대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 1, 85-102-. Feb 2010

선형계획법의 교수학적 분석을 통한 가설 학습 경로 탐색

최 지 선*, 이 경 화**, 김 서 령***

선형계획법은 일정한 조건아래 여러 가지 가능성 중에서 최적의 경우를 찾아낼 때에 유용하다. 본 연구에서는 수학적 맥락과 학교수학의 맥락에서 선형계획법을 분석하고, 인식론적 관점에서 선형계획법의 학습 과정을 살펴봄으로써, 가설 학습 경로를 탐색하였다. 수학적 맥락과 학교수학의 맥락의 차이는 주어진 영역이 실현 가능한지 또는 유계인지를 다루는가의 여부, 주어진 영역 속의 점 중에서 제한된 개수의 점만을 대입해도 최적해를 구할 수 있다는 정리의 정당화를 다루는가의 여부에 있었다. 그리고 학생들이 정의역이 제한된 경우에 이원일차함수의 최댓값과 최솟값이 무엇인지를 이해하지 못할 가능성이 있었다. 이 세 가지 측면을 인식론적 관점에서 고려하여 가설 학습 경로를 4단계 즉, 주어진 일차식이 함수식임을 이해하는 단계, 부등식 영역과 일차식을 목적함수와 관련시킴으로써 부등식 영역을 직선으로 분할하는 단계, 직선의 그래프와 k의 범위를 관계시켜 y절편의 개념을 구성하는 단계, 주어진 영역에서 최적해의 존재가능성을 확인하는 단계로 구성하였다.

I. 서론

최소의 노력으로 최대의 이익을 추구하는 것은 금융, 공학, 등의 실생활 상황과 다양한 학문 분야의 주된 관심사 중 하나이다. 이와 같이 일정한 조건아래 여러 가지 가능성 중에서 최적의 경우를 찾아낼 때, 이른바 수리계획법(mathematical programming)을 활용한다. 수리계획법에는 선형계획법과 비선형계획법이 포함되며, 이 중 선형계획법은 변수와 제약식이 많은 복잡한 문제를 잘 다룰 수 있기 때문에 유용하다(이규승, 2001). 현재 고등학교 1학년 수학에서는 수리계획법 중 선형계획법과 관련된 내용을 다루고 있다. 그러나 선형계획법 관련 계산 과정의 복잡성 때문에 선형계획법 개념과 절차를 학습의 주요 내용으로 다루지는 않는다. 구체적으로 말하여, 3차 좌표평면, 행렬 등 선형대수에서의 여러 가지 수학적 지식을 활용하지 않고, 2차 평면과 일차함수만을 활용하여 관련 내용을 다루고 있다. 따라서 다양한 수학 분야에서 사용되는 선형계획법과 고등학교에서 다루는 선형계획법의 전개방법과 표현양식은 다르다.

수학적 지식의 성격과 구조, 표현 양식이 가르칠 지식, 곧 학교수학으로 변환되면서 그 의미 또는 본질의 파손은 불가피하지만(Chevallard, 1985), 선형계획법을 통해서 가르치고자 하는 수학적 사고의 의미와 본질은 보존되어야 한다. 한편, 가르칠 지식으로서의 학교수학은 학생들의 인지적 발달 수준과 심리를 고려해야

* 중흥중학교, everii@hanmail.net
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr, 교신저자
*** 서울대학교, srkim@snu.ac.kr

한다(Brousseau, 1997). 선형계획법의 본질적인 측면을 포함하면서도 학생들의 인지적 발달 수준에 적합한 방식으로 내용을 구성해야 한다는 두 가지 요구를 반영하기는 쉽지 않다. 특히 고등학교 1학년 학생들에게 일정한 조건을 만족하는 여러 가지 가능성 중에서 최적의 경우를 찾아내는 경험을 처음으로 제공하는 단원이기 때문에 더더욱 적절한 교수학적 변환 방법을 찾기가 어렵다.

Stevens와 Palocsay(2006)는 학생들이 교사의 설명에만 피상적으로 의존하여 선형계획법을 학습하는 현상을 관찰하였으며, 그 결과 학생들이 선형계획법에 대한 개념적인 이해를 형성하지 못하고 있음을 지적하였다. Stevens와 Palocsay(2006)는 언어적 표현으로부터 수학적 표현인 대수식으로 나아가는 과정에 주목하는 것을 제안하였다. Brousseau와 Gibel(2005)은 선형계획법 문제해결을 통해 초등학교 5학년 학생들의 추론 능력 개발이 가능한지 확인하였으나 부적합하다는 결론에 도달하였다. Shama와 Dreyfus(1994)는 선형계획법을 해결하는 학생들의 전략을 시각적인 방법, 대수적 방법, 혼합된 방법으로 분류하였다. 스프레드쉬트를 활용한 선형계획법 지도 방법도 Baker(2000)에 의해 이루어졌다.

앞서 살펴본 바와 같이 선형계획법의 교수-학습에 관련된 연구는 아직 충분하게 이루어지지 않았으며, 특히 선형계획법의 본질적인 의미를 현재 교육과정의 계열성과 학습자의 수준을 고려하여 가르칠 지식의 구성에 반영하는 연구가 전혀 이루어지지 않았다. 이 연구에서는 Simon(1995)이 제시한 가설 학습 경로(hypothetical learning trajectory) 개념에 비추어 선형계획법의 교수학적 변환을 시도하고자 한다. 가설 학습 경로는 수학의 교수-학습 활동이 일어나는 교실 상황에서 가능한 수업을 설계하는 것으로, 가설 학습 경로를 구성함으로써 학생들의 학습 과정을 연구할 수 있을 뿐만 아니라 역으로 학생들의 학습 과정을 통해서 가설 학습 경로를 반성적으로 고찰할 수 있다.

Wittmann(1998)에 의하면, 모든 수학 학습에 대한 설계는 '핵심(core)'에서 시작되어야 하며, 핵심은 수학적 활동으로부터 시작되어야 한다. 수학적 활동에서 시작하지 않으면 수학, 심리학, 인지심리학 등의 관련 분야에 가까울 뿐 수학 학습과 직접적으로 관련되지 않을 수 있기 때문이다. 수학은 다양한 맥락으로부터 생성된 낱낱의 지식의 총체이며, 수학 교실에서도 이러한 낱낱의 지식의 총체가 사회적 맥락 속에서 다루어질 수 있어야 한다. 이와 같이 수학적 지식은 수학적 활동의 형태로, 교실이라는 특수한 사회적 맥락 속에 놓이면서, 불가피하게 그 의미 또는 본질이 파손될 우려가 있기 때문에(Chevallard, 1985), 교사는 인식론적 경각심을 가지고 교수 활동에 임함으로써 이러한 의미의 파손을 최소화할 필요가 있다(Kang, 1990). 선형계획법의 경우 역시, 복잡한 내용 구조를 단순화하고, 학교수학의 맥락에 적합하게 재구성하는 과정에서 본래 선형계획법에 포함되었던 의미 중 일부는 생략되거나 변형될 수 있다. 따라서 가설 학습 경로 설계를 위한 수학적 분석에서는 선형계획법에 포함된 수학적 의미가 무엇인지 그리고 선형계획법을 교수학적으로 변환할 때 고려해야 하는 본질적인 측면은 무엇인지를 파악해야 한다.

수학적 지식을 학교수학의 맥락에 맞게 반영하기 위해서는 학생들의 인지 발달 수준과 교실 학습 환경 등을 적절하게 고려해야 한다. Wittmann(1998) 역시 유사한 주장을 하면서 학문적 지식으로서의 수학이 학교수학에 적절하게 반영되지 않은 대표적인 예로 '새수학'을 들었다. 학문으로서의 수학적 지식을 학교수학의

맥락에 맞게 변환한 경우, Brousseau(1997)가 지적한 바와 같이, 수학의 진리 판단 기준과는 다른 기준에 의해 그 가치와 체계성을 판단해야 한다. 이는 학생들의 인지적 발달 수준과 심리에 적합한 형태로 지식을 구성하면서 부딪치는 불가피한 현상이며, 교수학적인 의미에서 수학을 조명하고 체계화하는 수학교육 고유의 접근에 따른 결과이다. 학교수학의 내용 요소와 조직 방식을 수학적인 의미뿐 아니라 인식론적 그리고 심리적 관점에서 이해하고 분석할 필요가 여기에 있다. 이 글에서도 현재 학교수학에서 선형계획법 관련 내용을 표현하여 전개하는 방식을, 한편으로는 수학적인 의미에 비추어 그리고 다른 한편으로는 인식론적인 또는 심리적인 측면을 고려하여 살펴보고자 한다.

수학적 지식의 교수학적 변환에 관한 기존의 논의에 비해 가설 학습 경로 관련 논의는 학습 목표, 수업 활동, 예견되는 학습 경로(Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004)와 같이 한층 더 구체적인 내용을 포함하고 있다. 이 글에서도 선형계획법 관련 지식을 분석하여 핵심적이고 본질적인 의미를 도출하고, 학교수학의 맥락에 적절하게 반영하는 방안을 고안하며, 예견되는 학습 경로를 설정함으로써 구체적으로 선형계획법의 교수-학습 관점을 제시하고자 한다. 이 연구를 진행하는 과정에서 그리고 이 연구의 결과로 얻은 선형계획법의 교수-학습 관점을 적용하는 과정에서 가설 학습 경로의 주요 내용을 지속적으로 수정하고 보완할 수 있는 것으로 가정한다.

II. 현재 교수학적 변환의 수정 및 보완 방향 도출

이하에서는 선형계획법의 가설 학습 경로 설정을 위한 준비 단계로 교수학적 분석을 시도한다. 선형계획법이 수학적으로 어떤 의미를 가지며, 어떤 방식으로 다루어지는지, 학교수학에서는 어떤 내용과 방식에 의해 다루어지는지, 현행 교수학적 변환의 수정 및 보완 방향은 어떤 것인지 살펴본다.

1. 수학에서 다루어지는 맥락

수학적인 지식으로서의 선형계획법의 주요 내용을 파악하기 위해 관련된 정의와 정리를 살펴본다. 먼저 '부등식형 선형계획법 문제(linear programming problem in an inequality form or a canonical form)'에 대한 다음 정의를 생각해보자.

$m \le n$인 두 자연수 m, n이 주어졌을 때, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$인 각 i, j에 대하여 b_i, c_j, a_{ij}가 실수이고

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m, \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$일 때, $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$의 최댓값(최솟값)은? (Foulds, 1984)

위의 문제에서 $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$이라 하면, 다음과 같은 행렬을 사용한 표현이 가능하다.

유클리드 공간 R^n의 벡터 $\mathbf{c}$와 $\mathbf{b}$와 $m \times n$ 행렬 A에 대하여, 연립일차부등식 $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$과 $\mathbf{x} \ge 0$이 성립할 때 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$의 최댓값(최솟값)은? (Foulds, 1984)

다시 말하면, 선형계획법은 유한개의 일차부등식으로 주어진 연립부등식의 해집합을 나타내는 convex polytope Ω와 일차함수 f가 주어졌을 때 $\max\{f(x) | x \in \Omega\}$ $(\min\{f(x) | x \in \Omega\})$를 구

하는 것이다. 이 때, Ω를 '실현가능영역'이라고 f를 '목적함수'라고 한다(Avriel & Golany, 1998).

실현가능영역이 공집합인 경우가 있을 수 있다. 예를 들어, 선형계획법 문제 '$x_1+x_2 \geq 5$, $x_1-x_2 \geq 5$, $0 \leq x_1 \leq 2$, $0 \leq x_2$일 때 x_1+3x_2의 최댓값은?'은 실현가능영역이 공집합이다. 실현가능영역이 공집합이면 '실현가능하지 않다(infeasible)'고 한다. 실현가능하지 않은 선형계획법 문제는 최적해가 존재하지 않는다는 결론을 내리면 된다. 실현가능영역이 공집합이 아닌 선형계획법 문제를 '실현가능하다(feasible)'고 한다. 실현가능한 선형계획법 문제의 최적해가 항상 존재하는 것은 아니다. 예를 들어, 선형계획법 문제 '$-x_1+2x_2+1 \geq 0$, $3x_1-x_2+1 \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$일 때 x_1+x_2의 최댓값은?'는 실현가능하지만 최댓값은 존재하지 않는다. 이와 같이 실현가능하지만 최적해를 갖지 않는 선형계획법 문제를 '유계가 아니다(unbounded)'라고 한다. 유계가 아닌 선형계획법 문제는 유계가 아닌 실현가능영역을 갖는 선형계획법 문제와 같지 않다는 것에 유의하여야 한다. 예를 들어, $x_1-x_2 \geq 5$, $0 \leq x_1 \leq 10$, $0 \leq x_2$일 때 $3x_1$의 최댓값을 구하는 문제는 실현가능영역이 유계가 아니지만 30이라는 최적해를 갖는다(Avriel & Golany, 1998). 위의 정의로부터 선형계획법 문제는 최적해를 갖거나, 실행가능하지 않거나, 유계가 아닌 셋 중의 정확하게 한 경우에 해당한다는 것을 알 수 있다.

선형계획법은 2차 대전 중 우군에 소요되는 경비를 줄이고 적군의 피해를 증대시키도록 지출과 성과를 계획해 주는 수학적 모델로 1939년 러시아 수학자 Leonid Kantorovich에 의하여 개발되었다(Onwubolu & Babu, 2004).

고등학교 교과과정에서 다루는 선형계획법 문제는 부등식형으로, 실세계 문제에서 얻어지는 선형계획법 문제가 주로 부등식형으로 나타내어진다. 이와 같은 부등식형 선형계획법 문제는 효율적인 알고리즘에 의하여 해결될 수 있다. 부등식으로 주어진 제약조건 $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$는 slack variable $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$를 도입하여 $A\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{b}$로 나타낼 수 있다. 예를 들어, 부등식형 선형계획법 문제 '$2x_1-x_2 \geq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$일 때 x_1+3x_2의 최댓값은?'은 slack variable y_1을 도입하면 '$2x_1-x_2-y_1=10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$일 때 x_1+3x_2의 최댓값은?'과 같게 된다(Foulds, 1984). 이와 같이 부등식형 선형계획법 문제에서 부등식으로 주어진 제약조건을 모두 등식으로 바꿀 수 있다. 즉, 부등식형 선형계획법 문제는

유클리드 공간 R^n의 벡터 c와 b와 $m \times n$ 행렬 A에 대하여, 연립일차부등식 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$과 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$이 성립할 때 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$의 최댓값(최솟값)은?

로 표현될 수 있다. 이러한 형태의 선형계획법 문제를 표준형 선형계획법 문제(linear programming problem in an standard form)이라고 한다. 1947년 George B. Dantzig가 행렬을 이용해서 효과적으로 표준형 선형계획법의 최적해를 구하는 방법인 단체법(simplex method)을 개발하고 그 뒤를 이어 1984년에 Narendra Karmarkar가 매우 효율적인 Karmarkar 알고리즘을 개발하였다. 이와 같이 효율적인 (하지만 polynomial time 알고리즘은 아닌) 해결방법이 제시된 선형계획법은 경제, 국방, 등 다양한 분야에 광범위하게 이용되고 있다(이규승, 2001).

'수학적 최적화 문제' 또는 '수학적 프로그래밍'은 정의역이 R^n의 부분집합이며 실숫값을 갖는 함수 f와 f의 정의역의 부분집합 Ω에 대하여 다음과 같이 표현된 문제를 의미한다.

Ω에 속하는 x에 대하여 $f(\mathbf{x})$의 최댓값(최솟

값)은?

Ω가 R^n인 수학적 최적화 문제를 '제약되지 않았다'고 하고 Ω가 R^n의 진부분 집합인 수학적 최적화 문제를 '제약되었다'고 한다. 제약된 최적화 문제에서 Ω는 연립 부등식으로 대부분 정의되는데, 이 때 연립부등식을 이루는 각 부등식을 '제약'이라고 부른다(Jeter, 1986).

최적화 문제에는 여러 가지 종류가 있는데, 볼록 최적화 문제가 그 대표적인 예이다. 볼록 최적화(convex optimization) 문제는 목적함수와 각 제약을 이루는 식에 의하여 정의된 함수가 모두 볼록인 최적화 문제를 의미한다. R^n의 부분집합 S가 볼록집합일 때, 함수 $f: S \rightarrow R$가 볼록이라는 것은 임의의 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in S$와 $\lambda \in [0,1]$에 대하여 $f(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x})+(1-\lambda)f(\mathbf{y})$가 성립하는 것으로 정의된다. 선형계획법에서는 목적함수와 제약함수가 모두 선형으로 주어지므로 선형계획법은 볼록 프로그래밍의 특별한 경우이다(Papadimitriou & Steiglitz, 1998).

고등학교 교과과정에서는 미분 단원에서 목적함수가 미분가능함수 $y=f(x)$이며 실현가능영역이 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$인 최적화 문제를 다시 다루게 된다. 대학 미적분에서 목적함수가 연속함수 $z=f(x,y)$이며 실현가능영역이 컴팩트인 최적화 문제, 예를 들어, '$x=0$, $y=0$, $y=9-x$로 둘러싸인 영역에서 $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.'와 같은 문제를 다룬다. 또한 목적함수가 미분가능하고 매끄러운 곡선(smooth curve)을 그래프로 갖는 $g(x,y,z)=0$를 제약조건으로 갖는 최적화 문제도 다룬다.

2. 학교수학에서 다루어지는 맥락

이 절에서는 현재 이미 교수학적 변환의 결과로 학교수학에 포함되어 있는 선형계획법 관련 내용을 살펴본다. 선형계획법은 고등학교 1학년 수학의 학습 내용으로 설정되어 있다. 현행 교육과정에서는 중학교에서 일차부등식을, 고등학교에서 이차부등식과 부등식의 영역을 도입한 후, 선형계획법을 다룬다. 중학교 3학년에서 정의역이 실수 전체인 경우에 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하도록 하고 있기는 하지만, 제한된 영역에서 최댓값과 최솟값을 구하는 것은 선형계획법 단원에서 처음으로 다루게 된다. 이 내용에 이어 그 다음 단원을 통해 제한된 영역에서 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 내용을 다룬다(교육인적자원부, 2007). 그러므로 선형계획법 단원의 학습을 통해 제한된 영역에서 최댓값과 최솟값을 구하는 수학적인 방법에 대한 안목을 형성하는 것이 필요하다.

현재 사용되고 있는 고등학교 수학교과서에서는 대부분 2개의 소단원으로 나누어 선형계획법 관련 내용을 다룬다. 첫 번째 소단원에서는 일차함수의 그래프인 직선과 이차함수의 그래프인 곡선의 위와 아래 혹은 원의 내부와 외부를 정의하고, 변수가 2개인 연립 일차부등식과 이차부등식의 영역을 좌표평면에 나타내는 방법을 다룬다. 두 번째 소단원에서는 부등식의 영역에서 주어진 목적함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법을 다룬다. 선형계획법 관련 교수-학습 내용을 도입 부분, 선형 계획법 문제 해결 과정 설명 부분, 그리고 연습 부분으로 나누어 살펴볼 수 있다.

도입부분은 교과서마다 다소간 차이가 있는데, 대략적으로 공학이나 경제 분야에서 선형계획법을 활용하는 맥락에 대해 미리 생각해보도록 하거나(우정호 외, 2009; 양승갑 외, 2009; 신항균 외, 2009; 이재학 외, 2009), 선형계획법의 해결과정에서 요구되는 사고활동을 미리 제

시하고 탐구하도록 하는 두 가지 경우로 나뉜다(김서령 외, 2009; 윤재한 외, 2009; 유희찬 외, 2009; 이준열 외, 2009; 계승혁 외, 2009). 후자의 경우, 다시 어떤 점을 강조하는가에 따라 서로 다른 접근을 시도하고 있다. 먼저, 윤재한 외(2009)는 제한 영역 위의 점들 중에서 $y-x=-1$와 같이 목적함수가 특정값을 가지면 직선으로 표현된다는 것에 주목하도록 한다. 이준열 외(2009) 주어진 부등식 영역의 특정 점을 지나는 직선의 방정식을 구해 y절편과의 관계를 탐구하도록 한다. 유희찬 외(2009)는 선형계획법을 적용하여 문제를 해결하는 3단계의 활동을 각각 탐구하게 한다. 김서령 외(2009)는 목적함수가 값을 갖는다는 것의 의미에 대해 탐구하도록 한다.

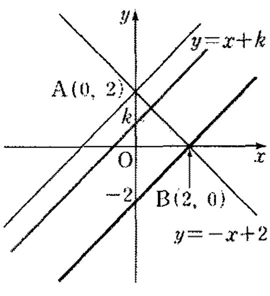
도입 부분의 차이에도 불구하고, 설명부분은 교과서마다 크게 다르지 않다. 선형계획법의 요소인 제한 조건과 일차식이 나타나고, 일차식 표현과 함수식 표현 그리고 그래프 표현 등이 사용된다. 교과서마다 설명 방식이 유사하여 어느 교과서를 살펴보아도 무관한 바, 우정호 외 9(2009: 245)의 예를 살펴보겠다.

부등식의 영역에서 어떤 식의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법에 대하여 알아보자.

이를테면 연립부등식

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2$

가 나타내는 영역에서 점 $(x,\ y)$가 움직일 때, 일차식 $y-x$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자. 주어진 연립부등식의 영역을 D라고 하면, D는 오른쪽 그림과 같이



$O(0,\ 0),\ A(0,\ 2),\ B(2,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 내부와 세 변이다.

$y-x=k$로 놓으면 $y=x+k$이고 직선 $y=x+k$는 기울기가 1이고, y절편이 k인 직선이다. 이제 이 직선 $y=x+k$가 영역 D를 지날 때에 y절편 k의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다. 직선 $y=x+k$가 영역 D를 지나도록 평행이동하면서 움직여 보면, y절편 k의 값은 직선 $y=x+k$가

점 $A(0,\ 2)$를 지날 때 최대가 되고,

최댓값은 $2-0=2$

점 $A(2,\ 0)$을 지날 때 최소가 되고,

최솟값은 $0-2=-2$

이다. 따라서 $y-x$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

이러한 설명 다음에, 부등식의 영역에서 식 $f(x,y)$의 최댓값, 최솟값을 구하는 방법을 3단계로 형식화한다. 첫 번째 단계에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다. 둘째 단계에서 $f(x,y)=k$로 놓고, 이 방정식이 나타내는 도형의 변화를 부등식의 영역 안에서 조사한다. 셋째 단계에서 k의 값 중에서 최대인 값과 최소인 값을 구한다(우정호 외, 2009: 246).

문제 해결 과정의 설명에 이어 연습을 위한 문제가 제시된다. 일반적으로 제한 조건이 선형함수에 의해서 결정된 닫힌 영역에서 목적함수가 일차식인 경우를 제시하고, 이후에 원과 같이 방정식으로 표현되는 닫힌 영역에서 목적함수가 일차식인 경우를 제시한다. 제한 조건은 항상 닫힌 영역으로 제시되기 때문에, 주어진 목적함수는 항상 최댓값과 최솟값을 갖게 된다. 제한 조건이 닫힌 영역이 아닌 경우에, 최댓값이나 최솟값이 존재하지 않을 수도 있지만 교과서에 그러한 경우는 제시되지 않는다.

수학교육과정과 수학교과서 분석 내용을 요

약하면 다음과 같다. 첫째, 고등학교 1학년 수학에서 선형계획법을 다루는 동안, 제한된 영역에서 최댓값이나 최솟값을 찾는 수학적인 방법을 처음으로 다루게 된다. 선형계획법을 다루기 전인 중학교 3학년에서 정의역이 실수 전체집합인 경우의 이차함수의 최댓값과 최솟값을 다루지만, 정의역이 제한된 영역일 때는 선형계획법을 다루면서 처음으로 생각해 보게 한다. 또한 제한영역 내에서 목적함수가 최댓값을 갖는다는 의미에 대해 충분히 파악하기 어렵다. 대부분의 교과서들에서 목적함수가 값을 갖는다는 의미를 간과하거나 약화하여 다루고 있다. 예외적으로 김서령 외(2009)는 이러한 측면에 주목하도록 내용을 구성하고 있으나 여전히 충분한 탐구의 기회가 제공된다고 보기는 어렵다. 둘째, 선형계획법을 다루면서 기존과는 다른 방식으로 직선을 다루게 된다. 기존에 직선의 방정식을 $y=ax+b$ 형식으로 표현했지만 선형계획법 단원에서는 $ax+by=k$의 형태로 나타낸다. 또한 일차식 $ax+by$를 k로 두는 이유에 대한 설명이 불충분하여 학생들은 $ax+by=k$의 형태를 직선으로 인식하는데 어려움을 가질 수 있다. 일부 교과서에서는 이에 대해 도입부분의 탐구활동을 통해 다루려고 시도했지만 풀이 과정을 설명하는 단계에서는 설명이 불충분하다. 셋째, 현재의 교과서에서는 주어진 영역에서 함수의 최댓값이나 최솟값이 존재하는 경우만을 다룬다. 그러므로 항상 최댓값이나 최솟값이 존재할 것이라는 오개념 형성의 원인이 될 수 있다.

3. 교수학적 변환의 수정 및 보완 방향

앞서 살펴본 두 가지 맥락을 비교할 때, 다음과 같은 두 가지 차이점을 확인할 수 있다. 첫째, 학문적 지식으로서의 선형계획법의 경우, 주어진 영역이 실현가능한지 여부, 유계인지 여부에 따라 최적해의 존재성을 결정하면서, 최적해를 구하는 알고리즘을 정립하였다. 수학적 지식으로서의 선형계획법의 본질은 이와 같이 어떤 조건에서 최적해가 존재하는지, 존재한다면 효율적으로 그 해를 구하는 방법은 무엇인지에 대한 것이었다. 그런데 가르칠 지식으로 변환된 선형계획법의 경우, 주어진 영역의 실현가능성 여부, 유계 여부의 확인 과정을 생략하고 있으며, 최적해를 찾는 알고리즘에 초점이 맞추어져 있다. 둘째, 수학에서는 n개의 일차부등식으로 주어지는 영역에서 n개의 항을 가지는 일차식의 최댓값과 최솟값을 구하지만, 학교수학에서는 주로 3개 또는 4개의 일차부등식으로 주어지는 영역에서 이원일차식의 최댓값과 최솟값을 구하였다. 수학에서는 목적함수를 행렬로 표현하고, 이에 대한 일반적인 해법을 추구하였다. 이 때 주어진 영역 속의 점 중에 제한된 개수만큼만 대입해도 최적해를 구할 수 있다는 것이 중요한 정리로 다루어졌다. 그러나 학교수학에서는 이원일차식으로 표현되는 목적함수만 다루기 때문에, 이전에 배운 일차함수의 성질을 이용하여 최적해를 구하며, 제한된 개수의 점을 대입하여 최적해를 구할 수 있다는 사실을 활용하여 문제를 해결할 뿐 그 방법의 정당성에 대해서는 강조하여 다루지 않고 있다. 일반적인 해법을 추구하는 수학적 지식의 특성과는 달리 매우 특수한 조건에서 초보적인 방식에 의해 최적해를 구하는 알고리즘만 다루고 있는 것이다.

더욱이 현재의 선형계획법 관련 교육과정 및 교과서 구성은 다음과 같은 인지적 부담을 간과하고 있다. 첫째, 제한된 영역에서 최댓값과 최솟값을 결정하는 문제를 해결해 본 경험이 전혀 없는 학생들에게 이를 적용하여 문제를 해결할 것을 요구하고 있다. 외양상으로는 간

단한 계산에 의해 해를 구할 수 있는 것처럼 보이지만, 그 이면에는 제한된 영역이 주어진 경우의 함수의 최댓값과 최솟값의 의미를 파악해야만 문제를 해결할 수 있다. 둘째, 학생들의 입장에서 직선의 방정식은 $y=ax+b$의 형태인데 이를 $ax+by=k$의 형태로 바꾸어 다루고 있으며, 이 과정에서 역시 x에 대한 함수가 아니라 x,y에 대한 함수를 다루어야 한다. 이와 같이 기존에 학습했던 수학적 지식의 의미를 확장하거나 선행 지식들의 관계에 새로운 의미를 부여해야 함에도 불구하고, 이에 대해 간과함으로써 인지적 부담을 가중시키고 있다.

이상의 논의로부터 교수학적 변환의 수정 및 보완 방향을 다음과 같이 제시한다. 첫째, 주어진 일차식 $ax+by$의 값을 k라고 놓는 이유에 대해 알아볼 기회를 제공해야 한다. 이원일차함수의 값의 무엇인지, 영역이 제한된 경우에 함수의 최댓값과 최솟값이 무엇인지를 이해해야 한다. 둘째, 학교수학의 범위 내에서 언제 최적해를 구할 수 있으며, 최적해를 구한다는 수학적인 사고 방법이 어해 점에서, 왜 수용한지 생각할 기회를 제공해야 한다. 셋째, 이전에 배운 일차함수의 성질 중 최적해를 구하는 과정에 관련된 부궁할 곧, 왜 일차함수의 y절편에 주목 한다. 왜 꼭짓점에서의 y절편만을 살펴보면 되한다. y절편과 목적함수의 관계한다 뭇엇인지 이해하고, 이를 일반적인 논의로 발전시킬 수 있는 기회를 제공해야 한다. 이와 같은 교수학적 변환 과정의 수정 및 보완은 선형계획법이 나오게 된 배경이나 수학적인 논의의 기본 방향을 파악하는 기회를 제공하고, 일차함수에 대한 선행지식이 새로운 내용과 어떻게 관련되는지 인식하게 하여 맹목적인 계산 연습이 아니라 개념적인 이해에 근거한 학습을 가능하게 할 것이다.

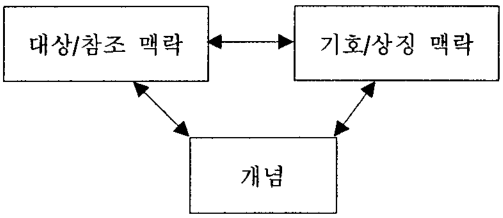
III. 선형계획법의 가설 학습 경로

지금까지 교수학적 분석 결과에 따라 선형계획법의 교수학적 변환을 어떻게 수정하고 보완해야 하는지 살펴보았다. 이하에서는 앞서 도출한 수정 및 보완 방향을 구체적으로 반영하기 위해 선형계획법의 학습을 인식론적 관점에서 살펴보고, 이를 바탕으로 선형계획법의 가설 학습 경로를 설정한다.

1. 선형계획법 학습에 대한 인식론적 관점

Freudenthal(1991)은 수학적 지식이 인간 활동의 과정이며 결과라고 설명한다. 수학자들은 다양한 현상에 포함되어 있는 소음으로부터 진리를 구분해내어 본질로 재조직하고, 이를 다시 현상으로 보아 다시 다른 본질로 재조직하는 지속적인 과정에 의해 수학적 지식을 발전시켜왔다는 것이다. Steinbring(2005)도 수학적 지식이 그 자체로 고정된 완벽한 의미를 가지는 것이 아니라 문화적이고 해석적인 설명과 이해의 과정에 의해 지속적으로 성장하는 것이라고 설명한다. 또, 수학적인 의미는 설명과 이해를 위한 부단한 노력, 특히 이미 알고 있던 지식에 새로운 관계성을 부여함으로써 또는 새로운 관계성에 비추어 기존의 지식을 이해함으로써 재구성되며, 이러한 관점에 비추어 학습 과정을 모델화하고 파악해야 한다고 주장한다. 선형계획법 관련 내용을 학습함에 있어서도, 이미 알고 있었던 일차함수 관련 내용을 새로운 맥락에서 반성적으로 고찰하고 새로운 의미로 재해석하는 것이 필요하다. 여기서 학생들이 수행해야 하는 '일차함수에 대한 반성적 고찰과 재해석'의 의미를 Steinbring이 제안하는 인식론적 삼각형을 중심으로 생각해볼 수 있다.

Steinbring(2005)은 학습자가 이미 알고 있었던 대상 또는 참조 맥락에서 기호와 상징 맥락으로, 또 기호와 상징 맥락에서 다시 대상과 참조 맥락으로 인식의 초점을 이동시키는 가운데 수학적 개념 또는 지식의 성장이 이루어진다고 설명한다. 학습 과정에서는 대상과 참조 맥락이었던 것이 기호와 상징 맥락으로 바뀔 수 있으며, 기호와 상징 맥락이었던 것을 다시 대상과 참조 맥락으로 바꾸어 새로운 기호와 상징 맥락을 생성할 수도 있다. 그러므로 대상과 참조 맥락, 기호와 상징 맥락은 외형적인 표현 형태에 의해 구분되기보다는 개념이나 지식의 중재에 따른 연결과 이 연결로부터 지식의 성장을 설명하는 과정에서 어떤 역할과 기능을 하는가에 의해 구분된다. 이를 다음 [그림 Ⅲ-1]과 같은 삼각형 모델로 요약하여 설명할 수 있다.



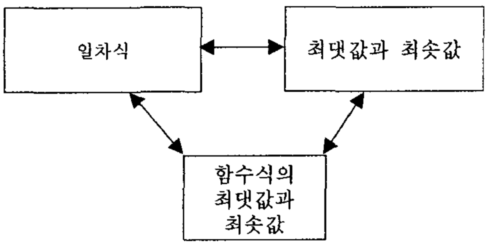
[그림 Ⅲ-1] 인식론적 삼각형(Steinbring, 2005: 22)

[그림 Ⅲ-1]에서 대상과 참조 맥락은 기호와 상징 맥락의 성장을 가능하게 하며, 거꾸로 기호와 상징 맥락의 발전이 대상과 참조 맥락의 성장을 가능하게 하기도 한다. 개념은 두 맥락 사이의 중재를 가능하게 하며, 두 맥락 사이의 중재에 따른 결과이기도 하다. 학교에서 수학을 가르치고 배울 때도 이와 같은 상호작용과 중재가 필수적이다. 학생들은 교사의 도움을 받으면서 주어진 또는 이미 그 개념을 획득한 대상이나 참조 맥락 내에서 특정한 의미를 가지는 새로운 기호와 상징 체계를 발전시켜야 한다. 역으로, 기호와 상징 체계의 일관성을 유지하면서 내삽과 외삽을 통해 대상이나 참조 맥락을 확장할 수도 있다. Steinbring(2005: 22-23)은 지식 구성 과정에서 인식론적 삼각형의 세 꼭짓점이 명시적으로 드러나지 않는 경우가 있을 수 있으며, 선험적으로 결정되는 것도 아니라고 본다. 또한, 그는 대상과 참조 맥락에서 시작하건, 기호와 상징 맥락에서 시작하건 수학적 개념 또는 지식의 성장이 가능하다고 본다. 선형계획법 관련 지식도 대상/참조 맥락과 기호/상징 맥락으로 구분할 수 있으며, 그 둘 사이의 상호작용을 촉진하고 중재하는 수학적인 개념 또는 지식을 생각할 수 있다.

선형계획법 관련 내용에서 일차적으로 대상/참조 맥락이 되는 것은 일차식이다. 이 때 일차식 $ax+by$은 특정 순서쌍 (x,y)를 대입함으로써 특정 값을 가지게 된다. 따라서 실제로 일차식 $ax+by$은 이원일차함수식 $z=ax+by$을 의미하고 제한된 영역은 이 이원일차함수의 정의역으로 볼 수 있으며, 문제는 정의역이 영역으로 제한된 경우의 이원일차함수식의 최댓값과 최솟값에 관한 것이다. 하지만 학생들은 일원일차함수식 $y=ax+b$의 최댓값과 최솟값, 일원이차함수식 $y=ax^2+bx+c$의 최댓값과 최솟값을 학습하였으나, 이원일차함수식의 최댓값과 최솟값에 대해서는 학습한 경험이 없다. 따라서 이원일차함수식의 최댓값과 최솟값이 의미하는 바를 파악해야 한다. 문제의 의미를 파악하지 못하면 문제를 해결하기 어려울 것이다. 학생들은 x에 대한 함수의 정의역이 구간으로 제한된 경우에 함수의 최댓값과 최솟값을 결정하는 문제를 해결해보지 않고, x,y에 대한 함수의 정의역이 영역으로 제한된 경우에 함수의 최댓값과 최솟값을 결정하는 문제를 다루어야 한다. 최댓값과 최솟값은 중학교 3학년 과정에서 구체적인 예를 통해 다음과 같이 정의된다.

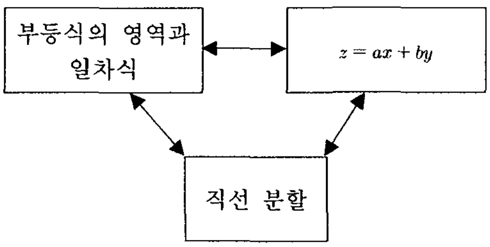
> 어떤 함수의 정의역의 모든 원소에 대한 함수값 중에서 가장 큰 값을 최대값, 가장 작은 값을 그 함수의 최소값이라 한다. 즉, 이차함수 $y=x^2$은 최소값이 0이고, 최대값은 없다. 또, 이차함수 $y=-x^2$은 최대값이 0이고, 최소값은 없다(금종해 외, 2003: 121).

선형계획법에서도 이 정의는 유효하지만, 이 정의는 정의역이 실수 전체인 경우만을 다루고 있다. 하지만 선형계획법의 정의역은 영역으로 제한되어 있으므로, 학생들은 정의역의 제한 된 경우의 함숫값 그리고 최댓값과 최솟값의 의미를 이해해야 한다. 즉, 학생들은 '함수의 최댓값과 최솟값'의 의미를 정의역이 제한된 경우로, 그리고 이원일차함수로 확장해야 한다. 무한개의 원소를 가진 정의역에서의 이원일차식의 최댓값과 최솟값 개념을 구성하기 위해서 우선 기존에 학습했던 유한개의 원소를 가진 정의역에서의 이원일차식의 최댓값과 최솟값 개념으로부터 최댓값과 최솟값의 개념을 확장해야 한다. 예를 들어, 유한집합 $A=\{(1,-1),(2,2),(4,1),(1,3),(2,3)\}$에서 $2x+y$의 최댓값이나 최솟값은 유한개의 순서쌍을 대입해봄으로써 확인할 수 있다. 주어진 정의역에 속하는 순서쌍들이 가지는 함숫값을 통해 일차식을 함수식으로 파악해야 한다. 이를 [그림 Ⅲ-2]와 같은 인식론적 삼각형으로 설명할 수 있다.



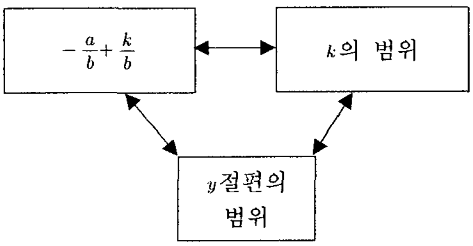
[그림 Ⅲ-2] 선형계획법 관련 인식론적 삼각형 1

일차식의 최댓값과 최솟값이 무엇인가를 이해하였다면, 일차부등식으로 표현되는 영역과 일차식이 어떻게 관련되지를 이해해야 한다. 이 때, 대상/참조 맥락이 되는 것은 일차부등식으로 표현되는 영역과 일차식이다. 이 때 일차부등식으로 표현되는 영역은 무한집합이다. 학생들은 주어진 영역이 무한집합이며, 여기에 속하는 원소에 대해 목적함수의 값을 모두 구할 수는 없음을 인식해야 한다. 목적함수의 값들을 모두 파악할 수 없다면 최댓값이나 최솟값을 구하는 것도 불가능할 것이다. 그러나 목적함수가 $z=ax+by$와 같이 이원일차함수인 경우, 주어진 영역을 $ax+by=k$인 직선들로 분할할 수 있고, 이 직선 위의 점들은 모두 z값이 k로 일정하다. 그러므로 직선 위의 점 중 하나만을 대입해서 목적함숫값을 구할 수 있으며, k값 중 최대 또는 최소가 되는 경우를 찾으면 된다. 결국 학교수학의 문제 상황에서 최적해를 구할 수 있는 것은, 주어진 영역에 속하는 원소의 개수가 무한임에도 불구하고 직선에 의한 분할을 통해 대표 원소의 함숫값만 비교하면 되기 때문이다. 학생들은 직선으로 평면을 분할하여 파악한다는 새로운 개념을 통해, 일차부등식으로 주어진 영역과 일차식, 곧 참조 맥락과, $z=ax+by$로 표현되는 목적함수, 곧 기호 맥락 사이의 관계를 파악할 수 있다. 이 개념을 가지고 있어야 비록 예외적인 상황이긴 하지만 선형계획법의 주요 사고 전략에 대한 이해가 가능하다. 이를 [그림 Ⅲ-3]과 같은 인식론적 삼각형으로 설명할 수 있다.



[그림 Ⅲ-3] 선형계획법 관련 인식론적 삼각형 2

주어진 영역을 직선으로 분할함으로써 효율적으로 목적함숫값을 비교할 수 있게 되었음을 이해하였다면, 이제 기울기가 $-\frac{a}{b}$인 직선들이 주어진 영역과 어떻게 관련되는지 파악해야 한다. 이 직선들과 주어진 영역과의 교집합은 선분으로 표현되며, 이 때문에 다각형 모양으로 주어진 영역 내의 제한된 몇 개의 점에서 함숫값을 구하면 최댓값 또는 최솟값을 찾을 수 있게 된다. 다시 말하여 각 선분에서 한 점만 택하여 목적함숫값 k를 구하기 때문에, 어떤 선분에 대해 k가 최댓값 또는 최솟값을 가지는지 파악하면 되고, 이는 곧 '$y=-\frac{a}{b}+\frac{k}{b}$'의 y절편 중에서 최댓값 또는 최솟값을 가지는 경우, 곧 꼭짓점에서의 함숫값과 관련을 맺게 된다. 결국 목적함숫값의 범위는 기울기가 $-\frac{a}{b}$인 직선의 y절편의 범위에 의해 결정되며, 꼭짓점에서의 값만을 이용하여 이 범위를 구할 수 있다는 개념을 획득해야 한다. 이를 [그림 Ⅲ-4]과 같이 나타낼 수 있다.



[그림 Ⅲ-4] 선형계획법 관련 인식론적 삼각형 3

[그림 Ⅲ-2]에서 정의역의 순서쌍을 대입함으로써 일차식을 함수식으로 파악한다는 개념, [그림 Ⅲ-3]에서 일차부등식으로 표현된 영역을 직선으로 분할하여 파악한다는 개념, 그리고 [그림 Ⅲ-4]에서 y절편의 범위를 파악하여 주어진 일차식의 값의 범위를 파악한다는 개념에는 대부분의 학생들이 스스로 발전시키기 어려운 측면이 내재되어 있다. 일차함수의 그래프가 직선으로 표현된다는 것을 이미 학습하였지만, 그 때 다루는 그래프는 평면을 분할하는 것이 아니라 특정한 조건을 만족하는 평면 위의 점들을 연결하여 구성한 단일한 대상이다. 이 단일한 대상의 성질을 기울기와 절편 개념에 비추어 탐구할 뿐, 동일한 기울기를 가지는 직선들로 주어진 평면영역을 분할하여 그 영역을 탐구한 경험은 없다. 마찬가지로 일차함수의 그래프 관련 내용을 학습할 때, y절편은 '직선이 y축과 만나는 점'이라는 단순한 정의 그 이상의 의미를 생각하지 않는다. 그런데 선형계획법 관련 내용에서는 구해야 하는 일차식의 값의 범위를 결정하게 하는 중요한 도구가 된다. 직선이 y축과 만나는 점이라는 단순한 개념만 가지고 있는 학생에게는, 하나의 값이 아니라 복수의 값을 가지며 그것이 일정한 범위로 표현된다는 것을 파악하기 어려울 것이다. 더욱이 그 범위가 원래 구하려고 하는 목적함수의 값의 범위와 관련된다는 것을 이해하기도 어려울 것이다.

학교수학에 포함되어 있는 선형계획법 관련 내용의 이해에 필요한 인식론적 삼각형을 분석한 결과, [그림 Ⅲ-2], [그림 Ⅲ-3], [그림 Ⅲ-4]과 같이 학생들에게 제공하고 강조해야 할 대상/참조 맥락, 기호/상징 맥락 그리고 수학적인 개념이 있음을 확인할 수 있었다. 선형계획법 지도와 관련하여 이들 세 꼭짓점 그리고 꼭짓점 사이의 상호작용의 의미를 명확하게 밝힌다면, 학생들을 알고리즘만이 아니라 개념적인 이해의 수준에 이르도록 할 수 있을 것이다. 앞의 세 그림에 제시한 인식론적 삼각형의 세 꼭짓점 그리고 그 상호작용에 대해서는 구체적인 수업 상황과 관련지어 다시 서술할 필요가 있다. 이에 대해서는 다음 절의 가설 학습 경로 관련 논의에서 다시 살펴볼 것이다.

2. 가설 학습 경로

이제 지금까지의 논의를 종합하여 고등학교 1학년 부등식 단원에서 선형계획법을 어떻게 교수학적으로 변환하여 학습하도록 할 것인지 논의한다. 이 연구에서는 가설 학습 경로를 4단계로 구성하였다.

1단계는 인식론적 삼각형1에 해당하는 것으로, 주어진 정의역의 순서쌍을 일차식에 대입함으로써 일차식이 함수식임을 이해하는 단계로, 1번과 2번으로 구성한다. 1번은 주어진 영역이 무한집합이며 여기에 속하는 원소에 대해 목적함수의 값을 일일이 구할 수는 없음을 인식할 수 있도록 발문하는 문맥이다. 일반적으로 선형계획법에서 제시되는 질문 유형인 1(2) 문항의 의미를 파악하기 위해서, 이전에 학습했던 사실들을 회상하여 연결하도록 문항을 구성한다. 즉, 목적함수의 정의역이 무한집합이기 때문에 일일이 대입하여 최댓값을 구할 수 없음을 주지시키기 위하여, 우선 목적함수의 정의역이 유한집합인 경우를 먼저 제시한다. 학생들은 정의역이 유한집합인 경우와 무한집합인 경우를 비교함으로써, 정의역이 무한집합인 경우에 일일이 점을 대입하는 대신 좀 더 효율적인 방법을 찾아야 한다는 목적의식을 가질 수 있다. 즉, 1(1)번에서 주어진 정의역의 원소가 유한인 경우에 이원일차식으로 표현된 함수의 값을 계산한다. 그리고 1(2)번에서 주어진 정의역이 무한인 경우에도 값들을 대입함으로써 이원일차식으로 표현된 함수의 값을 찾아야 한다는 사실을 이해하도록 한다.

2번은 학생들이 1(2)번 문제에서 무한집합인 정의역에서 목적함수의 최댓값을 구하는 의미를 파악하지 못한 경우에, 그 의미를 확인할 수 있도록 하는 문제이다. 주어진 부등식 영역에서 목적함수 $ax+by$의 최댓값을 구하는 것은 $ax+by=k$에서 k의 최댓값을 구하는 것임을 확인한다. 2(2)번 문항은 $ax+by=k$로의 변환을 교사가 제안하는 것보다는 학생들이 스스로 찾아볼 수 있도록 하는 문제이다. 1번과 2번은 기존 교과서에서 다루지 않았던 상황을 다룸으로써, 정의역이 무한개의 점으로 이루어진 제한된 영역인 경우에 목적함수가 값을 갖는다는 의미를 파악하는 기회를 제공한다.

2단계와 3단계는 왜 일차함수의 y절편에 주목하는지, 왜 꼭짓점에서의 y절편만을 살펴보면 되는지, y절편과 목적함수의 관계는 무엇인지를 이해하도록 하는 단계이다. 기존 교과서에서 충분한 설명 없이 $ax+by$를 k로 두었던 것과는 달리, $ax+by$를 k로 두어야 하는 이유와 이것이 직선의 방정식으로 표현된다는 사실을 이해하도록 한다.

1. 다음 문항에 답하여라.

(1) 집합 $A=\{(1,-1),(2,2),(4,1),(1,3),(2,3)\}$에서 $2x+y$의 최댓값은?

(2) 집합 $B=\{(x,y) \mid 2x+3y \le 78,\ 3x+2y \le 18,\ 2 \le x \le 21,\ y \ge 3\}$에서 $2x+y$의 최댓값은?

2. 다음 문항에 답하여라.

(1) $B=\{(x,y) \mid 2x+3y \le 78,\ 3x+2y \le 18,\ 2 \le x \le 21,\ y \ge 3\}$를 평면 위에 나타내고 원소를 다섯 개 택하여 $2x+y$의 값을 구하여 보시오.

(2) B에 속하는 임의의 원소 (x,y)에 대한 $2x+y$의 값을 k라고 할 때, $2x+y=($ $)$로 나타낼 수 있다. 따라서 'B에서 $2x+y$의 최댓값을 구하는 것은 ( )의 최댓값을 구하는 것과 같다.'에서 ( )를 채우시오.

2단계는 인식론적 삼각형2에서 제시하였듯이, 부등식 영역과 일차식으로 제시된 참조맥락과 $z=ax+by$로 표현되는 목적함수의 관계를 파악하여 부등식 영역을 직선으로 분할하는 과정이다. 분할된 각 직선 위의 한 점씩 대입하여 목적함수의 값을 구할 수 있다는 것을 인식시키기 위해 다음과 같은 질문3을 할 수 있다.

3단계는 인식론적 삼각형3에서 분석하였듯이 대상/참조 맥락인 직선의 그래프와 기호/상징 맥락인 k의 범위를 관계시키는 개념을 y절편으로 구성하는 과정이다. 어떤 k에 대하여 직선 $2x+y=k$가 영역을 지나는지 알아보는 것이 주먹구구식으로 접근해서는 쉽지 않음을 질문 4(1)을 통하여 인지한 후, 질문 4(2)를 통하여 k의 최댓값 또는 최댓값을 구하는 것이 $ax+by=k\,(b\neq 0)$를 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{k}{b}$의 형태로 고쳐서 기울기를 $-\frac{a}{b}$로 갖는 영역을 지나는 직선들의 y절편을 비교하는 것으로 인식을 변환시킨다.

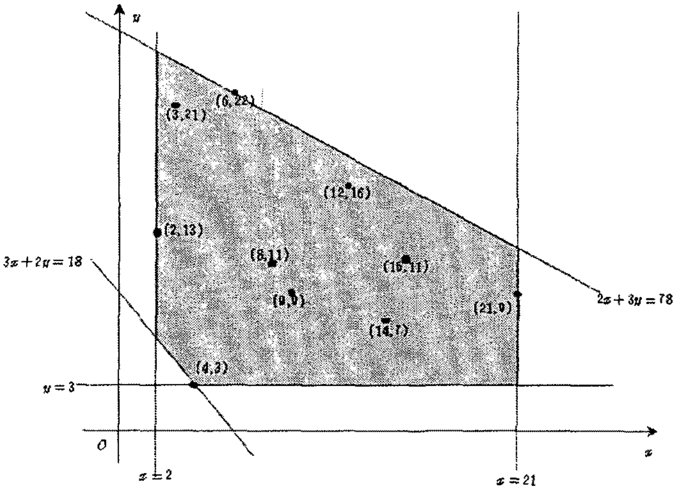
4단계는 주어진 영역이 실현가능한지, 유계

3. (1) 아래 주어진 10개의 점들에 대하여 k 값이 같은 점들과 그 값을 적어 보자. 또, 그 점들을 아래 영역에서 찾아 동그라미 쳐 보자.

점	k 값

점	k 값

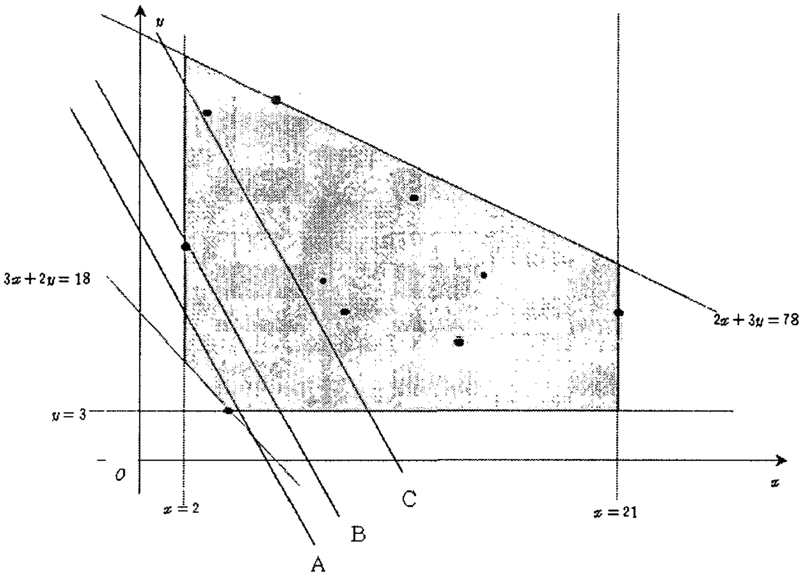
(2) k 값이 같은 점들 중 두 개씩 뽑아 그 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구해보고 그 결과에 대하여 특이한 점이 있으면 그것에 대하여 적어보자. 또한 왜 그러한 현상이 일어났는지 분석한 후 그것으로부터 얻은 결론을 적어보자.



(3) (2)에서 얻은 결과들을 사용하여 영역 안에 있는 점을 일일이 대입하는 것보다 효율적으로 k의 최댓값을 구하는 방법을 제안하여 보자.

4. (1) 문제 3(3)에서 영역을 지나는 직선 $2x+y=k$의 k 값들을 비교하여 그 중 최댓값을 구하자는 결론을 내렸다. 이 방법을 적용하기 위하여 27이 k값으로 얻어질 수 있는지 알아보자. 즉, 직선 $2x+y=27$ 위에 있는 점이 영역 안에 존재하는가? 또한 60이 k값으로 얻어질 수 있는가?

(2) 이제 영역을 지나는 직선 $2x+y=k$의 k값을 효율적으로 비교할 수 있는 방법을 제시하여 보자. 직선 $2x+y=27$과 직선 $2x+y=60$을 그려보고 이제 질문 (1)의 답을 다시 생각하여 보자. (c) 아래 그림의 영역을 지나는 세 직선 A, B, C는 모두 기울기를 -2로 갖는 직선들이다. 이 중 가장 큰 y절편을 갖는 것은? 이 중 가장 큰 k값을 갖는 것은? 'k의 최댓값을 효율적으로 구하려면 기울기를 (   )로 가지면서 영역을 지나는 직선의 (   )을 비교하여 구하면 된다.'에서 각 (   )을 채우시오.



(3) k의 최댓값은?

(4) 같은 영역에서 $3x-2y$의 최댓값을 구하시오.

5. (1) 연립부등식 $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y \ge x-1$, $x^2+y^2 \le 1$가 나타내는 영역을 그려보고 $2x+y$가 최댓값을 갖는 점을 표시하여 보시오.

(2) 어떠한 영역에 대해서도 $2x+y$의 최댓값이 항상 존재할까? 그렇지 않다면 최댓값이 존재하지 않는 영역을 한 개 찾아보시오.

인지 등 최적해의 존재가능성을 확인함으로써, 최적해를 구한다는 수학적인 사고 방법이 어떤 점에서, 왜 유용한지 판단할 기회를 제공하는 단계이다. 현재 교과서에서 항상 주어진 영역에서 함수의 최댓값이나 최솟값이 존재하는 경우만을 다루는 것과는 달리, 최댓값과 최솟값의 존재가능성을 탐색하게 된다. 학생들이 습득한 해결전략을 일반화할 수 있도록 하는 5(1) 문제와 $ax+by$의 극값이 항상 존재하는 것이 아님을 인식시키기 위한 5(2)문제로 구성한다.

IV. 요약 및 결론

이 연구에서는 먼저 수학적 맥락에서 학문적 지식으로서의 선형계획법을 분석하고, 학교수학의 맥락에서 가르칠 지식으로서의 선형계획법을 분석하여 교수-학습의 방향을 탐색하였다. 그리고 인식론적 관점에서 선형계획법의 학습 과정을 살펴보고 이를 바탕으로 선형계획법의 가설 학습 경로를 구성하였다.

수학과 학교수학에서의 맥락을 비교한 결과, 선형계획법의 교수학적 변환의 수정 방향은 다음 2가지이다. 첫째, 수학적 맥락에서 선형계획법은 어떤 조건에서 최적해가 존재하는지 존재한다면 효율적으로 그 해를 구하는 방법을 무엇인지를 결정하는 과정이다. 하지만 학교수학의 맥락에서는 주어진 영역의 실현 가능성 여부, 유계 여부 등을 고려하지 않고 최적해를 찾는 알고리즘에 초점을 두고 있다. 따라서 언제 최적해를 구할 수 있으며, 최적해를 구한다는 수학적인 사고 방법이 어떤 점에서 왜 유용한지 생각할 기회를 제공할 필요가 있다. 둘째, 수학적 맥락에서는 일반적인 해법을 추구하여 n개의 일차부등식으로 주어진 영역에서 n개의 항을 가지는 일차식의 최댓값과 최솟값을 다루고, 주어진 영역 속의 점 중에서 제한된 개수의 점만을 대입해도 최적해를 구할 수 있다는 정리를 다루었다. 하지만 학교수학에서는 3개 또는 4개의 일차부등식으로 주어진 영역에서 이원일차식의 최댓값과 최솟값을 다루며, 제한된 개수의 점을 대입하여 최적해를 구할 수 있는 사실만을 활용하며 그 정당성을 다루지는 않는다. 따라서 왜 일차함수의 y절편에 주목하는지, 왜 꼭지점에서의 y절편만을 살펴보면 되는지, y절편과 목적함수의 관계를 무엇인지 이해하고 이를 일반화하는 기회를 제공해야 한다는 점을 도출하였다.

이 연구에서는 위의 수정 방향과 더불어 다음과 같은 논점도 고려하였다. 먼저 현행 교육과정에서 선형계획법 관련 내용을 다루기 이전에, 함수의 정의역이 구간으로 제한된 경우에 함수의 최댓값과 최솟값 그리고 이원일차함수의 함숫값을 구하는 경험이 제공되지 않는다는 것을 확인하였다. 이는 학생들에게 또 다른 인지적 부담의 원인이 될 수 있으므로, 이원일차함수의 값이 무엇인지 정의역이 제한된 경우에 함수의 최댓값과 최솟값이 무엇인지를 이해할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 또한 주어진 일차식 $ax+by$의 값을 k라고 두는 이유를 알아보는 기회를 제공해야 한다.

위에서 논의한 세 가지 측면을 고려한 적절한 교수학적 변환의 관점을 도출하기 위해, 이 연구에서는 인식론적 분석을 시도하였다. 이로부터 학습자가 이미 알고 있던 대상/참조 맥락에서 기화/상징 맥락으로, 그리고 기호/상징 맥락에서 대상/참조 맥락으로 인식의 초점을 이동시키는 가운데 수학적 개념이 성장한다는 것을 고려하여 선형계획법 학습에 대한 가설 학습 경로를 구성하였다. 가설 학습 경로는 크게 4단계로 이루어진다. 1단계는 주어진 정의역의 순서쌍을 일차식에 대입함으로써 일차식이 합

수식임을 이해하는 단계이다. 학생들은 정의역이 유한집합인 경우와 무한집합인 경우를 비교함으로써, 정의역이 무한집합인 경우에 일일이 점을 대입하는 대신 좀 더 효율적인 방법을 찾아야 함을 이해하도록 한다. 그리고 주어진 부등식 영역에서 목적함수 $ax+by$의 최댓값을 구하는 것은 $ax+by=k$에서 k의 최댓값을 구하는 것임을 확인하게 한다. 2단계는 부등식 영역과 일차식으로 제시된 참조맥락과 $z=ax+by$로 표현되는 목적함수의 관계를 파악하여 부등식 영역을 직선으로 분할하는 과정이다. 분할된 각 직선 위의 한 점씩 대입하여 목적함수의 값을 구할 수 있다는 것을 인식시킨다. 3단계는 인식론적 삼각형3에서 분석하였듯이 대상/참조 맥락인 직선의 그래프와 기호/상징 맥락인 k의 범위를 관계시키는 개념을 y절편으로 구성하는 과정이다. 4단계는 주어진 영역이 실현가능한지, 유계인지 등 최적해의 존재가능성을 확인함으로써, 최적해를 구한다는 수학적인 사고 방법이 어떤 점에서, 왜 유용한지 판단할 기회를 제공하는 단계이다. $ax+by$의 극값이 항상 존재하는 것이 아님을 인식시켜서 선형계획법의 해결전략을 일반화할 수 있도록 한다.

Simon(1995)이 제안한 바와 같이 학교수학에서 다루는 많은 내용에 대한 최적의 가설 학습 경로는 지속적인 개발과 적용 후 관찰을 토대로 해야 한다. 이 연구에서도 수학적 분석, 학교수학의 이해, 교수학적 변환의 수정 방향 도출, 인식론적 분석에 의한 가설 학습 경로를 도출하였으나, 적용 후 관찰을 토대로 새로운 수정 사항을 찾아 반영해야 바람직한 방향을 찾아나갈 수 있을 것이다. 후속 연구를 통한 발전적인 논의를 기대한다.

참고문헌

교육인적자원부(2007). **교육인적자원부 고시 제 2007-79호, 수학과 교육과정.** 서울: 교육인적자원부.

계승혁 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : 성지출판사(주).

김서령 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)천재교육.

금종해 외(2003). **중학교 수학 9-가.** 서울 : (주)고려출판.

신항균 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)지학사.

양승갑 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)금성출판사.

우정호 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)두산.

유희찬 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : 대한교과서(주).

윤재한 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)더텍스트.

이규승(2001). **선형계획법에서의 수치적 안정성에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

이재학 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)금성출판사.

이준열 외(2009). **고등학교 수학.** 서울 : (주)천재교육.

Avriel M. & Golany B. (1996). *Mathematical Programming for Industrial Engineers.* CRC Press.

Baker, K. (2000). Gaining Insight in Linear Programming from Patterns in Optimal Solutions. *INFORMS Transactions on Education*, 1(1). 4-17.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 13-58.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensee Sauvage Editions.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Foulds, L. R. (1984). *Combinatorial Optimization for Undergraduates*. Springer-Verlag : New York.

Jeter, M. W. (1986). *Mathematical Programming: An Introduction to Optimization.* CRC press

Onwubolu, Godfrey C. & Babu, B. V. (2004). *New Optimization Techniques in Engineering*. Springer: New York.

Papadimitriou, C. H. & Steiglitz, K. (1998). *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover.

Shama, G. & Dreyfus, T.(1994). Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems. *Educational Studies in Mathematics, 26(1)*, 45-70.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, 114-145.

Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectof. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, 91-104.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom. Interaction - An Epistemological Perspective.* Springer : New York.

Stevens, S. P. & Palocsay, S. W. (2004). A translation approach to teaching linear programming formulation. *INFORMS Transactions on Education, 4(3)*, 1-27.

Kang. W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbooks*. Doctoral thesis. University of Georgia.

Wittmann, E. (1998). Mathematics education as a 'design science'. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity*. An ICMI study. Book 1 (pp. 87-103). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Exploring a Hypothetical Learning Trajectory of Linear Programming by the Didactical Analysis

Choi, Ji Sun (Jungheung Middle School)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)
Kim, Suh Ryung (Seoul National University)

Linear programming(LP) is useful for finding the best way in a given condition for some list of requirements represented as linear equations. This study analysed LP in mathematics contexts and LP in school mathematics contexts, considered learning process of LP from an epistemological point of view, and explored a hypothetical learning trajectory of LP. The differences between mathematics contexts and school mathematics contexts are whether they considered that the convex polytope Ω is feasible/infeasible or bounded/unbounded or not, and whether they prove the theorem that the optimum is always attained at a vertex of the polyhedronor not. And there is a possibility that students could not understand what is maximum and minimum of a linear function when the domain of the function is limited. By considering these three aspects, we constructed hypothetical learning trajectory consisted of 4 steps. The first step is to see a given linear expression as linear function, the second step is to partition a given domain by straight lines, the third step is to construct the conception of y-intercept by relating lines and the range of k, and the forth step is to identify whether there exists the optimum in a given domain or not.

* **Key Words** : linear programming(선형계획법), hypothetical learning trajectory(가설 학습 경로), didactical analysis(교수학적 분석), epistemological triangle(인식론적 삼각형)

논문접수: 2009. 10. 12
논문수정: 2010. 2. 10.
심사완료: 2010. 2. 17.