대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 1, 73-84. Feb 2010

수학적 모델링의 정교화 과정 연구

강 옥 기*

학교수학에서 다루는 수학적 모델링의 일반적인 특성은 하나의 실제적인 문제를 해결하기 위하여 수학적 모델을 도입하고 이를 풀어서 실제적인 문제에 답을 제시하는 일회적인 경우가 많다. 그러나 실제적인 문제는 일회적인 모델링으로는 해결되지 않거나 그 해가 충분히 정밀하지 못한 경우가 있다. 본 연구는 여러 가지 변인을 가진 실제적인 문제를 해결하기 위해 수학적 모델을 구성할 경우, 구성한 수학적 모델의 해의 의미성을 분석해 보고 필요하면 더욱 정교한 해를 구할 수 있는 모델로 나아가는 수학적 모델링의 정교화 과정 모형을 구안하였다. 또한 그것을 수학교실에서 활용할 수 있는 수학적 모델링의 예를 제시함으로써 학교수학에서 수학적 모델링의 정교화를 다룰 수 있게 하였다.

I. 서언

수학을 학습하는 중요한 목적 중의 하나는 실생활의 여러 가지 문제를 수학을 이용하여 해결하기 위한 것이다. 실생활 문제를 해결하기 위하여 수학을 이용한다는 것은 실생활 문제를 수학적 문제로 변환한 다음 수학적 문제를 해결한 후 그 결과를 해석하여 실생활 문제를 해결하는 것이다. NCTM(1989)은 이와 같은 일련의 과정을 수학적 모델링이라고 하고 있다. 황혜정(2007)의 연구에 의하면 수학적 모델링이라는 용어 자체에 관한 형식적이고 엄밀한 정의는 대부분의 논문에서 드러내어 강조하고 있지 않으며, 오히려 모델 개발을 수반하는 모델링 과정을 통해 수학적 모델링이 무엇인지를 나타내는 경향이 있다.

수학적 모델링이 중등수학교육에 영향을 미치기 시작한 것은 1950년대에서 1960년대에 걸친 수학교육 현대화 운동에 의한 학문 중심적 형식주의의 수학교육에 대한 비판으로 일어난 1970년대의 기본으로 돌아가기 운동의 일환으로 수학의 응용과 현실세계의 연결성을 강조하면서부터라고 할 수 있다(Blum, 1989; 손홍찬 · 류희찬, 2007). 그 후부터 수학적 모델링에 관한 연구는 국내·외적으로 꾸준히 연구되고 있는데, 황혜정(2007)에 의하면 국외의 연구로는 Powell (1981), Dilwyn(1989), NCTM(1991), Lieven et al. (2002), Dossey et al(2002) 등이 있으며, 국내의 연구로는 11편의 논문이 있는데 그들의 연구는 수학적 모델링에 관련된 이론을 연구한 것 3편, 수학적 모델의 개발 및 실험연구를 한 것 2편, 사례를 중심으로 실험연구를 한 것 6편이 있다. 그 후에 손홍찬·류희찬(2007)은 스프레드시트를 활용하여 더욱 정교한 해를 구하는 과정을 제시하였다.

위의 연구들이 다룬 실생활 문제 상황은, 학습의 대상이 중등학교 학생이란 점을 감안한 것

* 성균관대학교, okkang@skku.edu

으로 생각되는, 비교적 간단한 것들로서 한 개의 변인(독립변수)만을 내포하고 있다. 그러나 대부분의 실생활 문제 상황은 여러 개의 변인을 내포하고 있으며 이들을 모두 반영한 해를 구하려면 매우 복잡한 문제가 되며 그 해를 구하는 것이 복잡하고 어려울 뿐만 아니라, 구한다고 해도 큰 의미가 없을 수도 있다. 여러 개의 변인을 내포하는 복잡한 문제를 해결하는 한 방법으로서 문제 상황의 기본적인 일부 변인만을 고려한 문제를 구성하여 그 해를 구한 다음 남은 변인을 반영해 가면서 점차적으로 정교한 해를 구하는 방법이 있다. 이와 같이 수학적 모델을 구한 다음 변인의 수를 점차적으로 늘리면서 더욱 정교한 해를 구할 수 있도록 변형하는 것을 수학적 모델링의 정교화라고 한다. 또한 어떤 상황에서 얻은 자료들의 분포 경향을 나타내는 수학적 모델을 더욱 정밀한 해를 구할 수 있는 수학적 모델로 변형하는 것도 수학적 모델링의 정교화라고 한다. 수학적 모델링과 수학적 모델링의 정교화는 실생활에 관련된 문제를 해결하는 데 유용한 한 방법으로서 수학의 학습지도에서 중요한 한 요소이다.

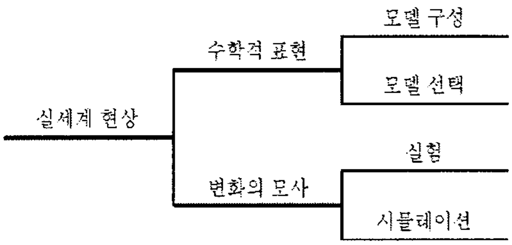
지금까지 수행된 수학적 모델링에 대한 선행 연구를 분석해 보면 수학적 모델링의 정교화에 대한 연구가 거의 없는 실정이다(황혜정 2007). 따라서 본 연구는 수학적 모델링과 수학적 모델링의 정교화에 대한 선행 연구를 분석해 보고, 세련된 수학적 모델링의 정교화 모델을 제시하고 이를 중등수학에 활용할 수 있는 예를 제시함으로써 수학적 모델링의 정교화를 중등학교 수준의 수학교육에서 다룰 수 있게 하는 것을 본 연구의 목적으로 한다.

II. 수학적 모델

수학적 모델은 수학적 모델링에서의 주요한 개념이다. 일반적으로 모델의 개념에는 두 가지가 있다. 하나는 구체적 모델(concrete model)이고 다른 하나는 추상적 모델(abstract model)이다. 구체적 모델이란 어떤 실물의 특성을 이해하는데 도움을 주기 위해 그 실물을 축소 또는 확대하여 만든 조형물이다. 예를 들면 어떤 자동차의 외형과 매우 유사하게 만든 장식용 자동차는 그 자동차의 구체적 모델이다. 추상적 모델이란 어떤 사물이나 현상의 특성을 추상적인 방법, 즉 기호, 문자, 식, 그래프, 도표 등을 사용하여 나타낸 것이다. 예를 들면 자유낙하 하는 물체가 떨어진 시간을 x, 떨어진 거리를 y라 하고 x와 y의 관계를 이차함수 $y = gx^2$ (단, g는 중력가속도)로 나타내었을 때, 이 이차함수는 자유낙하하는 물체의 낙하한 시간과 낙하한 거리의 관계를 나타내는 추상적 모델이다.

이제 수학적 모델의 개념과 이와 관련된 연구를 살펴보자. Dossey 등(2002)은 실세계 체계나 현상을 연구하기 위해 디자인된 수학적 구조물을 수학적 모델이라고 정의하였으며, 손홍찬·류희찬(2007)은 실세계 현상을 연구하기 위해 만들어진 수학적 고안물인 그래프, 수식, 기하학적 도형 등을 의미한다고 정의하였다. 다른 연구들도 이와 비슷하게 수학적 모델의 개념을 정의하고 있다. 본 연구에서는 위에서 알아본 수학적 모델의 개념을 좀 더 일반화 하여 실세계 현상을 수학적 기호나 식, 그래프, 도형 등과 같은 수학적 방법으로 나타낸 추상적 모델을 수학적 모델의 개념으로 사용하기로 한다. 이 정의에 의하면 수학에서 사용하는 문자, 기호, 식, 그래프, 도표 그리고 컴퓨터에서 사용하는 스프레드 수식 등은 모두 수학적 모델이다. 수학적 모델은 실세계 현상을 수학적으로 표현하기 위해 이미 존재하는 수학 중에서 선택될 수도 있고 만들어질 수도 있으며, 실세계 현상의 변화를 모사하기 위한 실

험 또는 시뮬레이션 일 수도 있다. 실세계 현상과 수학적 모델의 관계는 [그림 II-1]과 같은 도표로 나타낼 수 있다(Dossey, et al., 2002).



[그림 II-1] 실세계 현상과 수학적 모델의 관계

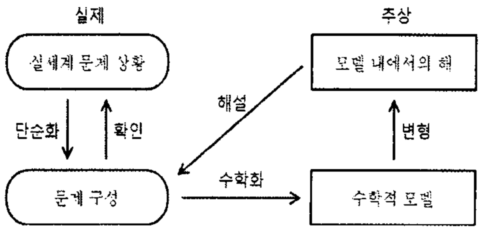
III. 수학적 모델링

이제 실세계의 현상을 이해하기 위해 수학적 모델을 찾거나 만들고 그것을 사용하여 문제를 해결하는 과정, 즉 수학적 모델링의 과정에 대하여 알아보기로 한다. 먼저 수학적 모델링의 정의에 대하여 알아보자.

NCTM(1989)은 실생활 문제를 수학적 문제로 변환하여 그 문제의 해를 구한 다음 실제 문제에 맞게 해설하는 것을 수학적 모델링이라고 하며, 수학적 모델링의 과정을 다음과 같이 제시하였다.

1) 실세계 문제 상황을 단순화 하여 실제적 문제를 구성한다.
2) 구성된 문제를 방정식, 그래프 등을 이용하여 수학적 모델로 나타낸다.
3) 수학적 모델을 변형하여 수학적 해를 구한다.
4) 수학적 해를 구성된 실제적 문제에 맞게 해설한다.
5) 실제적 문제의 해가 실세계 문제 상황에 타당한지를 확인한다.

아래 [그림 III-1]는 위의 과정을 도표로 나타낸 것이다.



[그림 III-1] 수학적 모델링

이 모델링 과정은 실세계와 수학적 모델 사이의 관계를 명료하게 설명하고 있다.

Frank Swetz and J. S. Hartzler (1991)는 수학적 모델은 현상의 특징을 가늠케 하는 수학적 구조이며, 이러한 모델을 고안해 내는 과정이 수학적 모델링이라고 정의하면서 수학적 모델링의 과정을 다음과 같이 제시하고 있다.

1) 현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재되어 있는 문제 상황을 명확히 밝히고 문제에 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
2) 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
3) 적절한 수학적 분석을 그 모델에 적용한다.
4) 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출한다.

이 연구는 실세계 문제를 해결하기 위해 수학적 모델을 구축하고 이를 이용하여 얻은 결과를 재해석하는 한 방법이 수학적 모델링임을 밝히고 있지만, 결과를 재해석하는 과정은 설명하고 있지 않다.

신은주·이종희(2004)는 상황을 구조화하면서 자신의 비형식적인 상황모델을 개발한 후에, 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 수학적 모델을 개발하고, 그 후에 수학적 모델을 상황에 비춰 해석하여 수정하고 정교화 하여 일반화가 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정을 모델링 활동으로 본다. 이 연구는 비형식적

상황 모델에서 시작하여 수학적 모델을 개발하고 이를 수정하고 정교화 하는 과정이 수학적 모델링의 과정이라고 설명하고 있지만 정교화의 과정을 구체적으로 설명하고 있지 않다.

손홍찬·류희찬(2007)은 수학적 모델링의 특징을 다음과 같이 제시하고 있다.

첫째, 수학 외적인 실세계 상황에서 시작하여 다시 실세계 상황을 설명하고 예측하는 것으로 귀결된다. 둘째, 실세계 상황에 영향을 미치는 변인과 변인들 사이의 관계를 파악하고 이들로부터 모델을 도출했을 때, 모델의 채택 및 기각을 한 번으로 결정하지 않고 실세계 상황을 보다 잘 설명할 수 있는 모델을 얻을 때까지 반성 및 수정을 거쳐 정교화 하는 과정이 반복될 수 있다. 이 연구도 수학적 모델을 도출하기 위해서는 반복적인 정교화 과정을 거치게 됨을 기술하고 있지만 정교화의 과정을 구체적으로 설명하고 있지 않다.

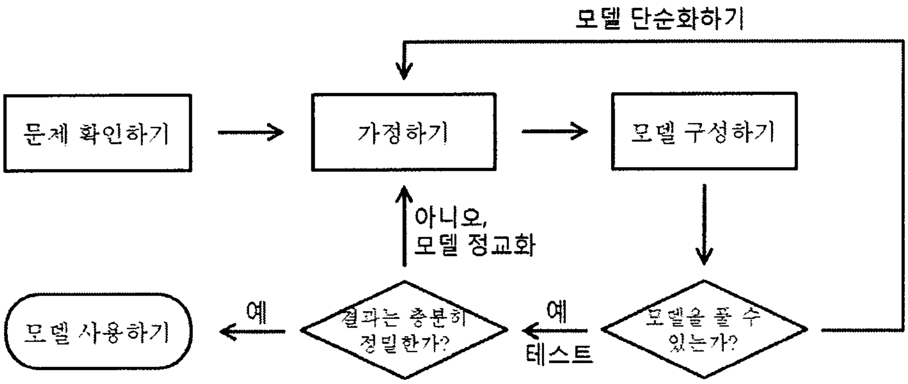
IV. 수학적 모델링의 정교화

수학적 모델링의 절차가 일회적으로 완전히 종결되는 경우도 있지만, 경우에 따라서는 문제 상황이 매우 복잡하여 이를 해결하기 위한 수학적 모델을 만들기가 어렵거나 복잡하여 해결하기가 용이하지 않은 경우도 있을 수 있다. 이런 경우 실제문제를 단순화 하고 그에 맞는 수학적 모델을 만들어 사용할 수도 있지만, 그 수학적 모델을 기반으로 하여 문제 상황에 더욱 적합한 수학적 모델이 되도록 정교화 할 수도 있다.

Dossey 등(2002)은 수학적 모델링의 과정을 단순화 과정과 정교화 과정을 순환적으로 구사하여 문제 상황에 적합한 수학적 모델링을 할 수 있다고 하며 그 과정을 아래의 [그림IV-1]과 같이 제시하고 있다.

위의 모델링 과정의 각 단계에서 수행할 활동은 다음과 같다.

첫째, 문제를 확인한다. 이 단계에서는 실제 상황으로부터 해결해야할 문제를 확인한다.
둘째, 가정하기. 이 단계에서는 앞에서 세운 실제문제에 관련된 여러 가지 변인들을 문제의 조건으로 가정한다.
셋째, 모델을 구성 한다. 앞에서 가정한 변인들을 사용하여 수학적 모델을 만든다.
넷째, 수학적 모델을 풀 수 있는지 풀어본다. 만일 풀 수 없다면 가정하기 단계로돌아가 모델의 구성에서 가정한 변인을 줄이거나 범위를 제한하여 단순화된 모델로



[그림 IV-1] 모델 구성의 순환성

수정한다.

다섯째, 모델을 풀 수 있다면 그 해가 실제문제의 해가 되도록 충분히 정밀한가를 확인한다. 만약 그 해가 실제문제의 해로서 충실하지 못하다면 정교화를 위해 두 번째 단계로 되돌아간다.

여섯째, 수학적 모델의 해가 실제문제를 해결하는 데 충분히 정밀하다면 그 모델을 유사한 문제 상황에 사용한다.

위의 모델링 과정은 모델링의 단순화와 정교화 과정을 동시에 나타내고 있다. 이 모델링 과정에서 모델의 단순화는 '가정하기'로부터 구성된 수학적 모델의 해를 구할 수 없는 경우에 일어난다. 그런데, 실제로는 문제 해결자가 자신이 구성한 수학적 모델을 풀 수 없는 경우는 거의 없다고 생각되어진다. 그러므로 '가정하기'의 단계는 '수학적 모델 구성' 단계에 통합시키는 것이 타당하다고 보아진다. [그림 III-1]에서 NCTM이 제시한 수학적 모델링의 과정에도 '가정하기' 단계는 나타나 있지 않다. 또한 모델의 단순화 또는 정교화는 '가정하기' 단계에서 변수를 조정하는 것으로 설명하고 있는데, 실제로는 변수의 조정뿐만 아니라 동일한 가정 하에서도 여러 유형의 수학적 모델을 생각할 수 있음을 간과하고 있다. 예를 들면 한 문제를 대수적 방법으로도 해결할 수 있는가 하면 기하적 방법으로도 풀 수 있다. 이와 같은 점을 반영하여 본 연구에서는 수학적 모델링의 정교화 과정을 [그림 IV-2]와 같이 제시한다. 이 모델링 과정은 앞의 [그림 III-1]에서 제시한 수학적 모델링의 과정에 정교화의 과정을 반영한 것이라 볼 수 있다.

이 모델링의 과정은 다음과 같은 특성을 갖는다.

첫째, 실세계 문제 상황으로부터 변화의 요인들을 관찰하고 자료를 수집하여 실제적인 문제를 구성한다.

둘째, 실제적 문제를 수학적 문제 즉 수학적 모델로 변환한다. 이 때 문제에 영향을 주는 가정을 구체적으로 설정한다.

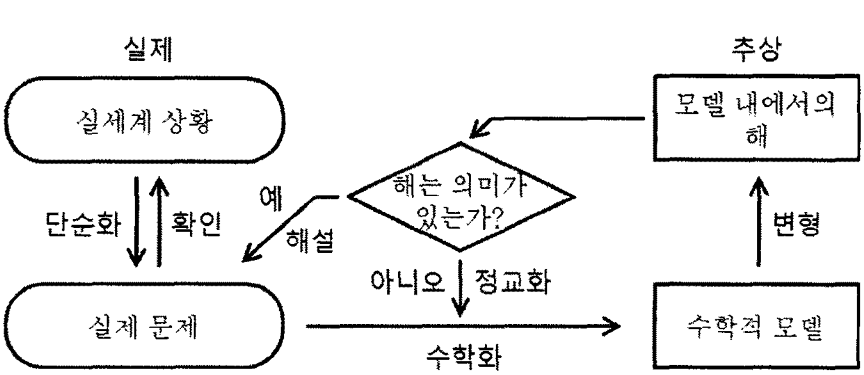
셋째, 수학적 모델을 변형하여 그 해를 구한다.

넷째, 수학적 모델에서 얻어진 해가 실제문제에 의미가 있는지 조사해 보고 의미가 만족할 정도가 아니면 수학적 모델 단계로 돌아가서 가정을 수정하거나 같은 가정 하에서 정교화 된 새로운 수학적 모델을 구성한다. 의미 있는 해가 나올 때까지 이 과정을 순환한다.

다섯째, 수학적 해가 의미가 있으면 실제 문제의 해로 해설한다.

여섯째, 만들어진 수학적 모델을 실세계의 유사한 상황에 적용한다.

앞에서 알아본 수학적 모델링의 정교화 모델이



[그림 IV-2] 수학적 모델링의 정교화 모델

적용되는 사례를 만들어 보자.

[사례 1] : 어떤 용기 안에 들어있는 효모의 증식에 관한 수학적 모델링을 만들어보자(소재의 출처 Pearl, 1927).

<실세계 상황> : 어떤 용기에 살아있는 효모가 있다. 이 효모는 시간이 지남에 따라 증가하고 있다.

<단계 1 : 실제 문제>

효모의 양은 시간에 따라 어떻게 변하는가?

<단계 2: 수학적 모델>

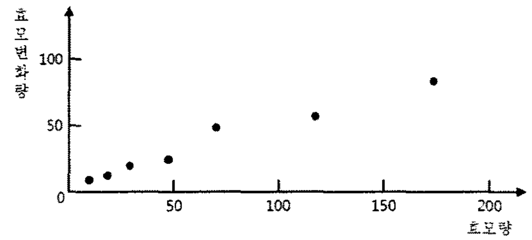
n 시간 후의 효모의 양을 p_n, n 시간에서 $n+1$시간까지의 효모의 양의 변화량을 $\triangle p_n$이라 하면 $\triangle p_n = p_{n+1} - p_n$

<단계 3 : 모델의 해>

용기에 효모 9.6을 넣고 시간의 변화에 따른 효모의 양과 양의 변화량을 조사한 결과 [그림 IV-3]를 얻었다고 하자.

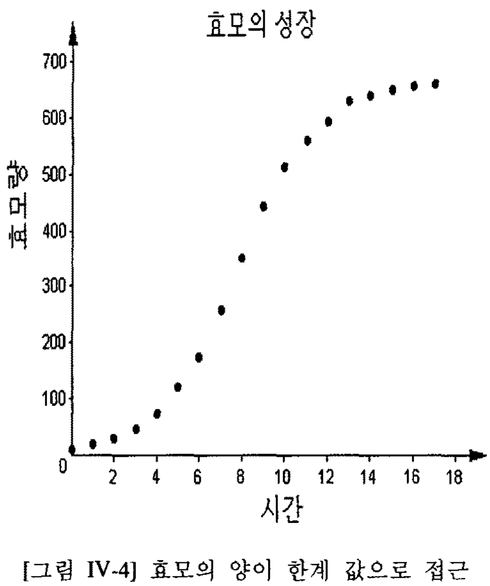
[그림 IV-3]의 오른쪽 그래프는 원점을 지나는

시간 n	효모량 p_n	효모량 변화 $p_{n+1}-p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7



[그림 IV-3] 시간의 변화에 따른 효모의 양과 양의 변화량

시간 n	효모량 p_n	효모량 변화 $p_{n+1}-p_n$
0	9.6	8.7
1	18.3	10.7
2	29.0	18.2
3	47.2	23.9
4	71.1	48.0
5	119.1	55.5
6	174.6	82.7
7	257.3	93.4
8	350.7	90.3
9	441.0	72.3
10	513.3	46.4
11	559.7	35.1
12	594.8	34.6
13	629.4	11.4
14	640.8	10.3
15	651.1	4.8
16	655.9	3.7
17	659.6	2.2



[그림 IV-4] 효모의 양이 한계 값으로 접근

직선에 가까우므로 $\triangle p_n$은 p_n에 비례한다고 보면

$$\triangle p_n = p_{n+1} - p_n = k p_n$$

이 직선은 두 점 (9.6, 8.7), (174.6, 82.7)을 지나므로 그 기울기를 구하면 0.6이다.

따라서 $\triangle p_n = p_{n+1} - p_n = k p_n = 0.6 p_n$

$$p_{n+1} - p_n = 0.6 p_n$$

$$p_{n+1} = 1.6 p_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

<단계 4 : 해는 의미가 있는가?>

모델 ①은 n의 값이 증가함에 따라 한없이 커진다.

따라서 효모의 양이 용기의 용량을 넘을 수 없다는 점을 반영하지 못하므로 정밀한 해가 아니다. 그러므로 이 모델은 용기의 용량을 고려하여 정교하게 수정할 필요가 있다.

<단계 5 : 모델 정교화>

효모의 양이 용기의 용량 (665mL)에 수렴할 때까지 변화량을 조사하여 [그림 IV-4]을 얻었다고 하자.

[그림 IV-4]의 왼쪽 표에서 $\triangle p_n = p_{n+1} - p_n$은 p_n이 증가함에 따라 증가하지만 p_n의 최댓값 665에 대하여 $665 - p_n$의 값이 0에 가까워지면 $\triangle p_n$도 0에 가까워지므로 $\triangle p_n$은 $p_n(665 - p_n)$과 관계가 있을 것으로 예측된다. $\triangle p_n$과 $p_n(665 - p_n)$의 관계를 조사해 보면 [그림 IV-5]과 같다.

이 표에서 $\triangle p_n$은 $p_n(665 - p_n)$에 비례하는 것처럼 보이므로 $\triangle p_n = k p_n(665 - p_n)$라 하고, 두 점 (0, 0), (90, 110,000)을 이용하여 k의 값을 구하면 $k = 0.00082$ 따라서

$$\triangle p_n = p_{n+1} - p_n = 0.00082\, p_n(665 - p_n)$$

$$p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

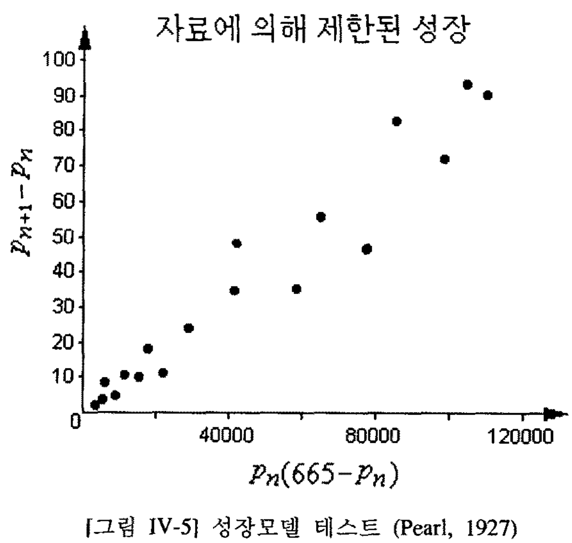
을 얻는다. 모델 ②는 모델 ①에 비하여 정교화 된 모델이다.

<단계 6 : 해설 · 적용>

위에서 구한 모델 $p_{n+1} = p_n + 0.00082(665 - p_n)p_n$에서 용기의 용량을 m, 효모의 증가율을 k 라고 가정하면, 일반화된 모델

$p_{n+1} = p_n + k(m - p_n)p_n$ ·····③을 얻는다. 이 모델은 다양한 상황에서 효모의 증가에 대한 정보를

$p_{n+1} - p_n$	$p_n(665 - p_n)$
8.7	6,291.84
10.7	11,834.61
18.2	18,444.00
23.9	29,160.16
48.0	42,226.29
55.5	65,016.69
82.7	85,623.84
93.4	104,901.21
90.3	110,225.01
72.3	98,784.00
46.4	77,867.61
35.1	58,936.41
34.6	41,754.96
11.4	22.406.64
10.3	15,507.36
4.8	9,050.29
3.7	5,968.69
2.2	3,561.84



[그림 IV-5] 성장모델 테스트 (Pearl, 1927)

제공할 수 있다.

우리나라 수학교과서에서 새로운 수학적 개념이나 성질을 지도하는 일반적인 형식은 그 개념이나 성질을 이해하게 한 다음 그 것을 이용하여 필요한 값을 구하게 하거나 이를 이용하는 응용문제를 해결하게 하는 것이다. 즉 주어진 현상으로부터 문제를 구성하고 그 단원에서 학습한 수학적 개념이나 성질을 이끌어내어 활용하게 하는 수학적 모델링의 지도는 거의 이루어지지 않는 실정이다. 다음의 사례 2와 사례 3은 우리나라 수학교과서에 흔히 있는 문제를 수학적 모델링의 정교화 과정이 일어나게 변형해 본 것이다.

[사례 2] : 높은 빌딩에서 물체를 지면으로 떨어뜨리고 이를 관찰하여 떨어진 시간과 떨어진 거리의 관계를 알아보자. (소재 출처 : 강옥기 외 2인. 중학교 수학 9-가. (주)두산. 2004 p. 130 수정)

<실세계 상황> 높은 빌딩에서 플라스틱 볼을 지면으로 떨어뜨린 다음, 일정한 시간 간격으로 공이 떨어진 거리를 관찰하고 그 결과를 표와 그래프로 나타내어본다.

<단계 1 : 실제 문제>

x 초 동안 볼이 떨어진 거리를 y cm라 하고 다음 문제를 해결해 보자

x (초)	1	2	3	4	…
y (cm)	5	20	44	78	…

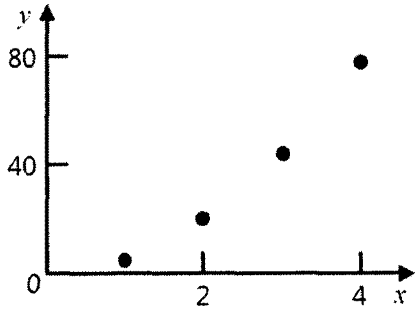
(문제 1) y를 x에 관한 식으로 나타내어라.

(문제 2) 5초 후 볼의 위치는 출발지점에서 몇 cm 떨어진 곳에 있는가?

<가정> 볼이 떨어진 거리는 측정한 것이므로 근삿값이다.

<단계 2 : 수학적 모델>

x와 y의 관계를 파악하기가 어려우므로 이 자료를 좌표평면에 그래프로 나타내 보면 [그림 IV-6]과 같다.



[그림 IV-6] 볼의 이동시간과 거리

이 그래프는 원점을 지나는 포물선의 모양을 하고 있으므로 구하는 모델은 $y=ax^2$일 것으로 예상된다. 이 모델에서 계수 a를 찾기 위하여 점 (1, 5)를 $y=ax^2$에 대입하면

$$a=5$$

따라서 구하는 모델은

$$y=5x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

일 것으로 예상된다.

<단계 3 : 모델의 해 >

모델 ④로부터 (문제 1)의 해는 $y=5x^2$, (문제 2)의 해는 125cm이다.

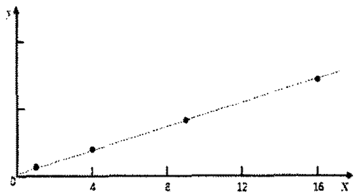
<단계 4 : 해는 의미가 있는가?>

그런데 이 모델은 순서쌍 (2, 20)은 만족하지만 순서쌍 (3, 44), (4, 78)은 만족하지 못하므로 적절하다고 단언할 수 없다. 따라서 다른 방법으로 적절한 모델을 탐구해 볼 필요가 있다.

<단계 5 : 모델 정교화>

순서쌍 (x, y)를 표현한 그래프는 이차함수의 그래프의 모양을 하고 있으므로 $x^2=X$라 하면 X와 y의 관계는 아래 표와 같으며 그 그래프는 [그림 IV-7]와 같다.

X	1	4	9	16	…
y	5	20	44	78	…



[그림 IV-7] X와 y의 관계

[그림 IV-7]의 그래프에서 4개의 점은 한 직선을 중심으로 분포되어 있으며 그 직선이 원점(0, 0)과 점 (16, 78)을 지나는 것으로 보면[1] 선의 기울기는 4.9이다.

따라서 X와 y의 관계는 $y=4.9X$로 나타내어 진다. 이 식에서 $X=x^2$ 을 대입하면 (문제 1)의 답으로 $y=4.9\,x^2$ ·············· ⑤을 얻는다.

위의 식에 $x=5$를 대입하면

$y=4.9(5^2)=122.5 \fallingdotseq 123$

따라서 (문제 2)의 답은 123cm 이다.

<단계 6 : 해설 · 적용>

모델 ④와 모델 ⑤는 유사한 모델로서 어느 것이 더 정교하다고는 말할 수 없다. 그러나 다른 방법으로 모델 ⑤를 구해봄으로써 두 모델 ④, ⑤가 의미가 있음을 인식하게 된다.

일반적으로 지구 표면의 높은 곳에서 가만히 떨어뜨린 물체의 x 초 후의 위치 y는 $y=gx^2$···⑥로 나타내어진다. 모델 ⑥에서 g는 지구 중력가속도이고 그 크기는 지구상의 위치에 따라 다르다.

[사례 3] : 두 도시 사이의 거리를 구하는 방법을 알아보자(소재의 출처: 최봉대 외 5인. 고등학교 수학. (주) 중앙교육연구소, 2008. p.339 변형).

<실세계 상황> 어느 산의 정상에서 두 도시를 내려다보고 그 사이의 거리를 구하여 본다.

<단계 1 : 실제 문제>

산의 정상 C에서 전자 거리 측정장치로 두 도시 A, B까지의 거리를 측정한 결과 C에서 A까지는 8km, C에서 B까지는 4km, 두 도시를 바라보는 각의 크기는 30° 임을 알았다. 두 도시 사이의 거리는 얼마인가?

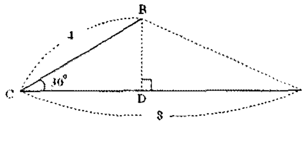
<단계 2 : 수학적 모델>

오른쪽 그림에서

$\overline{BD}=4\sin 30^\circ$

$\overline{CD}=4\cos 30^\circ$

$\overline{AD}=8-\overline{CD}$



따라서 ·· ⑦

<단계 3 : 모델의 해>

$$\overline{BD}=4\sin 30^\circ=2$$

$$\overline{CD}=4\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\fallingdotseq 3.46$$

$$\overline{AD}=8-3.46=4.54$$

이므로 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{4.54^2+2^2}\fallingdotseq 5$

<단계 4 : 해는 의미가 있는가?>

위에서 구한 해는 삼각형의 성립 조건을 만족하며 계산상의 오류가 없으므로 의미가 있다. 그러나 위의 모델은 두 변의 길이와 그 사이각의 크기가 주어진 특수한 삼각형에서 다른 한 변의 길이를 구하는 문제이다. 그 계산 과정을 일반화하여 보자.

<단계 5 : 모델 정교화>

△ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $\angle ACB=\theta$ 라 하면

$\overline{BD}=a\sin\theta$

$\overline{CD}=a\cos\theta$

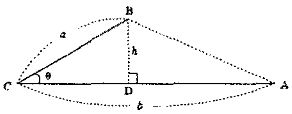
$\overline{AD}=b-a\cos\theta$

$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$

$=a^2\sin^2\theta+(b-a\cos\theta)^2$

$=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$



<단계 6 : 해설 · 적용>

---

1) 회귀직선의 식을 찾는 방법에는 3가지가 있지만, 이 연구에서는 직관적인 수준에서 찾는 것으로 한다.

△ABC에서 세 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 할 때 수학적 모델

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ ························· ⑧

는 두 변의 길이와 그 사이각의 크기를 알 때 다른 한 변의 길이를 구하기 위하여

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$$

로 변형하여 사용할 수 있으며, 삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 한 각의 크기를 구하기 위하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

로 변형하여 사용할 수 있다. 모델 ⑧을 코사인 법칙이라고 한다.

모델 ⑧은 모델 ⑦에 비하여 일반화 되어 있고 그 응용성도 더 크다.

V. 결언

수학교육의 목적 중 하나는 실생활 문제를 해결하는 수학적 문제해결 능력을 기르는 것이다. 실생활 문제를 해결하는 방법은 실생활 주변을 관찰하여 실제적 문제를 발견하고 이를 해결하기 위하여 적절한 수학을 사용하여 해결하는 것이다. 이와 같이 실생활 상황에서 구성한 실제적 문제를 수학을 사용하여 해결하고 유사한 상황에 활용하는 과정을 수학적 모델링이라고 한다. 이러한 수학적 모델링에 대한 연구는 1970년대부터 주목을 받기 시작하여 연구되어 오고 있지만 대부분의 연구는 주어진 문제에 대한 하나의 수학적 모델을 만들고 그 해를 구하여 실세계 문제를 해결하는 일회적인 과정에서 그치는 것이 대부분이다. 그 결과 실제적인 다양한 변인들을 고려하지 못함으로써 국한적인 해를 제시하거나 비현실적인 해 또는 정밀도가 떨어지는 해를 구할 수밖에 없는 경우가 발생한다.

본 연구는 실세계 문제를 해결하기 위한 수학적 모델링 과정에서 여러 가지 변인을 선별하거나 통제함으로써 같은 가정 아래에서도 보다 간결하고 정밀한 해를 구할 수 있게 하는 보다 합리적인 수학적 모델링의 정교화 과정 모형을 구안하여 제시하였다. 또 본 연구는 이 연구에서 제시한 수학적 모델링의 정교화 과정 모델을 사용하여 실제로 문제를 해결하는 세 가지 사례를 제시하였는데, 그 중 한 사례는 전형적인 수학적 모델링 문제를 수정한 것이며, 다른 두 사례는 우리나라 중학교와 고등학교 수학교과서에서 각각 볼 수 있는 평범한 문제를 해결하기 위한 수학적 모델을 구성할 때 수학적 모델링의 정교화 과정이 가능함을 구체적으로 보여주고 있다.

본 연구의 결과가 기반이 되어 수학과 교수 · 학습에서 수학적 모델링과 수학적 모델링의 정교화가 더 많이 연구되어 학생 스스로 실생활 문제에서 의미 있는 해를 구할 수 있을 뿐만 아니라 수학을 창안하고 발전시키는 능력이 길러지기를 기대한다.

참고문헌

손홍찬·류희찬(2007). 수학적 모델링에서 스프레드시트 환경이 수학적 모델의 정교화 과정에 미치는 역할. **학교수학 9**(4), 467-486.

신은주·이종희(2004). 모델 개발과정에서 도구를 조작하는 활동분석. **학교수학 6**(4), 389-409

황혜정(2007). 수학적 모델링의 이해 -국내연구 결과를 중심으로-. **학교수학9**(1), 65-97.

Blum, W. (1989). *Applications and modelling in learning and teaching mathematics*, Ellis Horwood Limited.

Dilwyn Edwards & Mike Hamson (1989). *Guide to Mathematical Modeling*. Houndmills, London : Macmillan Education Ltd..

Dossey, J. A. et al. (2002). *Mathematics*

Methods and Modeling for Today's Mathematics Classroom. A contemporary Approach to Teaching Grades 7-12. Books/Cole.

Lieven Verschaffel. et al. (2002). Everyday Knowledge and Mathematical Modeling of School World Problems. In Koeno Gravemeijer, Richard Lehre, Bert Van Oers, and Leiven Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Derdrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publishers.

Frank Swetz and J. S. Hartzler (1991). Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum, *Mathematics Teacher.* Oct. 1991, 571. Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics .

NCTM(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Pearl, R. (1927). The Growth of Population, *Quart. Rev. Biol. 2* : 532-548.

Powell, Bruce A. (1981) Mathematical Modeling of Elevator systems. In William E. Boyce (Ed.), *Case Studies in Mathematical Modeling.* London : Pitman Publishing Inc..

A Study on a Modelling Process for Fitting Mathematical Modeling

Kang, Ok Ki (Sungkyunkwan University)

Mathematical modeling is an important part of mathematics education since it can be used or created to find mathematical models to understand real life various situations. Most of mathematical modeling tasks taught and learned currently in secondary school mathematics classes need simple mathematical modelling with one or two variables and produce fixed solutions to the real life problems. But many real life problems involve various and complex variables which can be used to get more proper solutions.

Constructing mathematical models to get more appropriate solutions from the real problems having various and complex variables is not easy. In this paper the researcher suggested a model to fit mathematical models to get more appropriate solutions and showed three examples to apply the model in solving real life problems which can be treated in the secondary school mathematics classrooms.

* **Key Words** : model(모델), mathematical model(수학적 모델), modeling(모델링), mathematical modeling(수학적 모델링), modeling process(모델링 과정), fitting model(모델 정교화)

논문 접수 : 2009. 12. 21
논문 수정 : 2010. 02. 10
심사 완료 : 2010. 02. 17