韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 1호, 2010. 2. 123-143

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 1, Feb. 2010. 123-143

초등수학영재 선발시험에 응시한 3, 4학년생들의 4층 Skeleton Tower 문제해결에 대한 사례 연구

김 해 규 (제주대학교 교육대학)

Skeleton Tower 문제는 대수와 기하를 통합하는 교육과정의 한 예로, 산술적인 세기, 정육면체의 개수를 세는 다양한 규칙이나 가능성을 열거하기, 기하학적 그림 그리기, 대수 방정식의 사용과 같은 다양한 방법으로 접근할 수 있으므로, 대수 방정식의 사용 방법만 제외한다면 초등학생에게도 사용 가능한 자료이다. 따라서, 본 연구에서는 J대학교 부설 영재교육원에서 실시한 2010학년도 초등수학반 영재선발시험에 응시한 3, 4학년생들을 대상으로, '4층 Skeleton Tower'를 해결하게 한 후, 이들의 문제해결 실태를 분석하여, 영재교육을 담당하는 교사들을 위한 시사점을 알아보고자 한다.

I. 연구의 필요성 및 목적

개정 2007 수학과 교육과정에서 수학 내에서의 아이디어를 연결하는 능력을 강조[1]하고 있으며, NCTM(2000a)에서도 수학적 아이디어들 사이의 연결성, 내적 연결성 및 수학 외적 영역을 인식하고 활용할 것을 제시하고 있다.

수학은 대수나 기하와 같은 여러 분야의 요소들을 포함하는데 이러한 요소들은 내적으로 밀접하게 연결되어 있으므로, '잘 조직된 교육과정(a well-articulated curriculum)'은 학생들이 계속 공부를 해 나가면서 더욱 세련된 수학적 아이디어를 학습하도록 도전감을 불러일으키며(NCTM, 2000b, p.15), 우정호(1998)는 기하는 우리가 살고 있는 세계를 질서 정연한 방법으로 표현하고 설명하는데 도움을 주고 수학의 다른 주제와 밀접한 관련을 맺고 있다고 하였다. NCTM(2000b)에서도 저학년 때부터 학생들은 다양한 도형을 직접 손으로 만지는 경험을 통하여, 그리고 2차원 도형과 3차원 도형을 회전하고 줄이고 변형할 수 있는 기술 공학을 활용하여 시각화 기술을 발달시킨 후, 학생들은 관점을 분석하고 그려보고, 구성요소를 세어보며, 볼 수는 없으나 추론될 수 있는 속성들을 기술할 수 있어야 한다(p.50)라고 기술하고 있다.

---

* 접수일(2010년 1월 12일), 심사(수정)일(2010년 1월 18일), 게재확정일자(2010년 2월 8일)
* ZDM 분류 : D52
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : Skeleton Tower Problem, 초등수학영재교육, 수와 연산영역, 도형 영역.

1) 개정 2007 수학과 교육과정에서는 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수・학습에서 유의할 내용으로 "수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다."라고 기술하고 있다.

제 7차 교육과정(교육부, 1997)에서는 도형영역에 공간 감각을 기르기 위하여 1-나 단계에서부터 6-가 단계까지 점판의 활용하거나, 평면도형의 밀기, 뒤집기, 돌리기와 거울에 보이는 상의 관찰을 통한 도형 감각 기르기, 도형 덮기, 쌓기나무 만들기 등의 다양한 내용을 도입하고 있다.

도형교육에서 공간 감각의 발달을 시키는 목적은 실세계를 이해하고 표현하고 활용하기 위한 기본적인 소양을 기르는데 있는데, 공간 감각은 기하적 관계성인 방향, 방위, 공간에서의 사물의 투영, 도형과 사물사이의 상대적인 크기와 모양 등에 초점을 둔 경험을 통해 발달한다. 공간 지각력 향상의 바탕이 되는 기하적 관계를 이해하는데 기본이 되는 시각화 기능과 공간 추론력을 기르기 위해 공간에서 관찰자의 위치나 물체의 위치에 따라 시각적으로 보이는 현상을 기하적 관계와 연결시켜 표현하고 해석하도록 해야 하며, 공간 지각력을 발달시키기 위해서는 평면도형을 입체도형으로 표현하고 해석하는 일과, 입체도형을 보이는 위치에 따라 평면으로 전환하는 능력을 포함한다(한국교육개발원, 1999, 초수 2-5 전개도와 겨냥도).

한편, Skeleton Tower문제는 1980년 이후 미국수학교육 개혁운동이 진행될 당시 대수와 기하의 통합 교육과정의 예로 중학교에서 소개되었으나, Bay-Williams, Jennifer M., Skipper, Elizabeth M. & Eddins, Susan K.(2004)는 NCTM Academy 전문가 과정인 대수 연구과정 9-12학년 대수 강연에서 이용하였다. Skeleton tower 문제는 산술적인 세기, 정육면체의 개수를 세는 다양한 규칙이나 가능성을 열거하기, 도형 영역에서 습득된 공간 감각의 정도, 대수 방정식의 사용과 같은 다양한 방법으로 접근할 수 있으므로(Bay-Williams 등, p.23), 초등수학 과정에서도 충분히 활용 가능한[2] 자료이다. Bay-Williams 등의 방법들은 학생들이 이전에 갖고 있던 여러 지식과 경험을 통해서 과제에 다가갈 수 있게 한다. 특히 Bay-Williams 등은 여섯 가지 방법을 소개하고 있는데, 첫째 방법은 중앙기둥 1개와 네 개의 작은 계단으로 나누어서 정육면체의 개수를 세기, 둘째 방법은 가장 큰 계단 2개로 생각하여 정육면체의 개수를 세기, 셋째 방법은 수평인 층별로 나누어 정육면체의 개수를 파악하기, 넷째와 다섯째 방법은 "계단"의 "모서리"를 가지고 다른 "모서리"의 꼭대기에 "채우기"위해 뒤집기이며, 여섯째 방법은 표를 사용하여 이차 패턴으로 인식하는 것으로 나눌 수 있다. 제 7차 수학과 교육과정의 규칙성과 함수 영역에서 초등 단계, 특히 저·중학년에서는 대부분 패턴과 관련된 내용이 차지하게 되므로, 여섯째 방법은 초등학생들이 해결하기에는 무리가 있겠지만 위의 다섯 가지 방법이나 또 다른 방법의 풀이는 얼마든지 이끌어 낼 가능성을 가지고 있는데, 이는 수학적 창의성과 밀접한 관계가 있다. 남승인(1998)은 "수학적 창의성을 알아보는 방법 중의 한 예로써 주어진 문제를 여러 가지 방법으로 해결하거나 기성의 형식적인 풀이 방법이 아닌, 즉 교사가 예상하지 못했던 비형식적인 방법으로 문제를 해결한 경우에는 창의성이 높은 점수를 줄 수 있을 것이다."(p. 44)라고 주장하고 있다.

따라서, 본 연구에서는 J대학교 부설 영재교육원에서 실시한 2010학년도 초등수학반 영재선발시험

---

2) 남승인(1998)은 "초등학교 수준의 수학 영재는 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며 이에 대해 성공적이고 그것을 설명하려 한다"라고 주장한다.

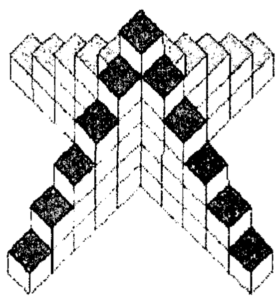
에 응시한 3, 4학년 학생[3] 388명을 대상으로, PBS Mathline(2003, Bay-Williams 등, 2004, 재인용)에서 소개된 Skeleton Tower 문제를 초등학교 3, 4학년 수준에 적합하게 변형한 '4층 Skeleton Tower' 문제를 해결하게 한 후, 이들의 문제해결 실태를 분석함과 동시에 수학적 창의성의 정도를 파악하여 장차 영재교육을 담당할 교사를 위한 시사점을 알아보고자 한다.

II. 이론적 배경

1. Skeleton Tower(Bay-Williams 등, 2004)

Skeleton Tower가 처음 소개된 것은 미국의 수학교육개혁운동의 일환으로 대수와 기하의 통합 교육과정의 한 예로 1980년대 초에 소개되었으나, Bay-Williams 등(2004)은 NCTM Academy 전문가 과정인 대수 연구과정(9-12학년 대수강연)에서 사용한 내용을 중심으로 간단하게 소개하고자 한다. 아래의 내용은 2005년 8월 12일 대한수학교육학회 2005년도 제49회 집중세미나에서 사용된 자료집의 내용을 참고하여, 요약한 것이다.

NCTM Academy 전문가 과정의 대수 연구과정 9-12학년 대수강연에서 PBS Mathline(2003)에서 언급된 Skeleton Tower이라는 3차원 패턴을 이용하였다. Skeleton Tower 패턴에서 첫 번째 모양은 하나의 정육면체(탑의 꼭대기)이고, 앞의 층에 더 넓은 바닥을 추가하여 새로운 모양을 만드는데, 두 번째 모양까지 모두 여섯 개의 정육면체를 사용하였는데, <그림 2.7>은 6층탑을 설명하고 있으며, 학생들이 할 수 있는 여러 가지 방법으로 탑을 기술하게 할 수 있다.



<그림 2.7> 6층 Skeleton Tower
(Bay-Williams 등(2004)에서 재인용)

이런 다양한 접근 방법을 살펴보면, 첫째, 탑을 중앙기둥 1개와 네 개의 계단으로 나누어 보는 것 ($4\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}+n$), 둘째, 두 개의 계단으로 본 것으로 두 개의 계단은 서로 직각을 이루고 있고, 중앙에 쌓인 부분은 두 계단 모두에서 세어지므로 빼야하는 것($2\{1+2+3+\cdots+n+(n-1)+\cdots+3+2+1\}-n$),

3) 기본적인 지원 자격은 각 초등학교에서 각 학년별로 수학성취도가 상위 5% 이내인 3, 4학년 학생이어야 한다.

셋째, 탑을 각각의 수평의 층에 놓인 정육면체의 개수로 설명(꼭대기 층은 정육면체가 1개, 다음 층은 5개, 그 다음 층은 9개, 이렇게 계속되며, 기호로 표현하면 패턴은 {1+5+9+ … +(4n+1)}이다), 넷째, "계단"의 "모서리"를 가지고 다른 "모서리"의 꼭대기에 "채우기"위해 뒤집는 것(계단을 가운데 기둥과 밑변이 n이고 높이가 (n-1)인 직각을 이루는 두 개의 수직 입체로 보는 것이며 2{n×(n-1)}+n의 표현을 만든다), 다섯째, 이 접근 방법을 조금 변형하면, 각 변이 n개인 정육면체로 된 두개의 정사각형을 만들고, 각각의 계단은 가운데 기둥을 공유하고 있으므로, 2(n×n)-n의 공식을 만들어 낼 수 있다. 여섯째, 중학교 학생들처럼, 고등학교 학생들도 서로 다른 높이의 탑을 만들 때 필요한 정육면체의 개수를 표를 만들 수 있다.

첫 번째 차		1	1	1	1	1	1	
중앙기둥의 높이(n)	1	2	3	4	5	6	7	…
정육면체 개수의 합(T)	1	6	15	28	45	66	91	…
첫 번째 차		5	9	13	17	21	25	
두 번째 차			4	4	4	4	4	

<그림 2.8> Skeleton Tower의 첫 번째 차와 두 번째 차
(Bay-Williams외 등(2004)에서 재인용)

위의 표에서 계차가 상수라는 사실은 정육면체의 개수가 이차 패턴으로 증가한다는 것을 나타낸다. 특별히, 이러한 함수에 의해 일반화되는 합의 순서쌍은 꼭지점이 (1/4, -1/8)이고, x축과의 교점 0과 1/2인 포물선의 그래프 위에 놓이게 된다. (Bay-Williams 등, 2004, pp.23-25)

2. 4층 Skeleton Tower 문제에서 다양한 유형의 정답이 도출될 수 있는 가능성

초등학생의 경우에는 여섯째 방법은 불가능하다고 하더라도 위의 다섯 가지 방법[4] 외에 또 다른 유형의 풀이가 나타날 가능성이 있는데, 그 이유는 제 7차 수학과 교육과정의 규칙성과 함수 영역의 내용 중, 초등 단계, 특히 저·중학년에서는 대부분 패턴과 관련된 내용이 차지하게 되므로 '규칙성과 함수'영역의 내용과 '도형영역'의 내용적 지식이 잘 연결되어 있는 초등수학분야에 잠재능력을 가진 아동들이라면, Bay-Williams 등(2004)에 의해 소개된 방법을 포함하여 또 다른 방법의 답을 찾을 가능성 있다[5]. 아래의 <표 2-1>은 제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1997)에서 규칙성과 함수 영역과 공간 감각을 기르는 내용이 포함된 도형 영역 중, 초등학교 4학년까지 다루는 내용이다.

4) 넷째 방법과 다섯째 방법은 동일한 방법이므로 본 연구에서는 동일한 유형 내에 다른 항목으로 분류했다.

5) 본 연구를 수행한 결과, J도내의 각 초등학교에서 수학성취도가 상위 5%이내인 3, 4학년 학생들의 해결 방법들이 Bay-Williams 등(2004)에 의해 소개된 방법을 포함하면 약 40가지의 방법이 조사되었다.

<표 2-1> 규칙성과 함수 영역과 공간 감각 요소가 포함된 도형 영역 중, 초등학교 4학년까지 다루는 내용

	1-가 단계	1-나 단계	2-가 단계	2-나 단계
도형 영역		• 점판에서 평면도형 만들기	• 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기	
도형 영역	3-가 단계	3-나 단계	4-가 단계	4-나 단계
도형 영역	• 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기	• 거울에 비치는 상 관찰을 통한 감각 기르기		• 주어진 도형으로 여러 가지 모양 만들기
	1-가 단계	1-나 단계	2-가 단계	2-나 단계
규칙성과 함수	• 규칙적인 배열에서 규칙 찾기	• 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기 • 1-100의 수 배열표에서 규칙 찾기	• 다양한 변화의 규칙 찾기 • 1-100의 수 배열표에서 뛰어 세는 규칙 찾기	• 곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기
규칙성과 함수	3-가 단계	3-나 단계	4-가 단계	4-나 단계
규칙성과 함수		• 규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸미기	• 다양한 변화의 규칙을 수로 나타내고 설명하기 • 규칙을 추측하고 말이나 글로 표현하기	• 규칙과 대응

3. 수학적 창의성과 관련된 수학 영재의 일반적 특성

남승인(1998)이 요약한 수학 영재의 일반적인 특성 중, 수학적 창의성과 관련될 수 있을 것으로 보이는 항목을 발췌하면 다음과 같다:

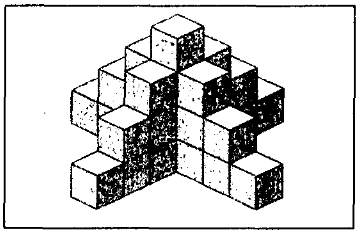
- 문제 해결 과정에서 중간단계를 생략하는 경향이 있으며 예상치 못한 방식으로 문제를 해결하는 경향이 있다.
- 규칙성과 관계를 발견하기를 즐기며 이에 대해 성공적이고 그것을 설명하려한다.
- 수학적 추론 과정을 단축할 수 있고 또한 사고의 과정을 뒤바꿀 수 있다.
- 자신이 흥미를 갖는 한 문제에 대해 장시간 집중할 수 있으며, 문제 해결 방법이 만족스럽지 않을 경우 그 대안을 빨리 찾는다.
- 이미 해결한 문제와 새로 해결할 문제 사이의 관계를 보다 잘 파악하여 독창적인 문제에 관심을 많이 가지고, 그러한 문제해결을 즐긴다. (p.43)

4. 연구 방법

1) 연구 대상 및 평가 문항

본 연구에서는 J대학교 부설 영재교육원에서 실시한 2010학년도 초등수학반 영재선발시험에 응시한 3, 4학년 학생 388명의 학생을 대상으로, PBS Mathline(2003, Bay-Williams 등(2004)에서 재인용)

에서 소개된 Skeleton Tower 문제를 초등 3, 4학년에게 적합하도록 변형한 '4층 Skeleton Tower (<그림 2-1>)'을 제시하여 '잠정적 영재 집단6)'에 속한 아동들의 문제해결 실태를 분석함과 동시에 수학적 창의성의 정도를 파악하여 장차 영재교육을 담당할 교사를 위한 시사점을 알아보고자 한다.



<그림 2-1> 4층 Skeleton Tower(교육인적자원부, 2003, 수학 6-가 단계, p. 51)

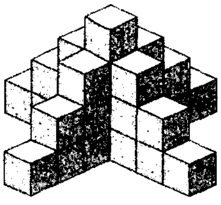
2) 연구 방법과 절차

(1) 영재선발 시험에 응시한 388명 학생들의 답안지를 분석하여 답안 유형을 분류한다.
(2) 학생들의 답안지를 분석한 후, 전체 답안 내용을 7개의 유목별로 분류한다.
(3) 같은 유목으로 분류된 내용 중에서 풀이가 다른 경우는 세부 항목으로 분류한다.
(4) 분류된 자료를 SPSS Win 12.0으로 유목별, 항목별로 빈도분석과 교차분석을 실시한다.
(5) 문제해결 실태를 분석함과 동시에 수학적 창의성의 정도를 파악하여, 영재교육을 담당하는 교사들을 위한 시사점을 알아본다.

III. 연구의 실제

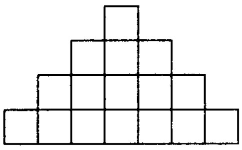
1. 평가 문항

아래와 같은 모양에서 사용된 쌓기나무의 개수를 세려고 합니다. 셀 수 있는 방법을 최대한 많이 찾아내고, 각 방법을 그림이나 식을 사용하여 설명하시오.

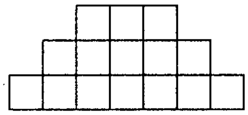


6) J대학교 부설 영재교육원 초등수학반에 지원할 수 있는 기본 자격이 각 초등학교에서 각 학년별로 수학성취도가 상위 5% 이내인 3, 4학년 학생이므로, 조석희(2000) 및 남승인(2005)의 영재 판별 방법 중의 1단계 내용에 의하면 잠정적인 영재집단으로 보아도 무방할 것이다.

2. 본 연구에서 분류한 유형들과 항목들을 이해하는데 필요한 기본 자료들



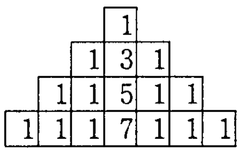
가장 큰 계단(16개로 이루어진 것)



두 번째로 큰 계단(15개로 이루어진 것)

중간 계단(10개로 이루어진 것)

가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)



유형 6의 항목5(입체도형을 평면으로 변형하여 나무의 개수를 기록)

3. 본 연구에서 분류한 유형과 항목들

Bay-Williams 등(2004)에서 소개한 방법과 본 연구에서 분류한 유형-항목사이의 관계를 살펴보면 <표 3-1>과 같으며, 아주 단순한 방법인 유형1과 유형7의 항목1에서 6까지는 제외시켰다.

<표 3-1> Bay-Williams 등(2004)에서 소개한 방법과 본 연구에서 분류한 유형-항목사이의 관계

Bay-Williams 외 2인(2004)에서 소개한 방법	본 연구에서 분류한 유형-항목
첫째 방법(중앙 기둥과 가장 작은 계단 4개)	유형4의 항목 1번
둘째 방법(가장 큰 계단 2개)	유형3의 항목 7번과 8번
셋째 방법(수평인 층으로 구분)	유형2의 항목 1, 2, 3번
넷째 방법(뒤집기)	유형 5의 항목1
다섯째 방법(뒤집기)	유형 5의 항목2
여섯째 방법(대수적으로 접근)	유형7의 항목7
관련 자료가 없음	유형2의 항목4 유형3의 항목1, 2, 3, 4, 5, 6 유형4의 항목2, 3, 4, 5, 6, 7 유형5의 항목3, 4 유형6의 항목1, 2, 3, 4, 5, 6

유형2의 항목4는 점화 관계를 인식한 경우이고, 유형5는 공간감각적 요소, 유형6은 한국교육개발원(1999)이 주장(: 공간 지각력을 발달시키기 위해서는 평면도형을 입체도형으로 표현하고 해석하는 일과, 입체도형을 보이는 위치에 따라 평면으로 전환하는 능력을 포함하는 경우)에 해당한다.

<표 3-2> 본 연구에서 분류한 유형 및 항목

구분	항목	답안의 예
유형1	겉으로 드러난 모양을 보고 쌓기나무의 개수를 세는 유형	
	1	층별로 구분하여 쌓기나무의 개수를 단순히 세기, 1+5+9+13=28
	2	좌측에서 우측방향으로 이동하면서, 앞에서 본 쌓기나무의 개수를 세기, 1+2+3+16+3+2+1=28
	3	겉면과 보이지 않는 부분으로 구분하여 세기: 겉면: 6×4 + 1 =25, 중앙기둥의 속면이 3개 이므로, 모두 28개
	4	주어진 쌓기나무의 윗부분에 쌓기나무의 개수만큼 수로 표시하여 그 수들을 모두 더한다.
	5	위에서 보면 13개, 앞에서 보면 3개씩 4개이므로 12개, 중앙기둥 중 보이지 않는 부분: 3개, 총 28개
유형2	층별로 구분하여 규칙(덧셈, 곱셈, 점화형)을 찾아 쌓기나무의 개수를 세는 유형	
	1	층별로 구분하여 쌓기나무의 개수를 곱셈식을 사용하여 세기 (1×1)+{(1×4)+1}+{(2×4)+1}+{(3×4)+1}=28
	2	항목 1과 다른 형태: (4×4-3)+(3×4-3)+(2×4-3)+1=28
	3	1층: 7×2-1=13, 2층: 5×2-1=9, 3층: 3×2-1=5, 4층: 1×2-1=1 또는 (맨 위층의 개수 + 맨 아래층의 개수)×2
	4	각 층 사이의 점화식 관계로 인식: 1+(1+4)+{(1+4)+4}+[{(1+4)+4}+4] = 28

<표 3-2> 계속

구분	항목	답안의 예
유형3	크고 작은 계단으로 분할하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형	
	1	주어진 탑을 1개의 가장 큰 계단(16개로 이루어진 것)과 그 다음 크기의 계단(15개로 이루어진 것)으로 생각한 후, 중앙기둥의 3개가 겹친다. 16 + 15 -3 = 28
	2	주어진 탑을 2개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)과 1개의 가장 큰 계단으로 나누고 큰 계단을 세로로 센다. 6×(2) +(16) 또는 6×(2) +(1+2+3+4+3+2+1)
	3	주어진 탑을 2개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)과 1개의 가장 큰 계단으로 나누고 큰 계단을 가로로 센다. 6×(2) + (1+3+5+7), 또는 (1+2+3)×2 + (1+3+5+7)
	4	탑을 1개의 중간크기의 계단(10개로 이루어진 것)과 3개의 작은 계단(6개로 이루어진 것)으로 나누고, 중간계단을 가로 또는 세로로 센다. 6×3 +(1+2+3+4), (1+2+3)×3 + (1+2+3+4) 또는 6×3 + (10)
	5	중간 계단 4개로 분리한 경우: (1+2+3+4)×4 - (4×3) 또는 10×4 - (4×3)
	6	정면에서 보이는 부분(13개), 뒷부분(13개), 겹쳐지는 것(1개), 중앙기둥의 부분 중 보이지 않는 부분(3개), 13×2-1+ 3 = 28
	7	탑을 2개의 가장 큰 계단으로 보는데, 세로로 센 후, 중앙기둥의 4개가 겹친다. (1+2+3+4+3+2+1)×2 -4 또는 (16) × 2- 4
	8	탑을 2개의 가장 큰 계단으로 보는데, 가로로 센 후, 중앙기둥의 4개가 겹친다. (1+3+5+7)×2 -4
유형4	쌓기나무의 일부를 먼저 떼어내고 나머지를 센 뒤, 떼어 낸 것을 사용하는 유형	
	1	중앙기둥을 뺀 뒤, 가장 작은 계단 모양 4개로 인식, 6×4 + (4) 또는 (1+2+3)×4 + 4
	2	중앙기둥을 뺀 뒤, 세로로 세기(바깥쪽에서부터 안쪽으로) (1×4)+(2×4)+(3×4)+4 또는 (1+1+1+1)+(2+2+2+2)+(3+3+3+3)+4
	3	중앙기둥을 뺀 뒤, 가로로 세기(중앙기둥을 뺀 뒤, 위(아래)에서부터 아래(위)쪽으로) (3×4)+(2×4)+(1×4)+4 또는 (3+3+3+3)+(2+2+2+2)+(1+1+1+1)+4
	4	4층의 1개를 뺀 뒤, 세로로 3개를 1묶음으로 묶어, 수직으로 절단함 3×5=15, 2×4=8, 1×4=4, 따라서, 15+8+4+1(4층)=28개
	5	4층의 1개를 뺀 뒤, 같은 층 5개를 1묶음으로 묶어 수직으로 절단함 5×3=15, 3×4=12, 따라서, 15+12+1(4층)=28개
	6	4층의 1개를 뺀 뒤, 규칙 발견함, 4층의 1개를 빼면, 가장 작은 계단 4개인 6×4=24, 중앙기둥 3개, 처음 뺀 것 1개, 총 28개
	7	4층의 1개를 뺀 뒤, 둘째 큰 계단 2개, 15×2 - 3(중앙기둥 중복점)+1(4층)=28(개)
유형5	"계단"의 "모서리"를 가지고 다른 "모서리"의 꼭대기에 "채우기"위해 뒤집기	
	1	가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)을, 다른 가장 작은 작은 계단 꼭대기에 뒤집어 채운다. (3×4) × 2 + 4 또는 { (3+1) +(2+2) +(1+3) }× 2 +4
	2	중간계단을 두 개로 생각해서, 그 위에 6개로 이루어진 가장 작은 계단을 꼭대기에 뒤집어 채운다. 그러면 중앙 부분이 2번 들어 갔으므로, 한번 뺀다. (4×4) × 2 - 4
	3	16개로 이루어진 가장 큰 계단 1개와 6개로 이루어진 가장 작은 계단 2개를 생각하여, 그 위에 작은 계단을 꼭대기에 뒤집어 채운다. 7×4 또는 4×7
	4	각 층에 있는 쌓기나무의 개수가 1층의 개수인 모두 13개라고 본 뒤, 2층에는 4개, 3층에는 8개, 4층에는 12개가 없으므로, 52-24=28. (13×4)-(4+8+12)=52-24=28

<표 3-2> 계속

구분	항목	답안의 예
유형6	평면도형으로 전환하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형	
	1	주어진 쌓기나무를 평면도형인 십자모양으로 인식하여 총 개수를 구한다.
	2	십자모양으로 표현한 후, 곱셈으로 표현함: (1+2+3+4)×4-(4×3)(∵4가 3번 중복)=28개
	3	각 층마다 다른 크기의 십자모양에서 가운데 부분이 반복되는 규칙을 발견하여 계산, 4층: 1+1-1=1, 3층: 3+3-1=5, 2층: 5+5-1=9, 1층: 7+7-1=13
	4	각 층마다 다른 크기의 십자 모양으로 인식함
	5	입체도형을 평면으로 변형하여 나무의 개수를 기록
	6	기둥 빼고 위에서 내려다보면 1, 2, 3, 3, 2, 1이 붙은 평면 그림에 기둥의 개수 더하기, 12×2 +4 =28
유형7	더 작은 도형으로 나누기, 쌓기나무를 재배열, 혹은 대수식을 이용한 유형	
	1	기준을 잡아서 더 작은 도형(가장 작은 계단보다 더 작게 나눈 것)으로 나누어 본다.
	2	항목 1과 다른 방법
	3	항목 1, 2와 다른 방법
	4	쌓기나무를 분해하여 변형한다.
	5	쌓기나무를 분해하여 배열을 변형한다.
	6	쌓기나무를 분해하여 배열을 변형하되, 항목 5와 다른 방법
	7	대수식을 이용하여 문제를 해결한다.

3. 전체적인 분석 결과

연구 대상은 J도내의 각 초등학교에서 수학성적이 상위 5%이내인 3, 4학년 388명이었으며, 각 학년별 인원수와 4층 Skeleton Tower에서 문제풀이를 전혀 시도하지 못한 학생의 수는 아래의 표와 같다.

<표 3-3> 연구대상 및 문제해결을 전혀 시도하지 못한 사례

구분	연구 대상		문제해결 시도를 전혀 못한 학생	
	인원수	백분율	인원수	백분율
3학년	193명	49.7%	58명	58%
4학년	195명	50.3%	42명	42%
계	388명	100%	100명	100%

문제풀이를 전혀 시도하지 못한 학생은 100명으로 전체 응시인원의 25.8%에 해당하며, 이를 학년별 응시인원으로 구분해보면, 3학년은 3학년 응시 인원의 30.1%, 4학년은 4학년 응시 인원의 25.1%에 해당한다. 본 연구에서 분류한 해답의 유형이 41가지라는 사실에 비추어 볼 때, 초등수학 영재 선발시험에 응시한 인원의 25.8%가 백지 답안을 제출했을 뿐만 아니라, 단 하나의 방법만 기술하였으나 풀이과정에서 수학적 오류가 있는 학생이 모두 9명(3학년 8명, 4학년 1명)으로 분석되었다. 따라

서, 4층 Skeleton Tower문제에서 0점 처리가 된 아동들의 수가 총 109명(3학년: 66명, 4학년: 43명)으로 전체 연구대상의 28.1%에 이르렀다. 또한, 1개의 정답을 얻은 경우도 107명으로 전체 연구대상의 27.6%였다. 4층 Skeleton Tower문제에서 학생들이 구한 정답의 개수를 정리하면 <표 3-4>와 <표 3-5>와 같다.

<표 3-4> 1개의 정답만 찾은 사례 수

<table>
<tr><th rowspan="2">구분</th><th colspan="3">유형1</th><th colspan="2">유형2</th><th colspan="2">유형3</th><th colspan="4">유형4</th><th rowspan="2">총계</th></tr>
<tr><th>항목1</th><th>항목4</th><th>항목5</th><th>항목1</th><th>항목4</th><th>항목2</th><th>항목4</th><th>항목1</th><th>항목2</th><th>항목4</th><th>항목6</th></tr>
<tr><td>3학년 인원수</td><td>7</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>40</td><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>57명</td></tr>
<tr><td>4학년 인원수</td><td>7</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>32</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>50명</td></tr>
<tr><td rowspan="2">계</td><td>14명</td><td>2명</td><td>1명</td><td>2명</td><td>2명</td><td>1명</td><td>1명</td><td>72명</td><td>4명</td><td>1명</td><td>7명</td><td rowspan="2">107명</td></tr>
<tr><td colspan="3">17명</td><td colspan="2">4명</td><td colspan="2">2명</td><td colspan="4">84명</td></tr>
</table>

<표 3-5> 2개 이상의 정답을 찾은 사례 수

정답의 개수	2개	3개	4개	5개	6개	7개	총계
3학년 인원수	32	18	9	6	0	1	66명
4학년 인원수	31	41	17	5	1	1	96명
계	63명	59명	26명	11명	1명	2명	162명

위의 <표 3-4>와 <표 3-5>에서 보듯이, 1개의 정답만 완성한 경우는 유형4(84명), 유형1(17명), 유형2(4명), 유형3(2명) 순으로 분석되었다. 각 학년별로 살펴보면 107명 중, 3학년이 57명(53.7%), 4학년이 50명(46.7%)이고, 가장 많이 해결한 답은 유형4의 항목1로서, Bay-Williams 등(2004)의 첫째 방법이며, 두 번째로 많이 해결한 문항은 유형1의 항목1로서, Bay-Williams 등(2004)의 셋째 방법의 특별한 경우[7]이다. 또한, 2개의 정답을 완성한 경우는 학년 간에 별 차이는 없었으나, 3개 이상에서는 4학년의 수가 훨씬 많았다. 그러나, 가장 많은 방법인 7가지 정답을 구한 학생은 3학년과 4학년이 각각 1명씩 나타났다.

그러나, 0개 또는 1개의 정답을 구한 아동들의 비율이 전체 연구대상자들의 55.7%인 216명(3학년: 연구대상자의 63.7%인 123명, 4학년: 연구대상자의 47.7%인 93명)에 이른다는 사실은, 4층 Skeleton Tower문제의 난이도를 감안하더라도, 본 연구에서 분류한 방법이 41가지이고, 시험에 응시한 학생들이 잠정적 영재집단이라는 점에서, 초등 저·중학년까지의 수학교육에서 도형영역에 대한 교수·학습 지도방법의 개선이 필요하다고 판단된다. 또한, 도형에 대한 공간 감각이나, 수와 연산 영역 및 규칙성의 인식 측면에서 수학 지식의 연결 능력이 현저히 떨어진다고 생각할 수 있으므로, 앞으로 영재교육 수업 시 교사들이 이런 분야에 좀 더 많은 경험을 강화시킬 필요가 요구된다.

---

7) 본 연구에서는 유형1과 유형2의 차이는 쌓기나무의 개수를 셀 때, 규칙성을 이용 여부에 따라 구분했으므로, Bay-Williams 외(2004)의 셋째 방법을 유형1과 유형2의 합집합으로 해석할 수도 있기 때문에 Bay-Williams 외(2004)의 셋째 방법과 유사하다고 해석한 것이다.

4. 각 유형별 분석[8]

1) 유형 1: 겉으로 드러난 모양을 보고 쌓기나무의 개수를 세는 유형

유형1은 항목1이 제일 많았고, 항목3, 5의 순으로 나타났으며, 유형1에서 복수 개를 구한 경우에는 항목1과 3, 항목1과 5의 순이었다. 주어진 입체도형을 좌측에서 우측방향으로 이동하면서 해결하는 항목2에도 5명의 학생이 있었는데, 이는 한국교육개발원(1999)의 주장인, 시각화 기능과 공간 추론력을 기르기 위해 공간에서 관찰자의 위치나 물체의 위치에 따라 시각적으로 보이는 현상을 기하적 관계와 연결시켜 표현하고 해석하도록 해야 한다는 내용과 일치하는 항목이다.

<표 3-6> 유형 1의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계	유형1의 항목들 중에서 복수의 정답을 구한 사례	학년별 인원수		계
	3	4			3	4	
1	40	56	96	1&2	1	1	2
2	2	3	5	1&3	2	4	6
3	5	12	17	1&4	1	1	2
4	1	3	4	1&5	3	1	4
5	6	3	9	2&3	0	1	1
				3&5	0	1	1
				1,2&3	1	0	1
				1,3&5	0	1	1

항목1: 층별로 구분하여 쌓기나무의 개수를 단순히 세기: 1+5+9+13=28
항목2: 좌측에서 우측방향으로 이동하면서, 앞에서 본 쌓기나무의 개수를 세기, 1+2+3+16+3+2+1=28
항목3: 겉면과 보이지 않는 부분으로 구분하여 세기: 겉면: 6×4 + 1 =25, 기둥의 속면: 3개이므로, 모두 28개
항목4: 주어진 쌓기나무의 윗부분에 쌓기나무의 개수만큼 수로 나타내어 더한다.
항목5: 위에서 보면 13개, 앞에서 보면 3개씩 4개이므로 12개, 축의 부분 중, 보이지 않은 부분: 3개, 총 28개

2) 유형 2: 층별로 구분하여 규칙(덧셈, 곱셈, 점화형)을 찾아 쌓기나무의 개수를 세는 유형

유형2는 항목1, 항목4의 순이었는데, 항목 1과4를 동시에 푼 경우는 1명에 불과했으나, 놀라운 일은 각 층간의 점화관계를 이용하여 해결한 학생들이 총 8명(3학년 3명, 4학년 5명)이었다.

<표 3-7> 유형 2의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계	유형2의 항목들 중에서 복수의 정답을 구한 사례	학년별 인원수		계
	3	4			3	4	
1	6	15	21	1&4	0	1	1
2	0	0	0				
3	0	2	2				
4	3	5	8				

항목1: 층별로 구분하여 나무의 개수를 곱셈으로 인식:
(1×1)+{(1×4)+1}+{(2×4)+1}+{(3×4)+1}=28
항목2: (4×4-3)+(3×4-3)+(2×4-3)+1=28
항목3: 1층: 7×2-1=13, 2층: 5×2-1=9, 3층: 3×2-1=5,
4층: 1×2-1=1 또는 (맨 위층의 개수 + 맨 아래층의 개수)×2
항목4: 각 층 사이의 점화식 관계로 인식 1+(1+4)+{(1+4)+4}+[{(1+4)+4}+4]=28

8) 아래의 표에서 1&2가 의미하는 것은 각 유형에서 항목1과 항목2에 해당하는 정답을 기술한 경우임

3) 유형 3: 크고 작은 계단으로 분할하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형

항목 4, 5, 3, 7, 2번순이었으며, 항목 4, 5, 3, 7, 2번을 사용해서 구한 학생의 수가 모두 54명[9]에 달했으며, Bay-Williams 등(2004)의 둘째 방법인 항목7과 항목8의 방법으로 해결한 아동들도 11명(항목7: 7명, 항목8: 4명)이다.

<표 3-8> 유형 3의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계(명)	유형3의 항목들 중에서 복수의 정답을 구한 사례	학년별 인원수		계(명)
	3	4			3	4	
1	0	2	2	1&2	0	1	1
2	3	4	7	3&4	1	1	2
3	4	4	8	4&5	2	0	2
4	9	12	21	7&8	0	1	1
5	8	6	14				
6	1	0	1				
7	2	5	7				
8	1	3	4				

항목1: 주어진 탑을 1개의 가장 큰 계단모양(16개로 이루어진 것)과 두 번째로 큰 계단(15개로 이루어진 것)로 생각한 후, 중앙기둥 중의 3개가 겹친다. 16 + 15 -3 = 28

항목2: 주어진 탑을 2개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)과 1개의 가장 큰 계단으로 나누고 큰 계단을 세로로 센다. 6×(2) +(16) 또는 6×(2) +(1+2+3+4+3+2+1)

항목3: 주어진 탑을 2개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)과 1개의 가장 큰 계단으로 나누고 큰 계단을 가로로 센다. 6×(2) + (1+3+5+7), 또는 (1+2+3)×2 + (1+3+5+7)

항목4: 탑을 1개의 중간 계단(10개로 이루어진 것)과 3개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)으로 나누고, 중간 계단을(가로 또는 세로)로 센다. 6×3 +(1+2+3+4), (1+2+3)×3 + (1+2+3+4) 또는 6×3 + (10)

항목5: 중간 계단 4개로 분리한 경우: (1+2+3+4)×4 - (4×3) 또는 10×4 - (4×3)

항목6: 정면에서 보이는 부분(13개), 뒷 부분(13개), 겹쳐지는 것(1개), 중앙기둥의 부분 중 보이지 않는 부분(3개), 13×2-1+ 3 = 28

항목7: 탑을 2개의 가장 큰 계단으로 보는데, 세로로 센 후, 중앙기둥의 4개가 겹친다. (1+2+3+4+3+2+1)×2 -4 또는 (16) × 2- 4

항목8: 탑을 2개의 가장 큰 계단으로 보는데, 가로로 센 후, 중앙기둥의 4개가 겹친다. (1+3+5+7)×2 -4

4) 유형 4: 쌓기나무의 일부를 먼저 떼어내고 나머지를 센 뒤, 떼어 낸 것을 사용하는 유형

항목 1, 2, 3, 6번순이었으며, 정답을 낸 사례 수의 총합이 288이고, 복수 개를 답한 아동이 54명이므로 문제 풀이를 시도한 학생들의 상당한 수의 아동들이 문제를 해결한 것으로 보인다. 이는 가운데 기둥을 뺀 뒤, 작은 계단 모양 4개로 인식하거나, 가운데 기둥을 뺀 뒤, 바깥쪽에서부터 안쪽으로 들어가면서 세기(세로로 세기), 위(아래)에서부터 아래(위)쪽으로(가로로) 세는 방법이 초등학교 3, 4학년 학생들에게는 쉽게 접근할 수 있는 방법으로 해석되며, 항목 4, 항목5와 항목7의 풀이 방법은

9) 항목3과 4를 동시에 푼 경우가 2명, 항목4와 5를 동시에 푼 경우가 2명이었으므로, 57명에서 중복된 4명을 뺀 수이다.

수학적 창의성에 해당한다고 볼 수 있을 것이다.

<표 3-9> 유형 4의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계	유형4의 항목들 중에서 복수의 정답을 구한 사례	학년별 인원수		계(54명)
	3	4			3	4	
1	92	105	197	1&2	16	11	27명
2	22	26	48	1&3	8	9	17명
3	10	13	23	1&5	1	2	3명
4	0	1	1	1&6	0	1	1명
5	1	4	5	3&6	1	0	1명
6	5	7	12	1,2&3	0	1	1명
7	0	2	2	1,2&5	0	1	1명
계	130명	158명	288명	1,2&7	0	1	1명
				1,6&7	0	1	1명
				1,5&6	0	1	1명

항목1: 가운데 기둥을 뺀 뒤, 작은 계단 모양 4개로 인식, $6\times4 + (4)$ 또는 $(1+2+3)\times4 + 4$

항목2: 가운데 기둥을 뺀 뒤, 세로로 세기(바깥쪽에서부터 안쪽으로)
$(1\times4)+(2\times4)+(3\times4)+4$ 또는 $(1+1+1+1)+(2+2+2+2)+(3+3+3+3)+4$

항목3: 가운데 기둥을 뺀 뒤, 가로로 세기(가운데 기둥을 뺀 뒤, 위(아래)에서부터 아래 (위)쪽으로)
$(3\times4)+(2\times4)+(1\times4)+4$ 또는 $(3+3+3+3)+(2+2+2+2)+(1+1+1+1)+4$

항목4: 4층의 1개를 뺀 뒤, 세로로 3개를 1묶음으로 묶어, 수직으로 절단함
$3\times5=15$, $2\times4=8$, $1\times4=4$, 따라서, 15+8+4+1(4층)=28개

항목5: 4층의 1개를 뺀 뒤, 같은 층 5개를 1묶음으로 묶어 수직으로 절단함
$5\times3=15$, $3\times4=12$, 따라서, 15+12+1(4층)=28개

항목6: 4층의 1개를 뺀 뒤, 규칙 발견함, 4층의 1개를 빼면, $6\times4=24$, 기둥 3개, 처음1개, 총 28개.

항목7: 4층의 1개를 뺀 뒤, 둘째 큰 계단 2개, 15×2(둘째 큰 계단 2개) - 3(중복점)+1(4층)=28(개)

5) 유형 5: "계단"의 "모서리"를 가지고 다른 "모서리"의 꼭대기에 "채우기"위해 뒤집기

Bay-Williams 등(2004)의 넷째 방법[10]으로 해결한 학생은 6명이었으나, Bay-Williams 등(2004)의 다섯째 방법[11]으로 해결한 학생이 전혀 없었다. 그러나, Bay-Williams 등에서 소개하지 않은 항목3의 방법인 7×4를 인식한 경우에 1명, 아주 독창적인 사고인 항목4의 방법에 3명의 학생이 나왔다는 사실은 장차 초등 영재교육 효과의 가능성을 희망적으로 보여주는 듯하다.

10) 본 연구의 유형5의 항목1에 해당함

11) 본 연구의 유형5의 항목2에 해당함

<표 3-10> 유형 5의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계
	3	4	
1	4	2	6
2	0	0	0
3	0	1	1
4	0	3	3
계	4	6	10

항목1: 6개로 이루어진 가장 작은 계단을, 다른 작은 계단 꼭대기에 뒤집어 채운다.
항목2: 10개로 이루어진 중간 계단을 두 개로 생각해서, 그 위에 6개로 이루어진 작은 계단을 꼭대기에 뒤집어 채운다. 그러면 중앙 부분이 2번 들어갔으므로, 한번 뺀다.
항목3: 16개로 이루어진 가장 큰 계단 1개와 6개로 이루어진 가장 작은 계단 2개를 생각하여, 그 위에 작은 계단을 꼭대기에 뒤집어 채운다.
항목4: 각 층에 있는 쌓기나무의 개수가 1층의 개수인 모두 13개라고 본 뒤, 2층에는 4개, 3층에는 8개, 4층에는 12개가 없으므로, 52-24=28. (13×4)-(4+8+12)=52-24=28

6) 유형 6[12]: 평면도형으로 전환하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형

<표 3-11> 유형 6의 학년별 사례 수

항목	학년별 인원수		계
	3	4	
1	6	15	21
2	0	1	1
3	0	1	1
4	2	8	10
5	0	1	1
6	3	0	3
계	11	26	37

복수 항목에 답한 사례	학년별 인원수		계
	3	4	
1&2	0	1	1
1&3	0	1	1
1&4	0	2	2
1&5	0	1	1

항목1: 주어진 쌓기나무를 평면도형인 십자모양으로 인식하여 총 개수를 구한다.
항목2: 십자모양으로 표현한 후, 곱셈으로 표현함,
(1+2+3+4)×4-(4×3) (∵4가 3번 중복)=28개
항목3: 각 층마다 다른 크기의 십자모양에서 가운데 부분이 반복되는 규칙을 발견하여 계산,
4층: 1+1-1=1, 3층: 3+3-1=5,
2층: 5+5-1=9, 1층: 7+7-1=13
항목4: 각 층마다 다른 크기의 십자 모양으로 인식함
항목5: 입체도형을 평면으로 변형하여 나무 개수를 기록
항목6: 기둥 빼고 위에서 내려다보면 1, 2, 3, 3, 2, 1이 붙은 평면 그림에 기둥의 개수 더하기, 12×2 +4 =28

항목1(21명), 항목4(10명)순으로 나왔지만 각 층마다 십자모양을 다르게 인식하는 항목 4는 항목1보다는 좀 더 발전된 도형 감각을 가졌다고 볼 수 있다. 또한 항목3과 같이 십자모양에서 규칙을 인식하는 경우도 1명이 존재했다.

12) 한국교육개발원(1999)의 "초수 2-5 전개도와 겨냥도"에 의하면 "공간 지각력을 발달시키기 위해서는 평면도형을 입체도형으로 표현하고 해석하는 일과, 입체도형을 보이는 위치에 따라 평면으로 전환하는 능력을 포함한다."라고 하므로, 유형 6은 공간 지각력을 발달시키는 문항으로 해석할 수 있다.

7) 유형 7: 더 작은 도형으로 나누기, 쌓기나무를 재배열, 혹은 대수식을 이용한 유형

<표 3-12> 유형 7의 학년별 사례 수

<table>
<tr><th rowspan="2">항목</th><th colspan="2">학년별 인원수</th><th rowspan="2">계</th><th rowspan="2">복수 항목에 답한 사례</th><th colspan="2">학년별 인원수</th><th rowspan="2">계</th></tr>
<tr><th>3</th><th>4</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td><td>1&4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td colspan="4" rowspan="7">항목1: '3. 자료 분석의 본 연구에서 분류한 유형과 항목들을 이해하는데 필요한 그림들'에 나온 것보다 더 작게 도형을 분할해서 인식한 경우이다.
항목 2, 3: 항목1과는 다르게 기준을 잡아서 더 작은 도형으로 나누어 본다.
항목4: 쌓기나무를 분해하여 변형한다.
항목5, 6: 쌓기나무를 분해하여 배열을 변형한다.
항목7: 대수식을 이용하여 문제를 해결한다.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>계</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td></tr>
</table>

8) 유형별 교차분석 결과: 의미 있는 사례 수가 극히 적었으나, 유형4와 관계된 항목으로 분석되었으며, 6명 이상인 경우를 정리하면 다음과 같다.

<표 3-13> 유형별-항목별 교차 분석

<table>
<tr><th colspan="2">두 유형을 동시에 해결함</th><th>인원수</th><th>유형별-항목 별 내용</th></tr>
<tr><td rowspan="5">유 형 4 의 항목1와</td><td>유형2의 항목1</td><td>14명</td><td>유형4-항목1: 가운데 기둥을 뺀 뒤, 작은 계산 모양 4개로 인식</td></tr>
<tr><td>유형3의 항목4</td><td>14명</td><td rowspan="4">유형2-항목1: 층별로 구분하여 나무의 개수를 곱셈으로 인식
유형3-항목4: 탑을 1개의 중간 계단(10개로 이루어진 것)과 3개의 가장 작은 계단(6개로 이루어진 것)으로 나누고, 중간 계단을(가로 또는 세로)로 센다.
유형3-항목5: 중간 계단 4개로 분리한 경우
유형6-항목1: 주어진 쌓기나무를 평면도형인 십자모양으로 인식하여 총 개수를 구한다.
유형7-항목1: 가장 작은 계단보다 더 작게 나눔</td></tr>
<tr><td>유형3의 항목5</td><td>6명</td></tr>
<tr><td>유형6의 항목1</td><td>7명</td></tr>
<tr><td>유형7의 항목1</td><td>8명</td></tr>
<tr><td rowspan="2">유 형 4 의 항목2과</td><td>유형3의 항목8</td><td>1명</td><td>유형4-항목2: 가운데 기둥을 뺀 뒤, 세로로 세기 (바깥쪽에서부터 안쪽으로)</td></tr>
<tr><td>유형6의 항목4</td><td>6명</td><td>유형3-항목8: 탑을 2개의 가장 큰 계단으로 보는데, 가로로 센 후, 중앙기둥의 4개가 겹친다.
유형6-항목4: 각 층마다 다른 크기의 십자 모양으로 인식함</td></tr>
</table>

교차분석에서 분석된 학생들의 경우에는 도형영역과 수와 연산 영역 및 규칙성 함수 영역간의 연결이 잘 되어 있는 것으로 보이며, 공간 지각력(한국교육개발원, 1999)도 잘 발달되어 있다고 볼 수 있다.

IV. 결론 및 시사점

본 연구에서는 J대학교 부설 영재교육원에서 실시한 2010학년도 초등수학반 영재선발시험에 응시한 학생들을 대상으로, '4층 Skeleton Tower'를 제시하여 '잠정적 영재 집단'에 속한 아동들의 문제해결 실태를 분석함과 동시에 수학적 창의성의 정도를 파악하여 장차 영재교육을 담당할 교사를 위한 시사점을 알아보았다.

연구방법과 분석된 내용을 요약하면 다음과 같다.

연구 방법은 첫째, 연구 대상은 2010학년도에 J대학교 부설 영재교육원에서 실시한 초등수학반 영재선발시험에 응시한 3, 4학년 학생 388명이었으며, '4층 Skeleton Tower'를 평가문항으로 '잠정적 영재 집단'에 속한 아동들의 문제해결 실태를 분석하였으며, 둘째, 연구 방법과 절차는 다음과 같이 설정하였다.

(1) 영재선발 시험에 응시한 388명 학생들의 답안지를 분석하여 답안 유형을 분류한다.
(2) 학생들의 답안지를 분석한 후, 전체 답안 내용을 7개의 유목별로 분류한다.
(3) 같은 유목으로 분류된 내용 중에서 풀이가 다른 경우는 세부 항목으로 분류한다.
(4) 분류된 자료를 SPSS Win 12.0으로 유목별, 항목별로 빈도분석과 교차분석을 실시한다.
(5) 문제해결 실태를 분석함과 동시에 수학적 창의성 정도를 파악하여, 장차 영재교육을 담당할 교사를 위한 시사점을 알아본다.

이 방법과 절차에 따라 분석한 결과는 다음과 같다.

1. Bay-Williams 등(2004)에서 소개한 방법과 본 연구에서 분류한 유형-항목사이의 관계

Bay-Williams 등(2004)에서 소개한 방법과 본 연구에서 분류한 유형-항목사이의 관계를 <표 3-1>에 제시하였는데, 여기에는 Bay-Williams 등에서 소개한 방법인 여섯 가지가 모두 포함되었고, 수학적 창의성과 관련된 점화 관계를 인식한 경우와 한국교육개발원(1999)의 기준을 만족하는 공간 지각력을 발달시키는 유형을 포함하여, 총 41가지 방법이 유형별, 항목별로 분류되었다.

2. 전체적인 분석 결과를 살펴보면 다음과 같다.

1) 본 연구에서 분류한 해답의 유형이 41가지라는 사실에 비추어 볼 때, 초등수학 영재 선발시험에 응시한 인원의 25.8%가 백지 답안을 제출했을 뿐만 아니라, 단 하나의 방법만 기술하였으나 풀이 과정에서 수학적 오류가 있는 학생이 모두 9명으로 분석되었다. 따라서, 4층 Skeleton Tower문제에

서 0점 처리가 된 아동들의 수가 총 109명(3학년: 66명, 4학년: 43명)으로 전체 연구대상의 28.1%에 이르렀으며, 1개의 정답을 얻은 경우도 107명으로 전체 연구대상의 27.6%였다.

2) 4층 Skeleton Tower문제에서 학생들이 구한 정답의 개수를 <표 3-4>, <표 3-5>와 같이 분석하였는데, 1개의 정답만 완성한 경우는 유형4(84명), 유형1(17명), 유형2(4명), 유형3(2명) 순으로 분석되었다. 1개의 정답만 완성한 경우를 각 학년별로 살펴보면 107명 중, 3학년이 57명(53.7%), 4학년이 50명(46.7%)이고, 가장 많이 해결한 답은 유형4의 항목1(: Bay-Williams 등(2004)의 첫째 방법), 이며, 두 번째로 많이 해결한 문항은 유형1의 항목1(: Bay-Williams 등의 셋째 방법의 특별한 경우)이었다. 또한, 2개의 정답을 완성한 경우는 학년 간에 별 차이는 없었으나, 3개 이상에서는 4학년의 수가 훨씬 많았다. 가장 많은 방법인 7가지 정답을 구한 학생은 3학년과 4학년이 각각 1명씩 나타났다.

그러나, 0개 또는 1개의 정답을 구한 아동들의 비율이 전체 연구대상자들의 55.7%인 216명에 이른다는 사실은, 4층 Skeleton Tower문제의 난이도를 감안하더라도, 본 연구에서 분류한 방법이 41가지이고, 시험에 응시한 학생들이 잠정적 영재집단이라는 점에서, 초등 저·중학년까지의 도형영역에 대한 교수·학습 지도방법의 개선이 필요하다고 판단된다. 또한, 도형에 대한 공간 감각이나, 수와 연산 영역 및 규칙성의 인식 측면에서 수학 지식의 연결 능력이 현저히 떨어진다고 생각할 수 있으므로, 앞으로 영재교육 수업시 교사들이 이런 분야에 좀 더 많은 경험을 강화시킬 필요가 요구된다.

3. 각 유형별 분석은 다음과 같다.

1) 겉으로 드러난 모양을 보고 쌓기나무의 개수를 세는 유형인 유형1은 항목1, 3, 5의 순으로 나타났으며, 유형1에서 복수 개를 구한 경우에는 항목1과 3, 항목1과 5의 순이었다. 주어진 입체도형을 좌측에서 우측방향으로 이동하면서 해결하는 항목2의 경우에도 5명의 학생이 있었는데, 이는 시각화 기능과 공간 추론력을 기르기 위해 공간에서 관찰자의 위치나 물체의 위치에 따라 시각적으로 보이는 현상을 기하적 관계와 연결시켜 표현하고 해석하도록 해야 한다(한국교육개발원, 1999)는 내용과 일치하는 동시에 수학적 창의성과 관련된 유형으로 해석할 수 있다.

2) 층별로 구분하여 규칙(덧셈, 곱셈, 점화형)을 찾아 쌓기나무의 개수를 세는 유형인 유형2는 항목1, 항목4의 순이었는데, 항목 1과4를 동시에 푼 경우는 1명에 불과했으나, 놀라운 일은 각 층간의 점화관계를 이용하여 해결한 학생들이 총 8명(3학년 3명, 4학년 5명)이었다. 이 또한 수학적 창의성과 관련된 유형으로 해석할 수 있다.

3) 크고 작은 계단으로 분할하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형인 유형3은 항목 4, 5, 3, 7, 2번순이었으며, 항목 4, 5, 3, 7, 2번을 사용해서 구한 학생의 수가 모두 54명에 달했으며, Bay-Williams 등(2004)의 둘째 방법인 항목7과 8의 방법으로 해결한 아동들도 11명(항목7: 7명, 항목8: 4명)이다.

4) 쌓기나무의 일부를 먼저 떼어내고 나머지를 센 뒤, 떼어 낸 것을 사용하는 유형인 유형4는 정답을 낸 사례 수의 총합이 288이고, 복수 개를 답한 아동이 54명이므로 문제 풀이를 시도한 학생들

의 상당한 수의 아동들이 문제를 해결한 것으로 보인다. 이는 가운데 기둥을 뺀 뒤, 작은 계단 모양 4개로 인식하거나, 가운데 기둥을 뺀 뒤, 바깥쪽에서부터 안쪽으로 들어가면서 세기(세로로 세기), 위(아래)에서부터 아래(위)쪽으로(가로로) 세는 방법이 초등학교 3, 4학년 학생들에게는 쉽게 접근할 수 있는 방법으로 해석되며, 항목 4, 5 및 7의 풀이 방법은 수학적 창의성에 해당한다고 볼 수 있을 것이다.

5) "계단"의 "모서리"를 가지고 다른 "모서리"의 꼭대기에 "채우기"위해 뒤집기 유형인 유형5(: Bay-Williams 등(2004)의 넷째 방법)로 해결한 학생은 6명이었으나, Bay-Williams 등의 다섯째 방법으로 해결한 학생이 전혀 없었다. 그러나, Bay-Williams 등에서 소개하지 않은 항목3의 방법인 7×4를 인식한 경우에 1명, 아주 독창적인 사고인 항목4의 방법에 3명의 학생이 나왔다는 사실은 장차 초등 영재교육 효과의 가능성을 희망적으로 보여주는 듯하다.

6) 평면도형으로 전환하여 쌓기나무의 개수를 세는 유형인 유형6은 항목1(21명), 항목4(10명)순으로 나왔지만 각 층마다 십자모양을 다르게 인식하는 항목 4는 항목1보다는 좀 더 발전된 도형 감각을 가졌다고 볼 수 있다. 또한 항목3과 같이 십자모양에서 규칙을 인식하는 경우도 1명이었다.

7) 더 작은 도형으로 나누기, 쌓기나무를 재배열, 혹은 대수식을 이용한 유형인 유형7(: Bay-Williams 등(2004)의 여섯째 방법인 대수식을 이용해서 구한 경우)에서는 1명이었다.

4. 연구 결과로부터 얻은 시사점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 0개 또는 1개의 정답을 구한 아동들의 비율이 전체 연구대상자들의 55.7%인 216명에 이른다는 사실에서, 초등 저·중학년까지의 도형영역에 대한 교수·학습 지도방법의 개선이 필요하다고 판단된다. 또한, 도형에 대한 공간 감각이나, 수와 연산 영역 및 규칙성의 인식 측면에서 수학 지식의 연결 능력이 현저히 떨어진다고 생각할 수 있으므로, 앞으로 영재교육 수업시 교사들이 이런 분야에 좀 더 많은 경험을 강화시킬 필요가 요구된다.

둘째, 전체 응시자에 비하여 극히 소수이긴 하지만 수학적 창의성이 뛰어난 풀이들이 존재했는데, 시각화 기능과 공간 추론력을 지닌 학생 5명, 각 층간의 점화관계를 이용하여 해결한 학생 8명, Bay-Williams 등(2004)에서 소개하지 않은 방법인 7×4를 인식한 학생 1명, 아주 독창적인 사고 방법인 각 층에 있는 쌓기나무의 개수가 1층의 개수인 모두 13개라고 본 뒤, 2층에는 4개, 3층에는 8개, 4층에는 12개가 없으므로, 52-24=28 또는 (13×4)-(4+8+12)=52-24=28로 해결한 학생이 3명이었다. 최근, 정규교육과정에서는 교사들의 전문성 교육이나 자료개발에 관심이 집중되고 있다. 일반적으로 영재아들은 정규교육과정의 것보다 더 복잡한 교육과정을 요구한다고 한다. Bay-Williams 등(2004)에 의하면, Skeleton Tower 문제는 대수와 기하를 통합하는 교육과정의 예로 수학을 내적으로 연결하는 관점을 보여주며, 양 사이의 관계를 발견하고, 다른 방법들의 수학적 관계를 표현하고 그리고 변화를 분석하는데 초점을 두고 있으며, 학생들은 패턴을 분석하기 위하여 기하적 모델을 사용하는 것처럼

다른 분야도 연결할 수 있다 라고 하고 있다. 따라서, 본 연구에서 분석한 결과에 비추어 볼 때, 영재 교육을 위한 교사들의 전문성 교육이나 수학적 창의성을 개발시킬 수 있는 자료 개발에 관심을 가져야 할 때라고 사료된다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15호 부록 책 8. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부 (2003). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서 주식회사.

남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도 방안에 관한 고찰. 한국초등수학교육학회지 **2(1)**. pp.41-49.

남승인 (2005). 수학 영재의 특성과 판별. 수학 영재 지도를 위한 교사 연수 교재. pp.108-125. 대구: 대구교육대학교부설초등교육연수원.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

조석희 (2006). 영재성의 개념과 판별. 창의적인 지식 생산자 양성을 위한 영재교육. pp.31-54. 서울: 한국교육개발원.

한국교육개발원 (1999). 수학과 영재교육과정 시안: 초 · 중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초연구의 '영재교육과정 개발 연구'의 별책부록 III(수탁연구 CR 99-20-3: 구자억 · 조석희 · 김홍원 · 서혜애 · 장영숙 공동 연구). 서울: 한국교육개발원.

Bay-Williams, Jennifer M., Skipper, Elizabeth M. & Eddins, Susan K. (2004). "Developing a Well-Articulated Algebra Curriculum: Examples from the NCTM Academy for Professional Development." In Rheta N. Rubenstein & George W. Bright (Eds.), *Perspectives on the Teahing of Mathematics*, 2004 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics(NCTM), (pp. 15-26). Reston, VA.: NCTM, 2004.

NCTM (2000a). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

PBS Mathline. "Algebraic Thinking Math Project: Looking through the Algebraic Lens, Grades 6-8." www.pbs.org/teachersource/mathline/lessonplans/pdf/atmp/AlgebraicLens68.pdf, June 9, 2003 (Dec. 7, 2009 재검색).

NCTM (2000b). 학교수학을 위한 원리와 규준. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙(공역). 2007. 서울: 경문사.

A Case Study on the 4-high Skeleton Tower Problem Solutions by the 3rd and 4th Graders in a Gifted Children in Math Selection Test

Kim, Hae Gyu
Department of Mathematics Eduction, Teachers College, Jeju National University,
51 Samsasengno, Jejusi, Jeju-do, Korea
E-mail : kimhag123@hotmail.com

The Skeleton Tower problem is an example of a curriculum that integrates algebra and geometry. Finding the number of the cubes in the tower can be approached in more than one way, such as counting arithmetically, drawing geometric diagrams, enumerating various possibilities or rules, or using algebraic equations, which makes the tasks accessible to students with varied prior knowledge and experience. So, it will be a good topic which can be used in the elementary grades if we exclude the method of using algebraic equations. The purpose of this paper is to propose some points which can be considered with attention by gifted children education teachers by analyzing the 4th Skeleton Tower problem solutions made by 3rd and 4th graders in their selection test who applied for the education of gifted children in math at J University for the year of 2010.

* ZDM Classification : D52
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : Skeleton Tower, Gifted Education, Number and Operation, Geometry.