韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 1호, 2010. 2. 159-175

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 1, Feb. 2010. 159-175

지렛대 모델을 이용한 농도 문제의 해결에 대한 연구

김 재 경 (울산과학고등학교)
이 성 현 (울산과학고등학교)
한 인 기 (경상대학교)1)

문장제는 학생들의 사고력 계발, 문제 상황과 수학의 관련성, 학생들의 동기 유발 등과 관련하여 의미로운 학습자료이지만, 학생들에게 많은 어려움을 유발시키기도 한다. 본 연구는 문장제의 다양한 해결 방법에 대한 한 연구로, 문장제 중 농도문제를 해결하는데 도움을 줄 수 있는 지렛대 모델을 개발하여 제시하고, 이 모델을 이용하여 중학교, 고등학교 수준에서 제시되는 다양한 농도문제를 해결하였다.

1. 서 론

개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007, p.3)에 의하면, 수학교과의 목표 중의 하나는 '수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력'을 기르는 것이다. 이러한 목표의 구현에 적합한 수학교과 내용들 중의 하나가 대수 영역의 방정식의 활용 단원이 될 것이다. 실제로 개정 교육과정 해설서(교육과학기술부, 2008, p.67)에 의하면, 일차방정식의 활용에 관련하여 '여러 가지 실생활 문제에 대하여, 주어진 문제의 뜻을 이해하고 관계를 살펴본 다음, 미지수를 정하여 일차방정식을 세운 후 그 해를 구하게 한다'고 기술되어 있다. 그리고 수학교과서의 방정식 활용 단원을 살펴보면, 나이에 관련된 문제, 농도 문제, 운동에 관련된 문제 등과 같은 다양한 문장제들이 실생활과의 관련성을 보여주며 제시되어 있다.

Shevkin(2002, p.5)에 의하면, '문장제는 수학교육의 전통적인 도구로서, 이들 문제는 학생들의 사고력 계발을 위한 새로운 장을 열어주며, 다양한 실제적인 또는 특별히 고안된 문제 상황들과 관련된 산술연산의 수행을 위한 새로운 장이 된다'고 주장하면서, 문장제가 학생들의 사고력 계발, 다양한 문제 상황들 속에서 수학의 활용에 관련된 큰 의미를 가진다고 주장하였다. 그리고 Thorpe(1989)는 문장제가 본질적으로 중요하며, 교육적으로도 중요하며, 고유의 흥미를 가지고 있는 문제이기에

* 접수일(2009년 12월 11일), 심사(수정)일(1차: 2010년 1월 3일, 2차: 1월 25일), 게재확정일자(2010년 2월 8일)
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 문장제, 지렛대의 원리, 수학적 모델

1) 교신저자

학생들에게 의미있는 문제로서, 학생들에게 대수 공부에 대한 지속적인 동기를 부여할 수 있는 문제로서 문장제를 중시해야 한다고 주장했다(이정은·김원경, 1999, p.77 재인용). 살펴본 바와 같이, 문장제는 학생들의 사고력 계발, 문제상황과 수학의 관련성, 학생들의 동기 유발 등과 관련하여 의미로운 학습내용이라 할 수 있다.

그러나 다른 한편으론, 문장제의 해결이 학생들에게 부담이 되고 있는 것 또한 사실일 것이다. 박정아·신현용(2005, p.525)은 '문장제의 해결이 어렵다는 것은 학생들과 교사 모두 인정하는 사실이다. 학생들은 같은 수를 사용하더라도 계산 기술을 요구하는 문제는 쉽게 해결하지만 문장제의 해결은 어려워한다'고 주장하면서, 문장제의 해결이 유사한 수들을 포함하는 계산문제보다 학생들에게 큰 어려움을 준다는 것을 강조하였다. 특히 정인철·안희정(2008, p.117)은 '대부분의 학생들이 수학을 공부하면서 어려움을 느끼는 부분은 활용부분, 보다 정확히 이야기하면 문장제 문제와 실생활 관련 문제이다. 학생들은 일반 언어를 수학적 언어로 변환하는 데에 많은 어려움을 느끼고, 수학 문제를 해결할 때, 여러 조건을 고려하는 것에 대해 어려움을 느낀다'고 주장하면서, 문장제에서 일상 언어를 수학적 언어로 변환하는 과정에서 어려움이 발생할 수 있음을 주장하였다. 그러므로 수학교육학 연구에서 일상적인 문제 상황, 일상적인 언어를 수학적 문제 상황, 수학적 언어로 변환시킬 수 있는 다양한 모델에 대한 연구는 필수적이라 할 수 있다.

국내의 수학교육학 연구들을 분석하면, 몇몇 연구들에서는 문장제의 해결과정에서의 학생들의 오류를 분석하였고(오정윤·노영순, 2007; 주익한·김영국, 1997; 이정은·김원경, 1999; 이병옥·안병곤, 2008 등), 다른 연구들에서는 문장제에 대한 다양한 분석(정인철·안희정, 2008; 김선희, 2004; 김민경, 2004 등)이 있었다. 그러나 문장제의 효과적인 해결을 위해 일상 언어를 수학적 언어로 변환시키는 모델링 자체에 대한 연구는 거의 없었다.

본 연구는 문장제의 다양한 해결 방법을 모색하기 위한 연구로, 다양한 소재의 문장제들 중에서 농도문제를 해결하는데 도움을 줄 수 있는 지렛대 모델을 개발하여 제시할 것이다. 그리고 개발된 지렛대 모델을 이용하여 중학교, 고등학교 수준에서 제시되는 다양한 농도문제를 해결할 것이다. 이를 통해, 농도문제의 해결을 위한 새로운 접근을 제시할 것이며, 문장제 해결 과정의 새로운 모델링의 한 예를 소개할 것이다.

2. 문장제의 해결에서 학생들의 오류에 대한 선행연구 분석

문장제의 해결과정에서 학생들이 가지는 실패 유형 또는 오류에 대한 연구들이 국내의 학술지에 발표되고 있다. 이들 연구 중에서 몇몇 연구들을 분석하고, 문장제의 해결 과정에서 적절하며 다양한 수학적 모델의 개발 중요성을 살펴보자.

주익한·김영국(1997)은 상위집단, 중위집단, 하위집단에서 문장제 해결의 실패 유형을 문제의 이해 단계, 계획수립 단계, 실행 단계, 검토 단계로 나누어 조사하였다. 이 연구의 결과에 의하면, 상위

집단에서 문장제 해결의 실패가 가장 많이 발생하는 것은 문제해결의 계획수립 단계로 전체 실패의 30.4%가 이 단계에서 발생하며, 그 다음으로는 검토 단계(27.8%), 실행단계(24.5%), 이해 단계(17.3%)에서 발생한다. 중위집단의 경우, 문장제 해결의 실패가 발생하는 문제해결 단계를 순서대로 나열하면, 계획수립 단계가 36.6%, 실행 단계가 26.8%, 이해 단계가 21.1%, 검토 단계가 15.5%이다. 하위집단의 경우에는 계획수립 단계가 42.6%, 이해 단계가 22.4%, 실행 단계가 22.1%, 검토 단계가 12.9%이다. 이 연구를 통해, 문장제의 해결에서 상위집단, 중위집단, 하위집단 모두 문제해결의 계획수립 단계에서 학생들은 가장 많은 실패를 나타냈다는 것을 알 수 있다.

한편 이정은 · 김원경(1999)은 일차방정식에 관련된 문장제 해결에서 학생들의 오류 유형을 분석했는데, 문장제의 해결과정에서 학생들이 범한 오류는 문장에 대한 이해가 7.9%, 적절하지 않은 식이 36.9%, 잘못된 예상과 확인이 32.8%, 계산 오류가 13.3%, 선행 지식 부족이 9.1%였다. 이정은 · 김원경의 연구결과를 주익한 · 김영국의 결과와 비교하면, 문장에 대한 이해는 문제의 이해 단계에 해당하며, 적절하지 않은 식, 잘못된 예상과 확인은 계획 수립 단계이며, 계산 오류는 실행 단계에 해당한다. 결국, 이정은 · 김원경의 연구 결과에 의하면 문장제 해결을 위한 계획 수립 단계에서 학생들이 범한 오류가 전체의 69.7%에 달한다는 것을 알 수 있다.

박정아 · 신현용(2005)도 농도 문장제의 해결에서 학생들은 농도에 대한 이해의 부족, 농도의 비교, 농도를 구하는 식의 유도 등에서 학생들이 가장 큰 어려움을 겪고 있으며 많은 오류를 범하고 있음을 지적하였다. 오정윤 · 노영순(2007)은 문장제의 해결에서 학생들의 오류 발생 빈도를 조사하였는데, 가장 많은 오류가 발생한 것은 '적절하지 않은 식 세우기' 단계였으며, 그 다음 순서로는 선행지식의 부족, 계산적 오류, 반성 단계 확인을 하지 않은 경우, 구문에 대한 이해 부족이었다.

살펴본 선행연구들의 분석을 통해, 문장제의 해결과정에서 학생들이 범하는 오류의 가장 많은 부분이 문제해결을 위한 계획수립 단계, 즉 문제의 조건에 상응하는 식 세우기 단계임을 알 수 있다. 식 세우기 단계는 주어진 문제 상황을 수식을 이용하여 수학적 모델을 만드는 단계로, 비수학적으로 기술된 문제상황을 수학적 문제상황으로 변환시켜 수학적 모델을 구성하게 된다. 수학적 모델을 구성하는 모델링은 수학교육 전반에 걸쳐 강조되고 있으며, 특히 NCTM(2007, p.300)은 '수학적 모델을 활용하여 양 사이의 관계를 표현하고 이해할 수 있다'는 학교수학의 규준을 제시하였다.

학생들의 폭넓은 수학적 모델링을 위해선, 문제상황에 대한 다양한 수학적 모델을 개발하고, 이들 모델에 대한 교수학적 논의가 폭넓게 이루어져야 한다. 그러나 국내의 선행연구들을 분석해 보면, 문장제의 수학적 모델의 개발에 관련된 연구들을 찾기 어렵다.

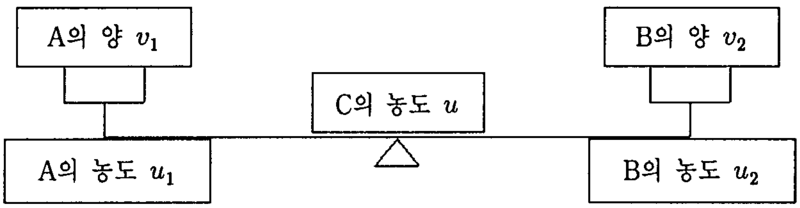
본 연구에서는 농도문제의 해결과정에 포함된 농도에 관련된 등식을 분석하여, 지렛대 원리의 관점에서 이 등식에 대한 새로운 해석을 찾았으며, 이에 근거하여 농도문제의 문제상황을 수학화하는 수학적 모델로 지렛대 모델을 발명하였다.

3. 농도 문제 해결을 위한 지렛대 모델의 구성

지렛대의 원리는 x축 위에 좌표가 d_1, d_2인(단 $d_1 < d_2$라 함) 위치에 무게 m_1, m_2를 놓고 무게중심의 좌표를 d라 하면, 지렛대가 평형을 이룰 필요충분조건이 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2 - d}{d - d_1}$이라는 것이다[2]. 이때 등식 $\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2 - d}{d - d_1}$으로부터 $m_1(d - d_1) = m_2(d_2 - d)$를 얻을 수 있다.

농도 문제의 문제 상황은 주로 농도가 u_1%인 v_1L의 용액 A와 농도가 u_2%인 v_2L인 용액 B를 혼합하여 농도가 u%인 $(v_1 + v_2)$L의 혼합물 C를 얻는 것에 관련된다(단 $u_1 < u_2$라 함). 이때 $v_1 \times \frac{(u - u_1)}{100}$는 용액 C가 얻어질 때 용액 A에서 증가되는 용질(예를 들어 소금 등)의 양이고, $v_2 \times \frac{(u_2 - u)}{100}$는 용액 C가 얻어질 때 용액 B로부터 감소되는 용질의 양이다. 얻어진 혼합물 C에서는 $v_1 \times \frac{(u - u_1)}{100} = v_2 \times \frac{(u_2 - u)}{100}$이고, $v_1(u - u_1) = v_2(u_2 - u)$가 된다.

이제 얻어진 등식 $v_1(u - u_1) = v_2(u_2 - u)$을 지렛대의 원리 $m_1(d - d_1) = m_2(d_2 - d)$와 비교하면, 같은 형식을 가진 등식임을 알 수 있다. 즉 지렛대의 원리에서 지렛대의 양 끝에 놓인 무게로 농도 문제에서는 두 용액의 양을 잡고, 무게중심의 좌표로 혼합물의 농도를 잡고, 지렛대의 무게중심으로부터 지렛대의 양 끝까지의 거리로 농도의 차를 잡으면, 지렛대의 원리가 혼합물 문제의 모델이 된다는 것을 알 수 있다. 농도 문제의 요소들 사이의 관계를 지렛대 모델로 나타내면 <그림 1>과 같다.

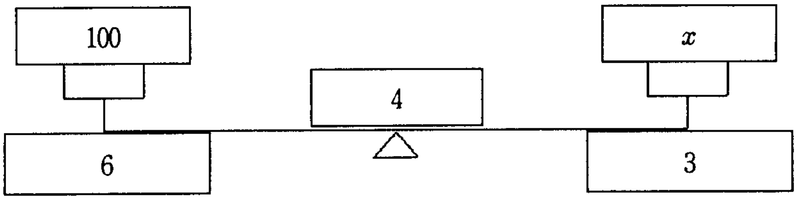


<그림 1> 농도 문제의 지렛대 모델

예를 들어, '6%의 설탕물 100g이 있다. 이 설탕물에 몇 g의 3% 설탕물을 넣으면 4%의 설탕물이 되는가?'라는 문제의 지렛대 모델을 만들자. 6%인 용액 A 100g과 3%인 용액 B xg을 섞게 되며, 얻어지는 혼합물의 농도는 4%이므로, <그림 2>와 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.

---

2) 중학생들에게 지렛대 모델을 이용한 문제해결을 소개할 때에는 '필요충분조건'이라는 표현은 생략하여도 충분할 것이며, 이 지렛대 모델에서 무게중심의 좌표는 중학교에서 다루는 수직선 개념을 이용하여 충분히 설명할 수 있을 것이다.



<그림 2>

이제, 지렛대의 원리를 적용하면 등식 $(4-6)\times 100=(3-4)\times x$를 얻을 수 있으며, 이를 풀면 구하는 x의 값을 얻게 된다. 결국 <그림 2>에서 얻어진 지렛대 모델은 일상적인 언어로 기술된 농도 문제를 수학적 등식 $(4-6)\times 100=(3-4)\times x$으로 변환시키는 매개체 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

4. 지렛대 모델을 이용한 농도 문제의 해결

중등학교에서 다루어지는 농도관련 문제를 분류해 보면, 용매를 첨가하거나 증발시키는 유형, 두 용액을 섞는 유형, 두 용액을 반복하여 섞는 유형, 점화식에 관련된 농도 문제 등으로 나눌 수 있다. 이들 문제를 지렛대 모델을 이용하여 해결하자.

가. 용매를 첨가하거나 증발시키는 유형

용매를 첨가하거나 증발시키는 유형의 문제들은 주어진 농도의 용액에서 일정한 양의 용매를 첨가하거나 증발시켜 원하는 농도의 용액을 만드는 문제 상황에 관련된다. 이 유형에 관련된 문제를 지렛대 모델을 사용하지 않는 문제해결 방법과 지렛대 모델을 이용한 문제해결 방법을 이용하여 해결해 보자.

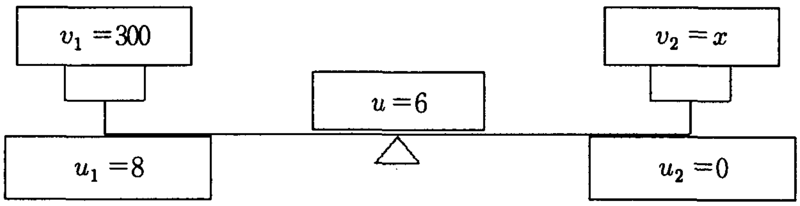
문제 1. 경희는 오이냉국을 만들기 위하여 8%의 소금물 300g을 만들었다. 그런데 너무 짜서 물을 넣어 6%의 소금물로 만들려고 한다. 몇 g의 물을 더 넣어야 하는가? (박두일 외, 2006, p.126)

이 문제를 일차방정식을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다. 물을 넣기 전 8%의 소금물 300g에 들어 있는 소금의 양은 $300\times\frac{8}{100}$(g)이다. 이 8%의 소금물 300g에 물 x(g)을 넣는다고 하자. 그러면 최종적으로 6%의 소금물 $(300+x)$g에 들어 있어야 할 소금의 양은 $(300+x)\times\frac{6}{100}$(g)이다. 물을 넣기 전과 넣은 후의 소금의 양은 변하지 않으므로, 소금의 양을 중심으로 방정식을 만들면

$300\times\frac{8}{100}=(300+x)\times\frac{6}{100}$을 얻을 수 있다. 이를 정리하면 $2400=1800+6x$이므로 $x=100(g)$의 물을 더 넣으면 된다.

문제 1에서는 등식 $2400=1800+6x$을 유도하기 위해, 용매를 첨가하기 전과 후에 용질인 소금의 양이 불변이라는 사실, 혼합물에서 용질의 양을 구하는 방법이 필요했다.

이제 문제 1을 지렛대 모델을 이용하여 해결하자. 8%인 소금물과 물을 혼합하여 8%인 소금물을 만들어야 하므로, 지렛대의 왼쪽에는 농도 u_1이 8%이고 무게가 300g인 소금물을 놓고 오른쪽에는 농도 u_2가 0%이고 무게가 x(g)인 물을 놓는다. 이를 지렛대 모델로 나타내면, <그림 3>과 같다.



<그림 3>

이제 지렛대의 원리에 의해, 등식 $(6-8)\times 300=(0-6)\times x$, $600=6x$를 얻을 수 있으며, 이로부터 구하는 물의 양 x는 100g임을 알 수 있다.

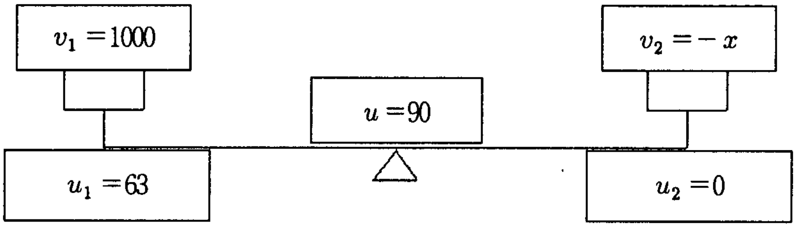
기술한 지렛대 모델을 이용한 풀이에서는 용액에 포함되어야 하는 소금의 양 $300\times\frac{8}{100}$, $(300+x)\times\frac{6}{100}$을 계산하지 않고, 곧바로 지렛대 모델로부터 문제해결을 위한 등식을 얻을 수 있다. 이제 문제 1과는 반대되는 문제 상황인, 용매를 증발시키는 문제를 살펴보자.

문제 2. 어느 쓰레기 매립지에서는 젖은 쓰레기에서 발생하는 침출수의 수분을 증발시켜 침출수의 오염 농도가 90% 이상이 되도록 농축하여 별도로 폐기 처분한다고 한다. 어느 날 오염농도가 63%인 쓰레기 침출수 1톤이 발생하였을 때, 이 침출수를 별도로 폐기 처분하기 위해서는 최소한 몇 kg이상의 수분을 증발시켜야 하는가?

지렛대 모델을 이용하지 않으면, 문제 2는 다음과 같이 해결될 수 있다. 63%의 오염 침출수 1톤에 있는 오염물의 양은 $\frac{63}{100}\times 1000=630(kg)$이다. 이제 오염 침출수에서 증발시킨 수분의 양을 $x(kg)$이라 하면, 수분을 증발시킨 후 오염 침출수의 양은 $(1000-x)$이고, 이 오염 침출수의 농도는 $\frac{630}{1000-x}\times 100$이다. 이로부터 부등식 $\frac{630}{1000-x}\times 100\geq 90$을 얻을 수 있고, $x\geq 300$이다. 즉 300(kg)이상의 수분을 증발시켜야 한다.

문제 1에서는 소금의 양을 이용하여 등식 $2400 = 1800 + 6x$을 유도하였지만, 문제 2에서는 혼합물의 농도를 중심으로 부등식 $\frac{630}{1000-x} \times 100 \geq 90$을 얻었다. 즉 용매를 첨가하는지, 증발시키는지에 따라 다른 양을 중심으로 식을 유도했다.

이제 문제 2를 지렛대 모델을 이용하여 해결하자. 문제 1에서는 물을 첨가하여 양의 값인 무게 x를 지렛대의 오른쪽에 놓았다. 그런데 여기서는 물을 증발시켜야 하므로, 지렛대의 오른쪽에 음의 값인 무게 $-x$를 놓고 지렛대 모델을 만들어야 한다. 결국 지렛대의 왼쪽에는 농도가 63%인 1000kg의 무게가 놓이며, 오른쪽에는 농도가 0%인 $-x$의 무게가 놓이게 되며, 이에 대한 지렛대 모델은 <그림 4>와 같다.



<그림 4>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(90-63) \times 1000 = (0-90) \times (-x)$을 얻을 수 있으며, 이로부터 $90x = 27000$이고, $x = 300$이다. 즉 300kg이상의 수분을 증발시켜야 한다.

문제 1과 문제 2는 용매를 첨가하거나 증발시키는 유사한 문제임에도 불구하고, 지렛대 모델을 이용하지 않는 경우에는 서로 다른 수식을 이용하여 문제를 해결하게 된다. 즉 문제 1에서는 용질인 소금의 양을 이용한 등식 $300 \times \frac{8}{100} = (300+x) \times \frac{6}{100}$을 만들었고, 이때 미지수 x는 한 인수에 포함되어 있다. 한편 문제 2에서는 농도에 대한 부등식 $\frac{630}{1000-x} \times 100 \geq 90$을 이용하였으며, 여기에는 미지수 x가 분자에 포함되어 있다. 이와 같이 유사한 유형의 문제임에도 불구하고 서로 다른 접근을 통해 문제를 해결하였다. 반면에 지렛대 모델을 이용하는 경우에는 용매를 첨가하는지, 증가하는지에 관계없이 같은 모델을 이용하여 유사한 방법으로 문제를 해결할 수 있었다.

나. 두 용액을 섞는 유형

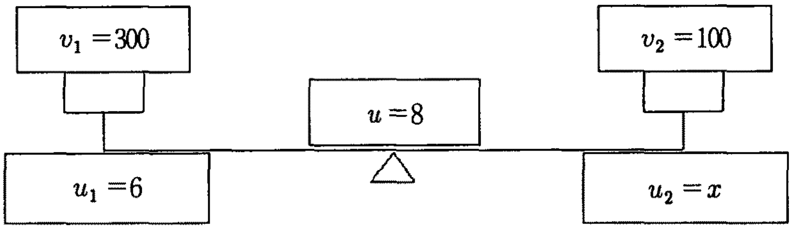
두 용액을 섞는 유형의 문제들에는 농도가 다른 두 용액을 섞어 원하는 농도의 용액을 만드는 문제 상황에 관련된다. 이들 문제를 살펴보자.

문제 3. 6%의 소금물 300g과 x%의 소금물 100g을 섞었더니 8%의 소금물이 되었다. x의 값을

구하여라. (박두일 외, 2006, p.127)

문제 3에서는 혼합물들에 포함된 용질인 소금의 양을 중심으로 등식 $300\times\frac{6}{100}+100\times\frac{x}{100}=(300+100)\times\frac{8}{100}$을 얻을 수 있으며, 이로부터 $x=14\%$가 얻어진다.

이제, 지렛대 모델을 이용하여 문제를 해결하자. 지렛대의 왼쪽에는 6%의 소금물 300g, 오른쪽에는 x%의 소금물 100g을 놓으면, <그림 5>와 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 5>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(8-6)\times 300=(x-8)\times 100$을 얻게 된다. 이로부터 구하는 x값은 14임을 알 수 있다.

문제 3에서는 한 소금물의 농도를 구하는 문제를 해결하였다. 이제, 소금의 양을 구하는 문제를 하나 살펴보자.

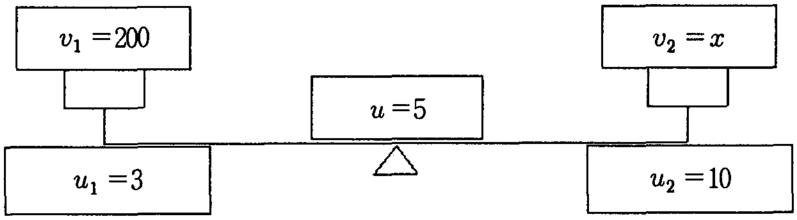
문제 4. 3%의 소금물 200g에 10%의 소금물 몇 g을 더 넣으면 5%의 소금물이 되겠는가?
(정상권 외, 2009, p.133)

이 문제를 방정식을 이용하여 풀려면, 10%의 소금물의 양을 xg이라 하고, 최종적으로 얻게 되는 5%의 소금물의 양을 $(200+x)$g이라 놓는다. 이제 3%의 소금물에 들어 있는 소금의 양 $200\times\frac{3}{100}$, 10%의 소금물에 있는 소금의 양 $x\times\frac{10}{100}$을 구하고, 5%의 소금물에 들어있는 소금의 양 $\frac{5}{100}\times(200+x)$을 생각하여 등식 $200\times\frac{3}{100}+x\times\frac{10}{100}=\frac{5}{100}\times(200+x)$을 만든다. 이로부터 x는 80이 얻어진다. 결국 첨가하는 10%의 소금물의 양은 80g이다.

문제 3에서는 소금물의 농도를 구했고, 문제 4에서는 첨가되는 소금의 양을 구했다. 이들 두 문제에서 구하는 양은 달랐지만, 이들 두 문제 모두에서 혼합물들의 소금의 양을 이용하여 등식을 구하여 문제를 해결하였다.

이제, 지렛대 모델로 해결하자. 지렛대의 왼쪽에는 3%의 소금물 200g, 오른쪽에는 10% 소금물 x

g을 놓는다. 그리고 이들의 혼합물인 최종 소금물의 농도 5%를 지렛대의 중심에 놓으면, <그림 6>과 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 6>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(5-3)\times 200 = (10-5)\times x$를 얻고, 이로부터 x는 80이 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 10%의 소금물을 80g 더 넣어야 한다.

이제 두 개의 미지수를 가지며, 연립방정식을 이용하여 해결하는 문장제를 지렛대 모델을 이용하여 해결하자.

문제 5. 6%의 매실 과즙과 15%의 매실 과즙을 섞어서 12%의 매실 과즙 1500g을 만들려고 한다. 이 때, 각각의 매실 과즙을 몇 g씩 섞어야 하는가? (이준열 외, 2009, p.99)

우선 연립방정식을 이용한 풀이를 살펴보자. 6%의 매실 과즙 xg과 15%의 매실 과즙 yg을 섞으면 매실 과즙의 양은 <표 1>과 같게 된다.

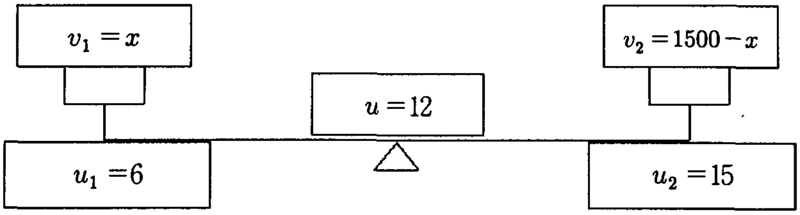
<표 1>

	섞기 전		섞은 후
무게/농도	6	15	12
매실 과즙(g)	x	y	1500
매실(g)	$\frac{6}{100}x$	$\frac{15}{100}y$	$\frac{12}{100}\times 1500$

위의 표에서 매실 과즙의 양은 $x+y=1500\cdots$㉠이다. 섞기 전 매실의 양의 합은 섞은 후의 매실의 양과 같으므로, $\frac{6}{100}\times x+\frac{15}{100}\times y=\frac{12}{100}\times 1500\cdots$㉡이다. 이제 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 x는 500g, y는 1000g이 된다. 따라서 6%의 매실 과즙 500g과 15%의 매실 과즙 1000g을 섞으면 12%의 매실 과즙 1500g을 만들 수 있다.

이제 지렛대 모델을 생각하자. 이를 위해 지렛대의 왼쪽에는 6%의 매실 과즙 xg, 오른쪽에는 15%의 매실 과즙 $(1500-x)$g을 놓는다. 이 두 용액의 혼합물의 농도가 12%이므로, <그림 7>과

같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 7>

이제 지렛대의 원리로부터, 등식 $(12-6) \times x = (15-12) \times (1500-x)$를 얻을 수 있으며, 이로부터 x는 500이 된다. 이로부터 6%의 매실 과즙 500g과 15%의 매실 과즙 1000g을 섞으면 된다는 것을 알 수 있다.

지렛대 모델을 이용하지 않은 풀이에서는 매실 과즙의 양과 용액에서 매실의 양을 중심으로 두 등식을 세워, 이들을 연립하여 구하는 값을 구하였다. 그러나 지렛대 모델에서는 곧바로 하나의 등식을 지렛대의 원리를 이용하여 얻을 수 있었으며, 구하는 값을 얻었다.

다. 두 용액을 반복하여 섞는 유형

두 용액을 반복하여 섞는 유형에는 농도가 다른 두 용액을 두 번에 걸쳐 섞는 것에 대한 정보가 주어지고, 이로부터 주어진 두 용액의 농도 등을 구하는 문제 상황에 관련된다.

문제 6. 농도가 다른 두 소금물 A, B를 각각 30g과 20g씩 섞었더니 6%의 소금물이 되었다. 또 소금물 A, B를 각각 20g, 30g 섞었더니 8%인 소금물이 되었다. 소금물 A, B의 농도를 각각 구하여라.
(이준열 외, 2009, p.100)

두 소금물 A, B를 두 번 섞었으므로, 문제 5의 해결 방법을 두 번 반복하여 사용하면, 방정식을 구하여 소금물 A, B의 농도를 각각 구할 수 있다. 소금 A, B의 농도를 각각 a, b라 하자. 우선 a%의 소금물 30g과 b%의 소금물 20g을 섞는 경우에, 소금물과 소금의 양을 <표 2>와 같이 정리할 수 있다.

<표 2>

	섞기 전		섞은 후
농도	a	b	6
소금물(g)	30	20	50
소금(g)	$\frac{a}{100}\times 30$	$\frac{b}{100}\times 20$	$\frac{6}{100}\times 50$

이때 용액 A, B에 포함되어 있는 소금의 양의 합과 섞은 후 혼합물의 소금의 양은 같으므로, $\frac{a}{100}\times 30+\frac{b}{100}\times 20=\frac{6}{100}\times 50$, $3a+2b=30\cdots$㉠이 된다. 한편 a%의 소금물 20g과 b%의 소금물 30g을 섞으면, 소금물과 소금의 양을 <표 3>과 같이 정리할 수 있다.

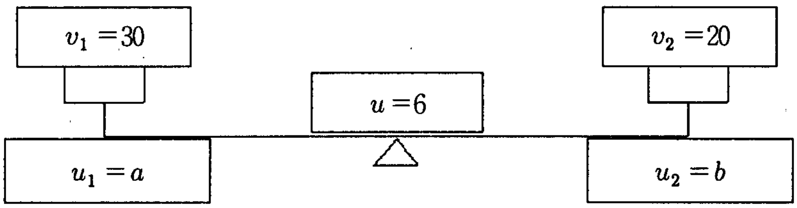
<표 3>

	섞기 전		섞은 후
농도	a	b	8
소금물(g)	20	30	50
소금(g)	$\frac{a}{100}\times 20$	$\frac{b}{100}\times 30$	$\frac{8}{100}\times 50$

섞기 전의 소금의 양의 합과 섞은 후의 소금의 양은 같으므로, $\frac{a}{100}\times 20+\frac{b}{100}\times 30=\frac{8}{100}\times 50$, $2a+3b=40\cdots$㉡이 성립한다. 이제 ㉠과 ㉡을 연립하면, $a=2$, $b=12$를 얻을 수 있다.

이제, 지렛대 모델을 이용하여 문제 6을 해결하자. 이 문제에서는 소금물 A, B를 이용하여 두 번 섞었으므로, 각각의 혼합물에 대해 지렛대 모델을 만들어야 한다. 그런 다음 얻어진 결과를 연립하면 구하는 답을 얻을 수 있다.

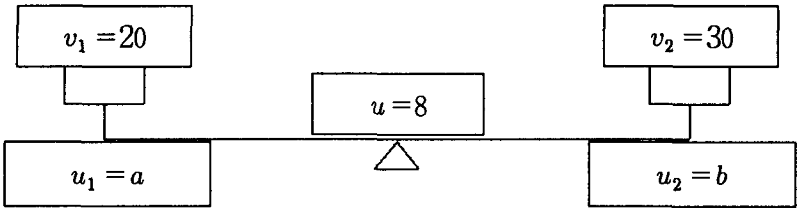
우선 소금물 A, B의 농도를 각각 a, b라 놓고 소금물 A, B를 각각 30g과 20g 섞은 경우의 지렛대 모델을 생각하면, <그림 8>과 같다.



<그림 8>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(6-a)\times 30=(b-6)\times 20$, $3a+2b=30$을 얻을 수 있

다. 이제 소금물 A, B를 각각 20g, 30g 섞는 경우를 지렛대 모델로 나타내면, <그림 9>와 같다.



<그림 9>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(8-a)\times 20=(b-8)\times 30$, $2a+3b=40$을 얻게 된다. 이제 얻어진 두 등식 $3a+2b=30$, $2a+3b=40$을 연립하면, a, b는 각각 2, 12가 된다.

살펴본 바와 같이, 두 용액을 반복하여 섞는 경우에는 각각의 혼합물에 대해 지렛대 모델을 만들어야 하며, 이들을 연립하면 구하는 답을 얻을 수 있다. 앞에서 다룬 문제들과 문제 6의 지렛대 모델을 비교하면, 문제 6의 지렛대 모델인 <그림 8, 9>에는 두 미지수 a, b가 포함되어 있으며, 나머지 지렛대 모델에는 한 미지수 x만이 포함되어 있다. 그러므로 문제 6의 해결을 위해선 <그림 8, 9>와 같이 두 개의 지렛대 모델이 필요하게 된다.

라. 점화식에 관련된 농도 문제

고등학교 과정에서 다루는 점화식에 관련된 농도 문제들을 살펴보자. 점화식에 관련된 농도 문제로는 극한에 관련된 혼합문제, 혼합을 반복 시행하는 문제 등이 있다. 우선 극한에 관련된 혼합문제를 살펴보자.

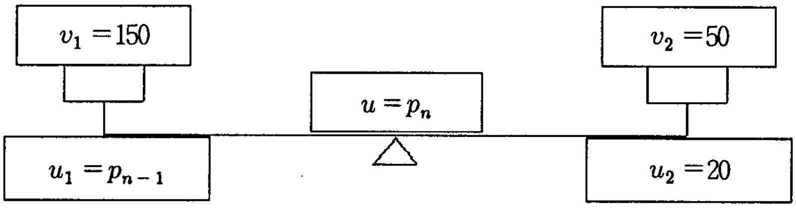
문제 7. p_0%의 소금물 200g이 있다. 이 소금물에서 50g을 따라 내고 여기에 물 40g과 소금 10g을 넣었다. 이와 같은 시행을 n번 반복할 때, p_n%의 소금물이 되었다고 하자. 이 때 $\lim_{n\to\infty} p_n$을 구하여라.

이 문제는 보통 점화식과 관련되어 다루어진다. p_0%의 소금물 200g에서 50g을 따라냈으므로 p_0%의 소금물은 150g이 되며, 여기에 포함된 소금의 양은 $\frac{p_0}{100}\times 150=\frac{3}{2}p_0$이다. 이제 소금 10g을 넣으면, 1회 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은 $\frac{3}{2}p_0+10$이 된다. 따라서 1회 시행 후의 소금물의 농도는 $p_1=\dfrac{\frac{3}{2}p_0+10}{200}\times 100=\frac{3}{4}p_0+5$이 된다. 이로부터 $3p_0+20=4p_1$이 성립한다.

이제 소금물에서 50g을 따라 내고 여기에 물 40g과 소금 10g을 넣는 시행을 n번 반복하면, 점화식 $3p_0+20=4p_1$으로부터 $4p_n=3p_{n-1}+20$을 생각할 수 있다. 이제 얻어진 점화식 $4p_n=3p_{n-1}+20$을 적당히 변형시키면, $4(p_n-20)=3(p_{n-1}-20)$이 된다. $X_n=p_n-20$으로 두면, $X_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}X_1$이 되며, $n\to\infty$인 경우에 X_n는 0으로 수렴한다. 결국 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\lim\limits_{n\to\infty}(p_n-20)=0$이 되며, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=20$이 된다.

문제 7의 해결과정에서 점화식 $4p_n=3p_{n-1}+20$을 얻기 위해, 각 시행에서 소금의 양을 계산하여 농도를 계산하는 등식을 얻었다.

이 문제를 지렛대 모델을 이용하여 해결하자. 이를 위해, 지렛대의 왼쪽에 p_{n-1}%의 소금물 150g, 오른쪽에 물 40g과 소금 10g, 즉 농도가 20%인 소금물 50g을 놓는다. 이 두 용액의 혼합물은 농도가 p_n%인 소금물이다. 이로부터 <그림 10>과 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 10>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, 등식 $(p_n-p_{n-1})\times 150=(20-p_n)\times 50$이 얻어진다. 이 등식을 풀면, $4p_n=3p_{n-1}+20$인데, 이로부터 $4(p_n-20)=3(p_{n-1}-20)$을 얻을 수 있다. 이제 $X_n=p_n-20$으로 두면 $X_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}X_1$이며, $n\to\infty$인 경우 X_n는 0으로 수렴한다. 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=\lim\limits_{n\to\infty}(p_n-20)=0$이며, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=20$이 성립한다.

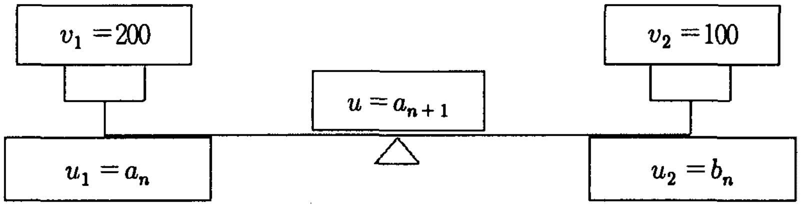
문제 7의 해결과정에서 사용한 지렛대 모델은 본질적으로는 '5%의 소금물 200g이 있다. 이 소금물에서 50g을 따라 내고 여기에 물 40g과 소금 10g을 넣었다. 얻어진 소금물의 농도는 무엇인가?'라는 문제와 동일한 모델이다. 이 문제의 지렛대 모델은 <그림 10>에서 p_{n-1}을 5로 하면 된다.

이제 소금물의 혼합을 반복적으로 시행하는 경우의 문제를 살펴보자.

문제 8. 그릇 A에 농도 p%의 소금물 300g, 그릇 B에 농도 q%의 소금물 300g이 있다. 동시에 각 그릇으로부터 100g씩 퍼내어 서로 교환해 섞는다. 이와 같은 시행을 n번 반복한 후, 그릇 A의 소금물 농도를 a_n, 그릇 B의 소금물 농도를 b_n이라 하면 $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$가 된다(단 $n=1,2,\cdots$). 이

때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$을 구하여라.

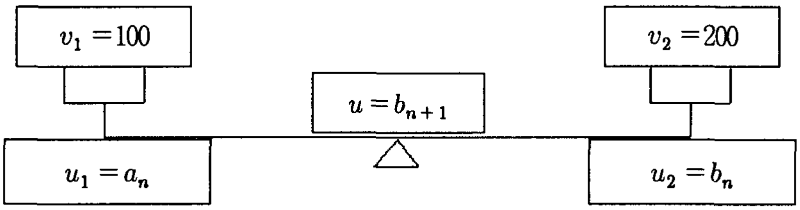
우선 $(n+1)$번 시행 후 그릇 A의 농도 a_{n+1}을 지렛대 모델을 이용하여 구하자. a_{n+1}은 농도가 a_n인 200g의 소금물 A와 농도가 b_n인 100g의 소금물 B가 섞여져 결정된다. 그러므로 지렛대의 왼쪽에 농도 a_n인 소금물 200g, 오른쪽에 농도 b_n인 소금물 100g을 놓자. 그러면 <그림 11>과 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 11>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, $(a_{n+1}-a_n)\times 200=(b_n-a_{n+1})\times 100$을 얻을 수 있고, 이로부터 등식 $3a_{n+1}=2a_n+b_n$…㉠이 성립한다.

한편 $(n+1)$번 시행 후 그릇 B의 농도 b_{n+1}은 농도가 a_n인 100g의 소금물 A와 농도가 b_n인 200g의 소금물 B가 섞여져 결정된다. 그러므로 지렛대의 왼쪽에 농도 a_n인 소금물 100g, 오른쪽에는 농도 b_n인 소금물 200g을 둔다. 그러면 <그림 12>와 같은 지렛대 모델을 얻을 수 있다.



<그림 12>

이제 지렛대의 원리를 이용하면, $(b_{n+1}-a_n)\times 100=(b_n-b_{n+1})\times 200$을 얻을 수 있고, 이로부터 $3b_{n+1}=a_n+2b_n$…㉡이 성립한다. 이제 ㉠과 ㉡으로부터 $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$을 얻을 수 있다.

한편, <그림 8, 9>와 <그림 11, 12>를 비교해 보면, 미지수의 위치가 같음을 알 수 있다. 즉 문

제 8은 문제 6의 일반화임을 알 수 있으며, 그 해결도 같은 방법을 바탕으로 이루어지고 있음을 알 수 있다. 결국 지렛대 모델을 이용한 문제해결 접근에서는 문제들 사이의 관련성, 문제해결의 구조를 쉽게 파악할 수 있을 것으로 기대된다.

5. 결 론

문장제는 학생들의 사고력 계발, 문제 상황과 수학의 관련성, 학생들의 동기 유발 등과 관련하여 의미로운 학습자료이지만, 학생들에게 많은 어려움을 유발시키기도 한다. 본 연구는 문장제의 다양한 해결 방법에 대한 한 연구로, 문장제 중 농도문제를 해결하는데 도움을 줄 수 있는 지렛대 모델을 개발하여 제시하고, 이 모델을 이용하여 중학교, 고등학교 수준에서 제시되는 다양한 농도문제를 해결하였다.

농도가 u_1%인 v_1L의 용액 A와 농도가 u_2%인 v_2L인 용액 B를 혼합하여 농도가 u%인 (v_1+v_2)L의 혼합물 C를 얻었다고 하자. 이때 용액 C가 얻어질 때 용액 A에서 증가되는 용질의 양과 용액 B로부터 감소되는 용질의 양을 비교하면, 얻어진 혼합물 C에서는 용질의 양에 대한 등식 $v_1(u-u_1)=v_2(u_2-u)$이 성립한다. 이것은 지렛대의 원리에서 얻어지는 등식 $m_1(d-d_1)=m_2(d_2-d)$과 같은 형식을 가진다. 이것은 지렛대의 원리에서 지렛대의 양 끝에 놓인 무게로 두 용액의 양을 잡고, 무게중심으로 혼합물의 농도를 잡고, 지렛대의 무게중심으로부터 지렛대의 양 끝까지의 거리로 농도의 차를 잡으면, 지렛대의 원리가 혼합물 문제의 모델이 된다는 것을 의미한다. 이를 바탕으로, 본 연구에서는 농도 문제를 해결할 수 있는 지렛대 모델을 만들었다.

본 연구에서는 중등학교에서 다루어지는 농도관련 문제를 용매를 첨가하거나 증발시키는 유형, 두 용액을 섞는 유형, 두 용액을 반복하여 섞는 유형, 점화식에 관련된 농도 문제 등으로 나누었으며, 이들 문제를 개발된 지렛대 모델을 이용하여 해결하였다.

용매를 첨가하거나 증발시키는 유형의 문제들은 주어진 농도의 용액에서 일정한 양의 용매를 첨가하거나 증발시켜 원하는 농도의 용액을 만드는 문제 상황에 관련된다. 두 용액을 섞는 유형의 문제들에는 농도가 다른 두 용액을 섞어 원하는 농도의 용액을 만드는 문제 상황에 관련된다. 두 용액을 반복하여 섞는 유형에는 농도가 다른 두 용액을 두 번에 걸쳐 섞는 것에 대한 정보가 주어지고, 이로부터 주어진 두 용액의 농도 등을 구하는 문제 상황에 관련된다. 그리고 점화식에 관련된 농도 문제로는 극한에 관련된 혼합문제, 혼합을 반복 시행하는 문제 등을 다루었다. 본 연구에서는 이들 문제를 지렛대 모델을 이용하여 해결하면서, 기존의 방정식을 세워서 해결하는 풀이방법과 비교하고, 풀이과정에서 필요한 지식들, 일반화 가능성, 문제해결의 구조 파악 등을 중심으로 논의를 진행하였다.

본 연구를 통해, 농도문제의 해결을 위한 새로운 접근을 제시할 것이며, 문장제 해결 과정의 새로운 모델링의 한 예를 소개할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정 해설(III), 서울: 교육과학기술부.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정, 서울: 교육인적자원부.

김민경 (2004). 현실적인 문장제에 관한 초등학생의 반응 분석, 학교수학 **6(2)**. pp.135-151.

김선희 (2004). 수학 문장제 해결에 영향을 주는 언어적.인지적 요인 -혼합물 문제를 중심으로-, 수학교육학연구 **14(3)**, pp.267-281.

박두일 외 (2006). 중학교 7-가 자습서, 서울: (주)교학사.

박정아·신현용 (2005). 중학교 1학년 학생들의 농도 문장제 해결력에 대한 분석, 수학교육 **44(4)**, pp.525-534.

양승갑 외 (2009). 중학교 수학 8-가, 서울: (주)금성출판사.

오정윤·노영순 (2007). 남녀학생들의 도형 문장제 해결 오류 및 해결력에 대한 비교 분석-중학교 3학년 대상으로-, 한국학교수학회논문집 **10(3)**, pp.353-367.

이병옥·안병곤 (2008). 수학 문장제의 문장 구조와 해석상의 오류 분석-초등학교 2학년을 중심으로-, 한국초등수학교육학회지 12(2), pp.185-204.

이정은·김원경 (1999). 중학생들의 일차 방정식에 관한 문장제 해결 전략 및 오류 분석, 수학교육 **38(1)**, pp.77-85.

이준열 외 (2009). 중학교 수학 8-가, 서울: (주)도서출판 디딤돌.

정인철·안희정 (2008). 제7차 교육과정 중학교 수학교과서에 실린 문장제 문제의 분석, 한국학교수학회논문집 **11(1)**, pp.117-132.

정상권 외 (2009). 중학교 수학 1, 서울: (주)금성출판사.

주익한·김영국 (1997). 문장제 풀이의 실패 유형 분류와 그 경향의 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(2)**, pp.161-169.

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준(류희찬·조완영·이경화·나귀수·김남균·방정숙 역). (원저 2000년 출판)

Shevkin A. V. (2002). *Obuchenie Resheniyu Tekstovyh Zadach v 5-6 Klassah*, Moskva: Russkoe Slovo.

Thorpe J. A. (1989). Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It? *Research Issue in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum Associates: NCTM, pp.11-24.

A Study on Solving Word Problems Related with Consistency Using the Lever Model

Kim, Jae Kyoung

Ulsan Science High School, 689-821, Korea

E-mail : hagma1007@paran.com

Lee, Seong Hyun

Ulsan Science High School, 689-821, Korea

E-mail : mathlsh@use.go.kr

Han Inki[3)]

Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we make a new problem solving model using the principle of the lever. Using the model we solved many word problems related with consistency. We suggest new problem solving method using the lever model and describe some characteristics of the method.

---

3) correspondent author

* ZDM Classification : D53

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : word problem, mathematical model, the principle of the lever.