으로 <그림 22>와 같은 지수용육도(地數用六圖)가 제시되어 있다. 지수용육도는 1에서 20까지의 수를 사용하며 육각형 모양의 각 무리의 수의 합은 63이다.

지수귀문도와 동일한 형태이면서 여섯 수의 합이 93이 아닌 배열이 있다. 김동진 · 오영환(1989)은 6수의 합이 77, 78, 79, 80, 91, 92, 93, 94, 105, 106, 107, 108이 되는 지수귀문도를 제시(부록 1)하였으며 이론적으로 육각형 내의 꼭짓점의 합이 최소 76에서 최대 110까지 존재할 수 있음을 보였다. 이들이 만든 알고리즘에 따르면 전체 지수귀문도의 해는 10^8 개 정도라고 제시하였다. 이밖에도 <그림 23>과 같이 발견자의 이름을 따서 부르는 지수귀문도가 있다.

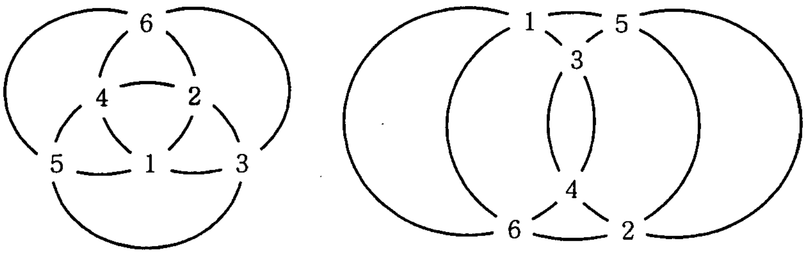


6개 수의 합 : 93	90	95	91
발견자 : 지용기	김용수	이지원	이지원

<그림 23> 다양한 지수귀문도의 수 배열 .

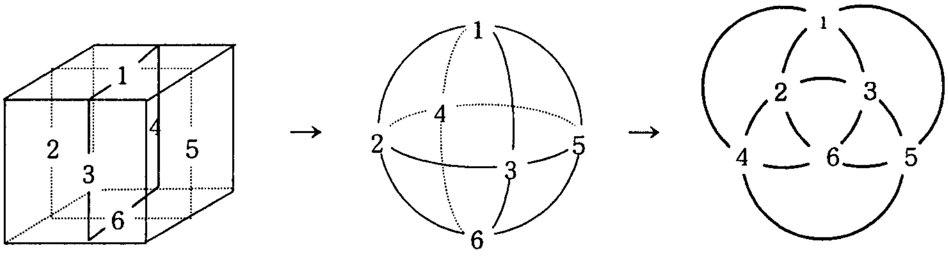
8. 원 모양의 배열 : 원진(圓陣)

원 모양으로 수 배열로 같은 원주위에 있는 수들의 합이 일정한 원진 형태의 수 배열을 소개한다.



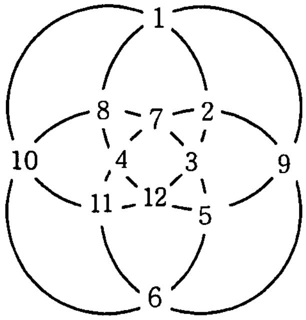
<그림 24> 3개의 원으로 이루어진 원진

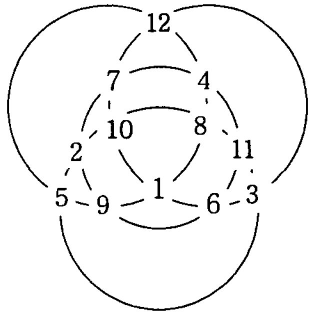
<그림 24>는 3개의 원위에 있는 4개의 숫자의 합이 모두 14로 일정하다. 특히 두 원진에서 (1, 6), (2, 5), (3, 4)의 짝은 주사위의 숫자배열과 일치한다. 즉, 주사위의 면을 점으로 바꾸어 표현하면 다음과 같이 생각해볼 수 있다.



<그림 25> 주사위에서 원진의 구성

4개의 원으로 이루어진 원진은 다음과 같이 두 가지를 생각해볼 수 있다. 1부터 12까지 12개의 숫자로 구성된다. 4개의 원은 각각 6개의 숫자를 포함하며 6개의 숫자의 합은 39이다. 두 수의 합이 13이 되는 경우를 찾아 이들이 각각 두 개의 원에 포함되도록 배치하였다.





<그림 26> 4개의 원으로 이루어진 원진

이밖에도 여러 가지 원진이 존재한다. 이외의 원진과 별 모양의 마방진에 대해서는 <부록 2>와 <부록 3>에서 제시하였다.

Ⅳ. 수학 학습에서 마방진의 활용 방안

앞서 살펴보았듯이 기존의 연구에서는 주로 정사각형 형태의 마방진의 개념과 작성방법을 소개하고 가로, 세로, 대각선의 수의 합이 일정하다는 성질을 제시하는데 그치고 있다. 여기서는 먼저 앞서 살펴본 최현(2007)의 연구에서 제시된 내용을 바탕으로 다양한 정사각형 모양의 마방진을 구성하는 활동을 생각해 보았다. 또한 정사각형 형태가 아닌 마방진의 경우에는 취오도와 찬구도의 경우에 두 마방진이 가지는 여러 가지 성질을 탐구할 수 있도록 문제를 구성해 보았다.

1. 다양한 숫자를 활용한 마방진

기존의 연구들이 1 에서 n^2 까지의 수를 이용하여 마방진을 완성시켰다는 제한을 제외시키면 다음과 같이 음수를 포함하는 마방진을 생각할 수 있다. 즉, 3×3 마방진의 경우에 기존에는 1 에서 9 까지 수를 활용하였다. <그림 27>과 같이 연속한 9 개의 숫자를 -4 에서 4 까지의 수, -2 에서 6 까지의 수를 선택하여 3×3 마방진을 완성할 수 있다. 또한 공차가 일정한 9개의 수 즉, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 와 같은 9개 숫자를 이용하거나 $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$와 같은 유리수를 이용해서도 마방진을 구성할 수 있다.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

3	-4	1
-2	0	2
-1	4	-3

5	-2	3
0	2	4
1	6	-1

15	1	11
5	9	13
7	17	3

$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$

<그림 27> 다양한 수를 활용한 3×3 마방진

학생들은 주어진 숫자와 기본 3×3 사이의 차이점을 비교하면서 스스로 마방진을 구성하고, 두 마방진 사이에 존재하는 규칙성을 확인하고 설명하는 활동도 가능할 것이다. 이러한 규칙성과 숫자의 확장은 본고에서 살펴본 원진에서도 그대로 적용시킬 수 있다.

2. 취오도의 성질을 활용한 자료

본고에서 살펴본 정사각형 형태가 아닌 마방진 중에서 취오도와 찬구도를 활용하여 다음과 같은 탐구 자료를 생각할 수 있다.

다음 <그림 28>은 조선시대 산학서 중의 하나인『구수략』에 제시된 취오도이다. 취오도는 1에서 24까지 숫자 중에서 3, 10, 22를 제외한 21개의 숫자를 사용한 배열이다. 취오도의 성질을 알아보자.

1) 취오도에서 다음과 같은 수의 위치를 확인하고 그 합을 구하여라.

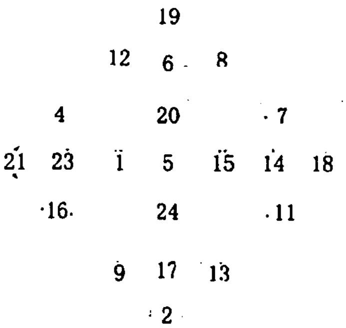
5, 19, 18, 2, 21

2) 앞서 찾은 합과 같게 되는 또 다른 다섯 개의 숫자를 찾아보아라. 모두 몇 개의 숫자 모둠을 찾을 수 있는가?

3) <그림 28>에서의 다음과 같이 수의 위치를 서로 바꾸고 다섯 개의 수의 합을 구하여 보아라.

$19 \leftrightarrow 6,\ 18 \leftrightarrow 14,\ 2 \leftrightarrow 17,\ 21 \leftrightarrow 23$

4) 또 다른 방법으로 수의 위치를 바꾸어 그 합이 일정하게 유지할 수 있겠는가? 그 방법을 설명해 보아라.



<그림 28> 취오도

3. 찬구도의 성질을 활용한 자료

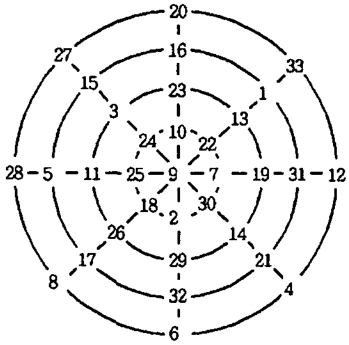
『양휘산법』과『산법통종』에서는 찬구도이며, 최석정의『구수략』에서는 중상용구도(重象用九圖)라는 이름으로 불린다. 찬구도는 <그림 29>와 같이 1부터 33까지 33개의 숫자를 이용한 수배열로 직선으로 연결되는 9개의 숫자의 합과 9를 중심으로 한 동심원 상에 있는 8개의 숫자와 9의 합이 모두 일정하다.

오른쪽 <그림 29>에 제시된 찬구도를 보고 물음에 답하여라.

1) 적당한 9개의 숫자를 선택하여 그 합을 구하여 보아라. 원주 위의 8개의 숫자와 중심에 있는 9의 합은 얼마인가? 또 9를 지나는 지름에 해당하는 9개의 숫자의 합은 얼마인가?

2) 한 동심원 상에 있는 8개의 숫자들을 다른 동심원 상에 있는 8개의 숫자와 위치를 바꾸면 그 합은 어떻게 되는가?

3) <그림 29> 찬구도의 경우는 중앙의 수가 9이다. 9 이외의 다른 수를 중앙에 놓고 각각의 경우에 찬구도를 만들어 보아라.



<그림 29> 찬구도

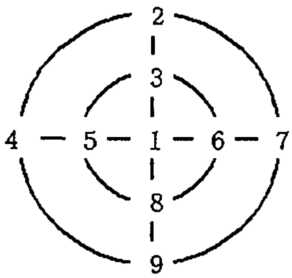
예를 들어, 중앙의 수가 1인 경우에 원주위의 수의 합, 지름에 해당하는 수의 합이 일정한 성질을 유지하도록 찬구도를 구성할 수 있는가?

4) 새로운 찬구도를 만드는 과정에서 좀더 쉽게 수를 배열하는 방법을 찾아보아라.

5) <그림 29> 찬구도의 경우에는 지름 방향, 원주 방향으로 모두 9개의 숫자의 합을 계산하였다. 지름 방향과 원주 방향에 놓인 숫자의 개수가 9개 아닌 경우는 가능하겠는가? 예를 들면, 중심을 포함한 원주 방향에 다섯 개의 수가 있으며 지름 방향에도 다섯 개의 수가 오도록 수를 배열 할 수 있겠는가? 7개가 오도록 배열 할 수 있겠는가?

6) 오른쪽 법수용오도는 중앙이 1인 경우이다. 1 이외의 다른 수를 중앙으로 하여 새로운 배열을 만들 수 있겠는가?

7) 3과 6의 위치를 바꾼 경우, 동일한 수의 합을 유지하기 위해서는 어떻게 하면 되겠는가?



<그림 30> 범수용오도

V. 마무리하며

마방진에서 보이는 규칙은 학생들에게 수학의 규칙성과 아름다움을 느끼게 해 줄 소재로서 이미 많이 소개되어 왔다. 그러나 주로 정사각형 형태의 방진 특히 3×3 형태의 마방진에 대한 자료가 주를 이룬다. 본고에서는 정사각형 형태가 아닌 마방진으로 동양산학서인 『양휘산법』, 『산법통종』, 『구수략』에 제시되어 있는 취오도, 취육도, 취팔도, 찬구도, 팔진도, 연환도를 비롯하여 최석정의 지수귀문도를 살펴보았으며 이들이 성질을 간략히 살펴보았다. 또한 부록에는 이외의 다양한 원진과 성진 자료를 첨부하였다.

본고에서는 정사각형 형태가 아닌 마방진의 다양한 성질들을 체계적으로 제시하고자 하였다. 이러한 성질을 활용하여 체계적인 학습 자료를 제작하고 그 효과를 검증하는 연구가 추가적으로 필요하

다. 이밖에도 앞으로 더 많은 연구가 필요한 부분을 중심으로 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 마방진을 n차 마방진의 가로, 세로의 합을 의미하는 마법의 상수를 기준으로 여러 가지로 분류하는데 이를 본고에서 살펴본 여러 가지 수배열에 적용시켜볼 필요가 있다. 마방진의 분류로 정규마방진[3], 준마방진[4], 대칭마방진[5], 완전마방진[6] 등을 생각할 수 있는데 앞서 살펴본 수배열이 어떻게 분류될 수 있을지 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해서는 가로, 세로, 대각선이라는 용어에 대한 재정의가 필요할 것이다. 이처럼 용어를 적절하게 정의하고 이에 따른 분류를 해보는 활동은 학생들에게도 매우 의미 있는 활동이 될 수 있을 것으로 보인다.

둘째, 학생들의 창의적인 사고력을 측정하거나 이러한 능력을 기를 수 있는 자료로 개발할 필요가 있다. 이러한 자료는 출발부터 결과까지 일직선적인 길을 따라가는 것보다는 다양한 시도를 요구하고 어떤 경우 막다른 골목에 다다르는 상황을 맞이하여 이러한 난관을 극복해야 하는 자료가 더욱 적절할 것이다. 기본적으로 마방진과 본고에서 다룬 다양한 수배열의 경우 가로, 세로, 대각선의 합이 일정하게 수를 배열한다는 아주 간단한 규칙 아래에서 다양한 유형의 배열이 가능하며 규칙에 맞는 배열을 찾기가 쉽지 많은 않다는 점에서 이러한 자료로 개발하기 위한 기본적인 조건은 만족하다고 볼 수 있다.

셋째, 마방진을 활용한 게임과 같은 흥미를 유발할 수 있는 자료 개발이 필요하다. 마방진과 유사한 수학 게임으로 스도쿠라는 게임이 있다. 스도쿠라는 게임이 간단한 규칙과 함께 다양한 난이도의 문제로 개발되어 수많은 사람이 즐겨하는 놀이가 되었다. 이러한 마방진과 스도쿠와 같은 수학 퍼즐을 해결하기 위해서는 복합적인 사고가 필요하며, 문제 자체에 조건이나 변수, 제한점 등이 많이 들어 있으므로 이러한 것들을 이해하는 과정에서 상당한 사고력이 필요하다. 또한 정형화된 수학 문제와는 달리 해결의 실마리가 명확하지 않은 경우가 많다. 이러한 특성을 활용할 수 있는 학습 자료 혹은 게임 형식의 자료를 개발하여 학생뿐만 아니라 일반인들도 함께 즐길 수 있는 자료로 개발할 필요가 있다.

넷째, 본고에서는 간단한 규칙을 조사하고 이를 제시하였을 뿐, 배열의 구성방법 등에 대한 엄밀한 의미의 증명이나 수학적인 설명은 시도하지 않았다. 정사각형 형태의 마방진에 대해서는 상대적으로 많은 연구가 진행되었으나 본고에서 다룬 다양한 수배열이 갖는 여러 성질에 대한 연구는 기본적인 성질을 제시하는 수준이다. 그러므로 수학적으로 좀더 엄밀한 분석과 증명을 통해 성질을 체계화하는 연구가 필요하다.

---

3) 마방진에 나타나는 n^2 개의 수가 1 부터 n^2 까지의 자연수일 때, 이를 정규(normal)마방진이라고 한다.

4) 마방진에서 각 행과 열에 나타난 수들의 합은 같지만 주 대각선 중 하나 또는 둘에 나타나는 수들의 합이 각 행과 열에 나타난 수들의 합과 다를 때 이를 준(semi)마방진이라고 한다.

5) 마방진의 중심에 대해 대칭인 위치에 있는 임의의 두 수의 합이 서로 같을 때, 이를 대칭(symmetric) 마방진이라고 한다.

6) 두 개의 주 대각선 위에 나타나는 수들의 합만이 아니라 모든 꺾인 대각선 위에 나타나는 수들의 합도 마법의 상수와 같을 때 이를 완전(perfect) 마방진이라고 한다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정[별책8]. 서울: 대한교과서주식회사.

김동진 · 오영환 (1989). 지수귀문도의 특성 및 해를 구하는 알고리즘. 한국정보과학회 봄 학술발표논문집 16(1). pp.405-408.

박혜영 (2006). 수학사를 활용한 고등학교 수업자료 연구. 서울시립대학교 교육대학원 석사학위 논문.

안희정 (2007). 수학학습에서 수학사의 활용을 통한 흥미유발이 학습에 미치는 영향. 관동대학교 교육대학원 석사학위 논문.

유난희 (2007). 수학사를 도입한 수학 학습 지도 자료 연구:10-가를 중심으로-. 우석대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이의태 (2006) 이산수학 지도의 수학사 활용에 대한 연구-고등학교 심화선택 과정 중심으로-. 경희대학교 교육대학원 석사학위 논문.

이진경 (2004). 마방진에 관한 연구. 충남대학교 교육대학원 석사학위 논문.

장혜원 (2006). 청소년을 위한 동양수학사. 서울: 두리미디어.

정해남 · 허민 옮김 (2003). 구수략. 서울: 교우사.

차종천 편 (2006). 양휘산법, 서울: 교우사.

최준승 (2005). 마방진에 관한 연구. 신라대학교 교육대학원 석사학위 논문.

최 현 (2007). 마방진의 새로운 해석과 해법. 한국외국어대학교 교육대학원 석사학위 논문.

C. A. Pickover (2003). *The zen of magic squares, circles, and stars*. NJ: Princeton University Press.

吳文俊 主編 (2000). 中國數學史大系 第五卷 兩宋. 北京: 北京師範大學出版社.

<고서자료>

한국수학사대계-수학편- : 구수략

중국과학기술전적통휘 : 양휘산법, 산법통종

A study on various non-regular magic squares

Lee, Kyung Eon
Graduate school of Korea National University of Education, Chungwongoon, Chungbook, 363-791
E-mail : earny0622@naver.com

The magic square is one of the number arrangements and the sums of each row, column, and diagonal are all equal. The meaning of "方" is "Square". If we don't consider the condition of 'square' then is it possible any number arrangement? There are many special number arrangements such as "magic five number circle(聚五圖)", "magic six number circle(聚六圖)", "magic eight number circle(聚八圖)", "magic nine number circle(攢九圖)", "magic eight camp circle(八陣圖)", "magic nine camp circle(連環圖)" in the ancient Chinese mathematics books such as 『杨辉算法』, 『算法统宗』. Also, there is a very special and beautiful number arrangement Jisuguimoondo(地數龜文圖) in the mathematics book 『Goosuryak(九數略)』 written by Choi suk jung(崔錫鼎) in the Joseon Dynasty. In this study, we introduce a various number arrangements and their properties.

* ZDM Classification : A30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-03
* Key Words : non-regular magic square, magic circle, magic star, Jisuguimoondo, Choi suk jung

<부록 1> 지수귀문도(김동진, 오영환)

19
24 25
4 3
28 2 27
6 26 9
20 11 10 22
23 5 8 21
12 17 7
29 1 30
13 14
18 16
15

합 = 77

23
24 25
3 2
27 1 30
16 26 4
21 5 15 19
22 8 11 20
6 13 9
29 10 28
12 7
18 17
14

합 = 78

17
18 14
11 12
28 8 26
6 5 9
24 22 20 21
25 2 4 23
1 27 3
30 7 29
13 10
19 16
15

합 = 80

5
22 23
24 10
1 7 11
27 28 17
3 4 18 15
25 26 13 16
6 2 12
29 20 30
8 14
9 21
19

합 = 91

4
8 27
24 3
1 26 28
20 2 15
10 19 18 16
21 9 14 17
13 30 12
29 6 7
5 23
11 25
22

합 = 92

5
6 25
27 26
1 4 2
21 28 16
11 12 17 15
20 19 14 18
10 3 13
29 24 30
8 9
7 23
22

합 = 93

4
6 28
26 5
1 25 29
21 3 15
10 18 17 16
22 12 14 19
11 30 13
24 8 2
9 27
7 23
20

합 = 94

7
22 24
13 9
2 30 6
29 15 25
10 16 20 4
5 17 19 11
28 18 26
3 27 1
12 14
21 23
8

합 = 105

6
7 8
28 27
2 30 3
17 5 20
13 24 21 18
23 14 16 19
15 26 12
4 22 1
25 29
9 11
10

합 = 106

6
7 8
30 29
1 27 4
25 5 18
15 19 24 17
14 21 16 20
13 22 12
2 26 3
23 28
9 11
10

합 = 107

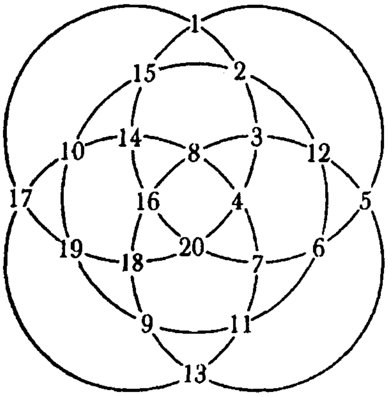
9
7 8
30 25
3 29 1
21 5 22
17 20 26 10
14 23 16 19
13 18 15
2 28 4
24 27
6 11
12

합 = 108

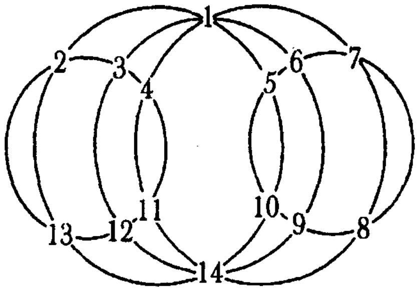
** 김동진, 오영환의 논문에는 합이 79인 경우도 제시되어 있으나 원문 판독 불가로 여기서는 생략하였다.

<부록 2> 5개의 원 이상으로 이루어진 다양한 원진의 예(The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars)

1. 5개의 원으로 이루어진 원진

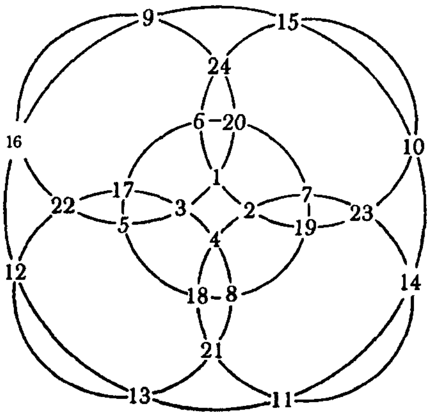


1~20 까지의 수 사용
8 개의 수의 합 : 84

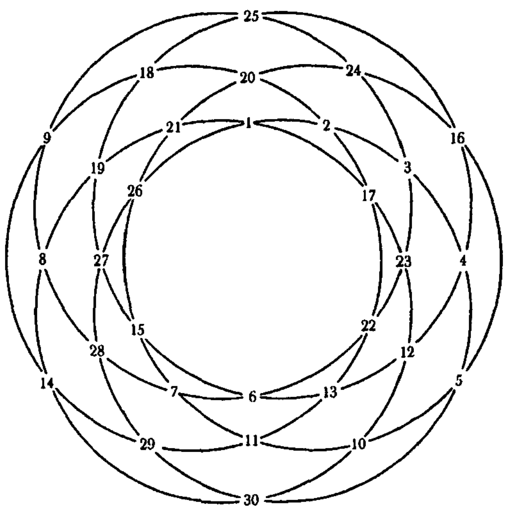


1~14 까지 수 사용
6 개의 수의 합 : 45

2. 6개의 원으로 이루어진 원진

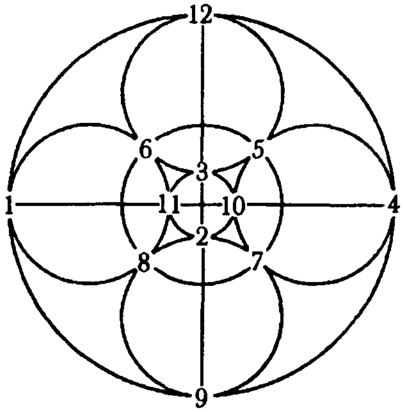


1~24 까지의 수 사용
8 개의 수의 합 : 100



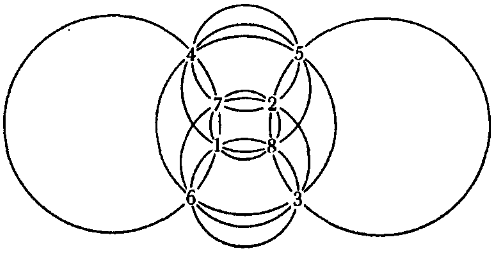
1~30 까지의 수 사용
10 개의 수의 합 : 155

3. 7개의 원으로 이루어진 원진



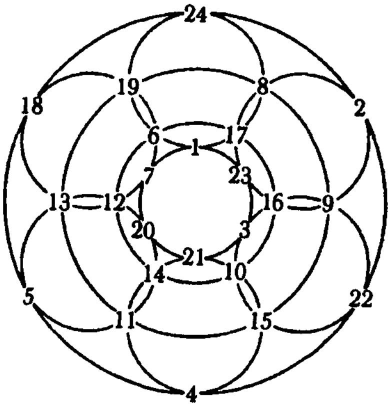
1~12 까지의 수 사용
4 개의 수의 합 : 26

4. 8개의 원으로 이루어진 원진

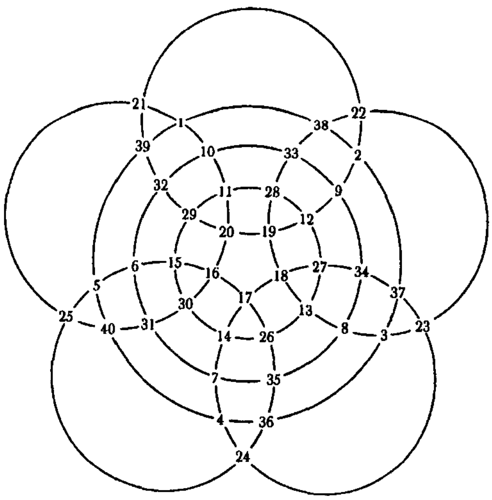


1~8 까지의 수 사용
4 개의 수의 합 : 18

6. 10개의 원으로 이루어진 원진

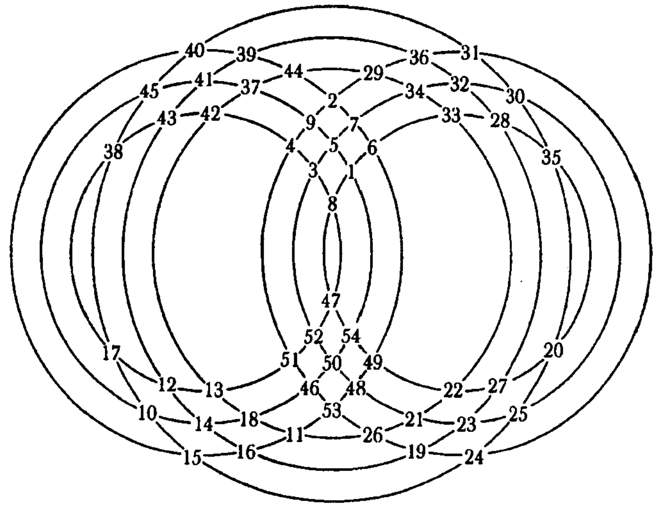


1~24 까지의 수 사용
6 개의 수의 합 : 75



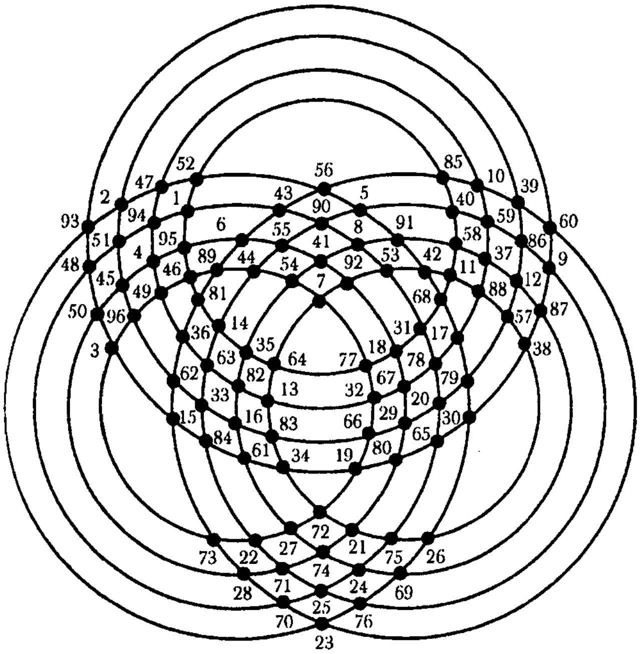
1~40 까지의 수 사용
10 개의 수의 합 : 205

5. 9개의 원으로 이루어진 원진



1~54 까지의 수 사용
12개의 수의 합 : 330
교차점으로 생기는 3×3 역시 마방진을 이룸

7. 12개의 원으로 이루어진 원진



6개의 4×4 마방진 위의 12개의 수의 합
: 776

원주위의 12개의 수의 합
: 776

수의 합이 194가 되는 경우를 찾아보자.

<부록 3> 별 모양의 마방진의 예(The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars)

수를 별 모양으로 배열하여 각 꼭짓점과 선이 교차하는 곳에 수를 적는다면 모두 10개의 수가 필요할 것이다. 그러나 연속한 10개의 수를 사용한 성진은 존재하지 않는다고 알려져 있다.