대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 1, 1-20. Feb 2010

조건부확률에 관한 연구

조 차 미*

조건부확률(conditional probability)은 단순해 보이는 규칙을 가지고 있으나 여러 가지 오개념(misconception)을 양산하는 개념이다. 선행연구들은 대부분 이러한 오개념에 관한 연구들인 반면에, 본 논문은 이러한 조건부확률의 오개념에 주목하기에 앞서 다양한 상황에서의 적용이 가능한 조건부확률의 일관적인 수학적 본질은 과연 무엇이며 이에 대해 교사들은 얼마만큼 이해하고 있는지 알아보았다. 이를 위해 조건부확률의 정의를 적용하는 방법에 차이가 있는 조건부확률을 크게 두 가지 유형-상대적 비를 통해 구하는 '상대적 조건부확률(relative-conditional probability)'과 조건사건에 의한 상황변화를 추론하여 구하는 '조건문 조건부확률(if-conditional probability)'-으로 구분하였다. 단, 이것은 조건부확률의 해결 방법의 차이에 대한 표면적 구분일 뿐이다. 본 논문의 목적은 이들 속에 내포된 동일한 수학적 본질을 찾는 것이며, 이를 통해 하나의 통합된 개념인 조건부확률에 대해 교사들은 얼마만큼 이해하고 있는지 알아보았다.

I. 서론

Watson(2001)의 연구에 참여한 13명의 교사들의 말에 따르면 학생들은 절차적인 측면에서는 확률의 계산이나 순열과 같은 부분에서 어려움을 느끼며 개념적인 측면에서는 조건부확률에서 어려움을 느낀다고 하였다. 조건부확률은 단순한 수학적 정의인 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$의 규칙으로만 적용되지 않는 다양한 상황들을 만들어 낸다. 이러한 다양한 상황들에 대한 연구로는 나귀수 외(2007), 이정연(2005) 등에서 사건의 시간 순서에 의한 조건부확률 문제의 분류에 따라 시간의 언급이 없는 경우, 동시에 일어난 경우, 조건 사건이 먼저 일어난 경우, 목적 사건이 먼저 일어난 경우 등으로 보다 세분화되어 다루어지고 있다.

그러나 실제 조건부확률의 수학적 정의에서는 시간에 관한 언급이 전혀 없으며 단순히 조건사건에 대한 목적사건의 상대적 비로만 단순하게 제시되어 있다. 조건부확률의 정의는 무엇인가? 사건 B가 발생했다는 조건하에 사건 A가 일어날 조건부확률은 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$이다. 이렇게 단순해 보이는 조건부확률의 규칙은 왜 여러 가지 오개념을 양산하고 있는 것일까? 확률과 관련된 문제들 중에서도 특히 조건부 확률 문제는 학생들이 이해하기 어려운 분야로 알려져 왔으며(e.g., Tversky & Kahneman, 1983; Shaughnessy, 1992; Jones et al., 1999), Shaughnessy(1992)는 조건부확률과 관련하여 학생들이 사건의 종속성과 사건의 순서성을 혼동하는 오개념을 보고하였고, Tversky & Kahne- man(1983)은 조건부 확률에서 두 사건을 연결하는 연결사(conjunction)와 관련된 오개념을 보고하였다(나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌, 2007, 재인용).

* 용두중학교, chami622@naver.com

Gras 와 Totohasina(1995)는 조건부확률을 시간적 관계로만 해석하는 오개념과 인과적 관계로만 해석하는 오개념 그리고 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$로만 해석하는 오개념을 각각 시간적 개념(chronological conception), 인과적 개념(causal conception), 수적 개념(cardinal conception)으로 분류하였다. 조건부확률의 문제유형은 너무나 다양하고 그러한 문제들의 해결 방법 또한 상황에 따라 다르다. 어떤 것은 시간의 전후 상황에 따라 쉽게 해결되는가 하면, 또 어떤 것은 시간의 전후를 바꾸었을 때에 Bayes 정리를 사용해야 하기도 하며, 인과적 개념이 적용되는 것이 있는가 하면 어떤 것은 일체 그러한 시간적, 인과적 개념이 적용되지 않는 경우도 있다. 접해온 문제의 유형에 따라 학생들은 조건부확률에 대해 인식하게 되기 때문에 조건부확률의 다양성을 이해하지 못하는 학생들은 당연히 한 가지로 고정된 오개념을 가질 수도 있을 것이다.

앞선 연구들은 다양한 조건부확률에 대해 이해하지 못하고 있는 학생들의 오개념에 대한 연구들이 대부분이며, 이러한 원인이 되는 조건부확률의 수학적 구조에 대해 깊이 있는 논의는 이루어지지 않고 있다. 수학적 개념은 정의와 그 정의의 적용방법이 하나로 통일되어 있을 경우 그다지 많은 혼란을 가져오지 않는다. 그러나 필자는 조건부확률의 경우 수학적으로 명백히 정의되어 있음에도 불구하고 문제유형에 따라 정의를 적용하는 방법이 달라 학생들이 어려움을 겪는다고 본다.

특히 교사는 학생들이 가지고 있는 오개념을 본인이 가지고 있다면 학생들이 조건부확률을 쉽게 이해할 수 있도록 정확한 수업을 개발하기 어렵다(Stohl, 2005). 이에 본 연구는 조건부확률의 오개념에 주목하기에 앞서 조건부확률의 정의를 적용하는 방법에 차이가 있는 조건부확률을 크게 두 가지 유형-상대적 조건부확률, 조건문 조건부확률-으로 구분하여, 다양한 상황에서의 적용이 가능한 조건부확률의 일관적인 수학적 본질은 과연 무엇이며 이에 대해 교사들은 얼마만큼 이해하고 있는지 알아보았다.

II. 조건부확률의 두 가지 문제 유형

1. 문제제기

조건부확률에 관한 어느 고등학교 교사와의 대화를 아래와 같이 제시한다.

연구자 : 한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$는 어떻게 구하나요?

교 사 : 소수의 눈 $\{2, 3, 5\}$에서 5 이상의 눈이 나올 사건이니 $\frac{1}{3}$ 아닌가요?

연구자 : 수학적 정의에 따라 $P(B|A)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{1}{3}$ 란 말씀이시군요. 그렇다면, 빨간 공이 2개 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출할 때, 갑이 파란 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B이면 조건부확률 $P(B|A)$는 어떻게 구하나요?

교 사 : 그야 갑이 파란 공을 꺼냈다면 빨간 공이 2개, 파란 공이 2개가 들어 남아 있으니 조건부확률 $P(B|A)$은 $\frac{1}{2}$이죠.

연구자 : 첫 번째 문제와 풀이법이 다른 것 같지 않나요.

교 사 : 뭐가 말이죠?

연구자 : 첫 번째 문제에서는 $P(B|A)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$을 적용해서 조건부확률을 구했지만 두 번째 문제인 비복원추출의 문제에서는 $P(B|A)=\frac{n(A \cap B)}{n(A)}=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$이 어떻게 적용되고 있는 건가요?

교 사 : 음.... 글쎄요. $P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$을 이용하지 않고 그냥 바로 구할 수 있으니 굳이

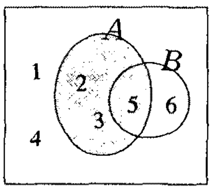
생각할 필요가 있나요? 실은 조금 애매한 부분이긴 해요.

연구자 : 또 한 가지 궁금한 것은 벤다이어그램입니다. 첫 번째 문제는 수월하게 그릴 수 있을 것 같은데 두 번째 문제는 어떻게 그려야 할까요?

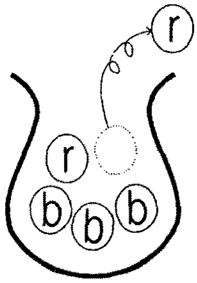
교 사 : 둘 다 그림으로 정확히 표현이 가능하지 않나요?

연구자 : 어떻게 그리면 된다는 거죠?

교 사 : 첫 번째 문제는 [그림Ⅱ-1]처럼 그리면 되고 두 번째 문제는 [그림Ⅱ-2]로 그리면 될 것 같은데요. 교과서에서도 제시되는 그림입니다.



[그림Ⅱ-1]



[그림Ⅱ-2]

연구자 : [그림 II-1]에서 사건A는 어둡게 표시된 부분이지만 [그림 II-2]에서 사건A는 어느 부분인가요?

교 사 : {빨간공, 파란공, 파란공, 파란공}이 아닌가요?

연구자 : 정말 그렇습니까? [그림 II-1]에서는 소수의 눈이 나오는 사건 A의 대상이 정확하게 {2, 3, 5}로 표현되지만 [그림 II-2]는 아닌것 같은데요.

교 사 : 아... 잠시 만요? 음... 애매하긴 하군요. [그림 II-1]은 사건 A를 표현했지만 [그림 II-2]는 첫 번째 빨간 공이 나오는 사건을 표현한 것이 아니라 빨간 공을 꺼낸 후의 상황을 표현하고 있는 것 같은데요?

연구자 : 맞습니다. [그림 II-1]에서 사건 A는 전체 표본공간의 부분집합이지만 [그림 II-2]는 사건 A를 표현한 것이 아니라 사건 A가 일어난 후의 표본공간의 질적인 변화를 나타고 있습니다. 제 생각에 두 그림은 같은 문제를 푸는데 학생들에게 쉽게 설명할 수 있을지는 몰라도 두 문제를 푸는 방법이 다르다는 것을 극명하게 보여주는 것이라고 생각합니다.

위의 그림을 정의 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 와 연결시키자면 [그림 II-1]은 n(A)=3n이지만 [그림 II-2]에서는 n(A)=4는 아니지요.

교 사 : 뭐 굳이 알 필요 있나요? [그림 II-2]는 쉽게 구할 수 있는 조건부확률이잖아요.

연구자 : 두 문제에 대한 정의의 접근방법이 다르다는 것을 인정하시나요?

교 사 : 네, 그런 것 같군요.

본 연구자는 위의 대화를 3명의 교사와 시도했으며 3명의 반응은 쉽게 이해할 수 있는 조건부확률을 왜 따지려드는지 이해할 수 없다는 식이었다. 그렇지만 뭔가 애매하면서 해결되지 않는 부분이 있음을 인정하였다.

교사의 결론처럼 굳이 알려고 애쓸 이유는 없을지 모른다. 왜냐하면 복원, 비복원추출에서 조건에 의한 변화를 인식한 후 조건부확률을 구하는 문제는 그리 복잡하지 않기 때문이다. 그러나 이 부분에 대한 분석은 다음과 같은 두 가지 측면에서 의 필요하다. 첫째, 학생들이 가지는 오개념은 조건부확률의 어느 한 쪽 측면에서 나타나는 특성으로 굳어질 수 있는 것이며 그러므로 두 가지 상황의 통합적인 수학적 본질을 제시하는 것은 유의미한 작업일 것이라 본다.

둘째, 비복원추출에서 첫 번째 추출이 조건사건이고 두 번째 추출이 목적사건인 경우는 쉽게 해결되지만 시간의 순서를 바꾸어 두 번째 추출이 조건사건이고 첫 번째 추출이 목적사건인 경우에 우리는 또 다른 방법인 Bayes정리를 사용

해야 함을 알고 있다. 이 또한 수학적으로 같은 구조를 갖고 있는 것임을 해명할 것이다.

2. 조건부확률의 정의와 두 가지 문제 유형

조건부확률의 수학적 정의는 다음과 같다.

$P(B)>0$일 때 사건 B가 발생했다는 조건하에 사건 A가 일어날 조건부확률은 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이다(Hogg, Tanis, 1997).

어떤 확률 실험에서는 표본공간 S의 한 부분집합 B에 속해있는 실현치 들에만 관심을 갖게 되는 경우가 있다. 이 경우 B가 표본공간이 되며, 우리는 새로운 표본공간 B에 대하여 확률 집합함수를 $P(A|B)$로 표기하며 이를 조건부확률(conditional probability)이라 한다.

조건부확률 $P(A|B)$이 정의되는 새로운 표본공간은 사상 B이며 원소들이 등확률을 가질 때 새로운 표본공간 B안에서 정의되는 사상 A에 대한 확률은 B에 속한 A내에 있는 개체들의 수와 B에 속한 개체들의 수의 비율을 나타낸다.

위의 정의를 두 부분으로 다음과 같이 나누고 위에서 제시한 두 문제를 다시 제시한다.

①$P(B)>0$일 때 사건 B가 발생했다는 조건하에 사건 A가 일어날 조건부확률은

②$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이다.

(문제1) 한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$은?

(문제2) 빨간 공이 2개, 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출 한다. 갑이 파란 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$은?

(문제1)의 경우 정의①, ②가 모두 적용된다고 볼 수 있다. 그러나 만약 정의①의 '발생했다는'의 의미를 시간상으로 먼저 일어난 것으로 본다면 정확하게 적용된다고는 볼 수 없다. 정의①에서 '발생했다는 조건하에'를 '~에 대한'으로 바꾸어서 다음과 같이 적용하는 것이 오히려 더 매끄럽다.

$P(B)>0$일 때 사건 B에 대한 사건 A가 일어날 조건부확률은 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이다.

어느 경우이든 (문제1)은 조건부확률의 수학적 정의가 완벽하게 적용된다고 볼 수 있다. 이와 같은 경우를 본 논문에서는 '상대적 조건부확률[2)]'로 정의한다. (문제2)의 경우 앞 절의 문제제기에서 언급한대로 정의①, ②중 거의 정의①에 의존할 뿐, 정의②를 적용하는 데 무리가 있어 보인다. 이와 같은 경우를 본 논문에서는 '조건문 조건부확률'로 정의한다. 여기에서 오해하지 말아야 할 것은 둘의 구분은 조건부확률의 표면적 해석에 따른 것이며 본 논문에서는 이 둘에 대한 동일한 수학적 본질을 분석하여 하나의 통합된 구조를 제시하고자 한다.

Watson은 두 유형의 사건에 대한 수학적 관계가 하나로 표현되고 있는 것에 대한 애매함을 드러내었다. Watson(2005)은 중학생의 확률 추론에 관한 연구에 사용된 조건부확률의 예가 두 유형의 사건에 대한 수학적 관계를 반영하고 있다고 하였으며 그것은 마치 두 상황이 하나로

2) Neyman(1950)은 그의 저서 'First course in probability and statistics'에서 '조건부확률'의 용어 대신 '상대적 확률(relative probability)'이라는 용어를 사용하였다. 이것은 맨 처음 Hausdorff의 1901년의 기록에 의한 것이다(Shafer, 1982). (문제1)과 같은 유형의 문제들에는 '조건부확률'보다 '상대적 확률'이라는 용어가 더 어울렸을 것도 같다. 정의 또한 다음과 같이 적용하여도 별로 불편해보이지 않는다. $P(B)>0$일 때 사건 B에 대한 사건 A가 일어날 **상대적 확률**은 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이다.

표현되고 있다고 하였다. 바로 '시간에 관계된 추출 상황(time-related sampling situations)'와 '조건에 대한 사회적 상황 서술(social situ- ations descriptions of conditions)'이 그것이다.

그는 아마 두 번째 추출의 결과가 첫 번째 추출에 의해 영향을 받는가를 시간적인 관계를 통해 파악하는 비복원추출의 문제를 '시간에 관계된 추출 상황'으로 보고 있으며, '여자일 사건(W)과 학교 선생님(T)일 사건'에서 '여자가 학교 선생님일 확률(T|W)'와 '학교 선생님이 여자일 확률(W|T)'와 같은 조건부확률을 '조건에 대한 사회적 상황 서술'로 구분한 듯하다.

그러나 필자는 Watson 이 말한 '두 상황이 하나로 표현되고 있다'는 부분을 문제의 묘사로 구분 짓는 것보다 풀이방법의 접근으로 구분하고자 한다. 왜냐하면 '조건에 대한 사회적 상황 서술'이라는 말은 매우 한정적인 의미를 지닐 수 있는 한계가 있다. 왜냐하면 '한 개의 주사위를 던져 나오는 사건'에서와 같이 문제의 대상이 '여자, 선생님'과 같이 사회적 상황 묘사만으로 구성되는 것은 아니기 때문이다.

가. 상대적 조건부확률

'조건부확률'을 잘 나타낼 수 있는 방법으로 분류표를 사용할 것을 권장하는 학자들이 있다. Rossman와 Short(1995)는 조건부 확률의 직관적인 이해를 위해 실제적인 예를 다루어야 하며, 조건부확률의 구조를 표현하기 위해서 분류표를 사용해야 한다고 하였다(이정연, 2005:2).

분류표를 사용한 조건부확률의 예는 다음과 같다.

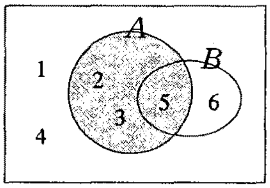
	관악기	현악기	합계
남	10	15	25
여	5	10	15
합계	15	25	40

어느 음악동아리 학생에 대하여 연주가 가능한 악기를 조사한 것이다. 이 중 대표 한명을 남학생 중에서 뽑을 때, 그 학생이 관악기를 연주하는 학생일 확률은?

'조건부확률'을 잘 나타낼 수 있는 또 다른 방법으로 벤다이어그램이 있다. B에 속한 A 내에 있는 개체들의 수는 벤다이어그램의 B에 대한 $A \cap B$의 비로 시각화 된다. Parzysz(1990)와 Tomlinson와 Quinn(1997)는 벤다이어그램이 복잡한 공식을 기억하지 않고도 조건부확률 문제를 해결하는 도구로 유용하다는 것을 보여주었다(이정연, 2005:2).

벤다이어그램을 이용할 수 있는 조건부확률의 예는 다음과 같다.

한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나왔을 때, 그것이 5이상일 확률을 구하여라.



위에서 제시된 '분류표'나 '벤다이어그램'은 모든 조건부확률을 잘 나타낼 수 있는 유용한 도구인 것으로 제안하였으나 그렇지 않다. 이들이 잘 적용되어 실제적으로 유용하게 사용될 수 있는 문제는 '상대적 조건부확률'에 국한되며 '조건문 조건부확률'에서는 다소 어려움이 있음을 앞 절의 문제제기를 통해 밝혔다.

나. 조건문 조건부확률

조건부확률의 학습 지도 방법에 관한 연구 결과 중 Watson(1995)은 조건부확률 개념을 도입하는 자연스러운 방법으로 조건문을 조건부확률로 표현하는 방법을 제안하였다. 조건문을 조건부확률로 표현하는 것은 조건에 의한 변화로 조건부확률을 보는 경우를 말한다. 그러나 '조건문

조건부확률'은 앞에서 살펴본 '상대적 조건부확률'과는 다른 해석으로 접근한다. '상대적 조건부확률'에서는 'B에 속한 A개체들의 상대적 비'를 통해 계산하지만 '조건문 조건부확률'에서는 '조건B에 의해 변화된 새로운 표본공간에서 A의 확률'을 생각해야 한다. '조건문 조건부 확률'의 대표적인 예로는 비복원추출이 있는데, 이는 첫 번째 추출에 의해 변경된 새로운 표본공간에서 발생할 두 번째 추출의 확률을 다루는 것으로 '상대적 조건부확률'을 다루는 데 용이한 분류표나 벤다이어그램으로는 이러한 '조건문 조건부확률'을 나타내기가 쉽지 않다. '조건문 조건부확률'에서는 오히려 상황의 변화(복원이나 비복원)를 인식하여 수학적 추론을 통한 사고를 요구한다. 예를 들어 비복원추출의 경우, 전 단계 시행 결과에 의한 변화를 가상적으로 설계한 후 변화된 것과 그렇지 않은 것을 판단하여 다음 단계의 확률을 추측하는 수학적 사고를 요구하며, 여기에서는 시간적, 인과적 개념을 통해 확률을 추론하여야 하는 경우도 발생한다.

3. 축소된 표본공간의 두 가지 의미[3)]

두 가지로 구분한 조건부확률의 구분을 더욱 명백히 드러내는 것이 '축소된 표본공간(reduced sample space)'의 의미이다. 여기에서도 서로 다른 해석이 적용된다.

조건부확률에서 '축소된 표본공간'의 수학적 의미는 다음과 같다.

Mosteller et al.(1973)에 의한 '축소된 표본공간(reduced sample space)'의 정의는 조건부확률의 정의($P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, 단 $P(B)\neq 0$)에서 주어진 사건 B이다. 그는 모든 사건이 어떤 표본공간에서 정의되므로 확률 $P(A)$ 또한 전체 표본공간을 S라고 했을 때, $P(A|S)$의 축약된 표현이라고 하였다. 이러한 '축소된 표본공간'의 수학적 의미는 '상대적 조건부확률'에서 주로 사용된다. 즉, '상대적 조건부확률'에서의 '표본공간의 축소'는 전체 표본공간의 부분집합을 의미한다.

이와는 다르게 '조건의 변화에 의한 조건부확률'에서의 '축소된 표본공간'은 '주어진 사건B'가 아니라 '사건B로 인해 변화된 공간'을 의미하며 사용하는 경우가 많다. Tarr와 Lanin(2005)이 제시한 아래의 문제를 보자.

> 빨간색, 초록색, 노란색의 풍선껌 3개가 들어있는 주머니에서 비복원추출 할 때, 처음 빨간색 껌을 꺼냈다면 초록색 껌을 꺼낼 확률은?

Tarr와 Lanin은 위의 문제를 통해 비복원추출에서 조건부확률의 표본공간에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

> "두 번째 추출 바로 이전의 표본공간(초록색, 노란색)은 처음 표본공간(빨간색, 초록색, 노란색)의 부분집합이다. 이러한 비복원추출에서 조건부확률은 표본공간의 축소가 눈으로 보이기 때문에 명백하다(Tarr, Lanin, 2005)."

그들이 말한 표본공간의 축소는 {빨간껌, 초록껌, 노란껌}에서 처음 빨간껌을 꺼냈으므로 {초록껌, 노란껌}으로의 축소를 의미한다. 그러나 Tarr와 Lanin이 말한 '표본공간의 축소'는 조건부확률의 수학적 정의에서 설명한 표본공간의 축소와는 다르다. 표본공간의 축소를 Tarr와 Lanin의 규칙대로 생각한다면 첫 번째 추출 후 공을 빼지 않고 같은 색 공을 하나 더 집어넣는 아래의 Polya urn scheme[4)]의 문제에서 표본공간

---

3) 조차미, 박종률(2008)에서 이미 소개한 축소된 표본공간의 의미를 조건부확률의 연구를 위해 좀 더 자세히 진술하였다.

4) Dwass. M (1970) *Probability, Theory and applications* 에 소개된 문제로 실제로는 Polya urn process라는 일반

의 축소는 어떻게 바라보아야 할지 생각해보자.

> 항아리에 두 개의 흰 공과 한 개의 검은 공이 있다. 첫 번째 공을 선택한 후 같은 색깔의 공을 하나 더 집어넣는다. 다시 두 번째 선택한 공과 같은 색의 공을 하나 더 집어넣는다. 항아리에 1개의 검은 공과 2개의 흰 공이 있으므로
>
> $$P(B_1)=\frac{1}{3},\quad P(W_1)=\frac{2}{3}$$
>
> 첫 번째 시행에서 흰 공이 나왔다면 흰 공 하나를 더 집어넣어 이제는 항아리에 1개의 검은 공과 3개의 흰 공이 있게 된다.

그러므로 $P(W_2|W_1)=\frac{3}{4}$, $P(B_2|W_1)=\frac{1}{4}$이다.

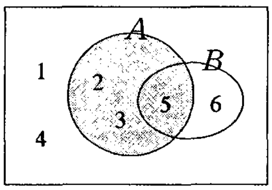
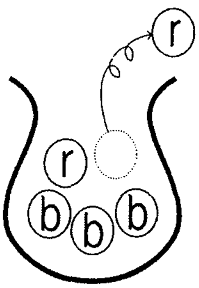
위 문제에서 고려해 볼 때, 다음과 같은 의문이 제기될 수 있다.

> 위의 문제에서 수학적 정의 $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$는 어떤 의미인가?

이 문제에서 Tarr와 Lanin이 말한 표본공간의 축소는 어떤 것인가?

'상대적 조건부확률'을 상대적 비로 구하는 반면 '조건문 조건부확률'은 '조건사건에 의해

<표 Ⅱ-1> 축소된 표본공간의 이중적 관점

	상대적 조건부확률	조건문 조건부확률
문제	한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$은?	빨간 공이 2개 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출 한다. 갑이 빨간 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$은?
해결 방법	조건부확률의 수학적 정의로 판단 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$	조건문에 의한 변화된 상황에서 판단
축소된 표본 공간의 의미	 전체표본공간에서 사건 A로 축소 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ⇨$\{2, 3, 5\}$	 빨간 공이 하나 빠진 상황으로 축소 $\{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\}$ ⇨만일 r_2가 선택되었다면 $\{r_1, b_1, b_2, b_3\}$

표본공간		'polya urn schema'에서 축소된 표본공간(?)
$\{w_1, w_2, b_1\}$	⇨	만일 w_2가 선택되었다면 또 다른 흰 공 w_3가 표본공간에 첨가되어 $\{w_1, w_2, w_3, b_1\}$

화된 상황에서의 조건부확률에 대한 논의이다. 항아리에 a개의 흰 공과 b개의 검은 공이 들어있을 때 한 개의 공을 추출 후 같은 색을 집어넣는 실험이다.

변화된 상태에서 목적사건의 확률'로 우리는 쉽게 해결해 왔다. 일치되는 수학적 본질은 과연 무엇인가? Watson의 의문처럼 왜 두 가지 다른 상황을 하나로 표현했던 것인가? 아래의 표를 통해 비교해보자.

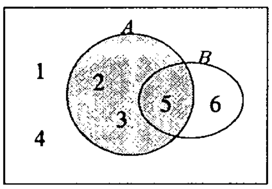
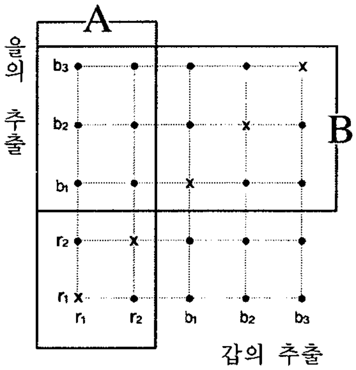
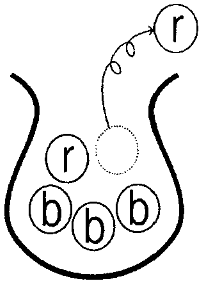
조건부확률에서의 표본공간의 축소에 대한 인식은 대부분 위와 같이 이루어진다. 그러나 만일 $\{r_1, r_2, b_1, b_2, b_3\}$의 부분집합으로서 $\{r_1, b_1, b_2, b_3\}$을 표본공간의 축소라고 했다면 추출 후 동일한 색의 공을 하나 더 집어넣었던 'polya urn schema'에서의 표본공간의 변화는 '축소'라고 할 수 있을까? 오히려 $\{w_1, w_2, b_1\}$에서 $\{w_1, w_2, w_3, b_1\}$로 확대된다고 봐야하지 않을까?

이러한 변화에 대해 '축소된(reduced)'이라는 언어 해석을 탓하여 '변화된(changed)' 또는 '새로운(new)' 표본공간으로 봐야한다고 생각할 수 있으나 이는 조건부확률의 초기 조건인 "표본공간의 부분집합"이어야 함에 어긋난다.

'상대적 조건부확률'의 변화된 표본 공간을 나타내는 벤다이어그램과 '조건문 조건부확률'의 변화된 표본 공간인 빨간 공 하나가 제거된 그림은 같지 않다. 과연 이러한 과정에서 우리는 어떤 표본공간을 전체 표본 공간으로 볼 것이며 조건 사건에 의해 표본공간이 축소된다는 의미로서 형식화된 조건부확률의 기호의 사용이 올바른가에 대한 의문을 가질 수 있다.

조건사건의 발생으로 변화된 상태에서 목적사건의 확률을 구하는 '조건문 조건부확률

<표 Ⅲ-1> 상대적 조건부확률과 조건문 조건부확률의 동일한 수학적 구조

<table>
<tr><td>상대적 조건부확률</td><td colspan="2">조건문 조건부확률</td></tr>
<tr><td>한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 5이상의 눈이 나올 사건이 B일 때, 조건부 확률 $P(B|A)$은?</td><td colspan="2">빨간 공이 2개 파란 공이 3개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출 한다. 갑이 빨간 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B일 때, 조건부 확률 $P(B|A)$은?</td></tr>
<tr><td>조건부확률의 정의
$P(B|A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

</td><td>그림(a)

</td><td>그림(b)

</td></tr>
<tr><td colspan="2">상대적 조건부확률의 관점</td><td>조건문 조건부확률의 관점</td></tr>
<tr><td colspan="3">↳----- 구조의 일치 -----↵
↳------------ $P(B|A)$의 표면적 해석-----------------↵</td></tr>
</table>

$P(A|B)$'은 수학적 정의($P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$)로부터 벗어난 기호조작처럼 보인다.

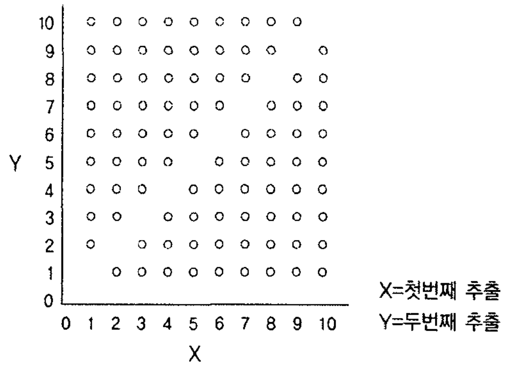
III. 조건부확률의 수학적 구조 및 오개념

1. 수학적 구조의 일치

앞에서 논한 '상대적 조건부확률'과 '조건문 조건부확률'은 조건부확률이라는 하나의 통합된 개념으로 사용될 수 있는 근거를 가진다. 이들은 수학적으로 같은 구조를 가지고 있다. Wolf (1962)는 종속 사건과 조건부확률의 개념을 설명하기 위해 아래의 그림과 같은 표본공간을 시각화 하였다.

1부터 10까지 적힌 10장의 카드에서 두 장의 카드를 비복원추출 할 때, 표본공간은 다음과 같은 순서쌍이다.

$S=\{(1,2),(1,3),(1,4),\ldots,(1,10),(2,1),(2,3),(2,4),\ldots,(10,8),(10,9)\}$



[그림 III-1] 비복원추출의 표본공간

이것은 '조건문 조건부확률'의 문제를 '상대적 조건부확률'의 문제와 동일하게 취급할 수 있는 방법을 제공한다.

Wolf의 비복원추출의 표본공간 표현을 참고하여 처음 제시한 조건문 조건부확률문제의 표본공간을 아래와 같이 구성할 수 있다.

Wolf가 제시한 표본공간은 동시발생사건의 표본공간을 적집합으로 본 Kolmogorov의 아이디어와 같다.

그림(b)에서는 수학적 정의$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$의 의미를 명확히 설명해 내기 어려우나 그림(a)로 사건을 전환했을 때는 그것이 가능하다.

그림(a)는 조건문 조건부확률이 상대적 조건부확률의 수학적 정의와 일치되는 구조임을 보여준다.

이로써 앞에서 구분한 '상대적 조건부확률'과 '조건문 조건부확률'은 조건부확률의 해결 방법의 차이에 대한 표면적 구분이며 둘 속에 내포된 수학적 본질은 위와 같이 동일한 것으로 결론내릴 수 있다. 이것은 '조건문 조건부확률'이 상대적 비로 정의된 조건부확률의 기호를 사용할 수 있는 근거를 마련한 것이다. 조건문조건부확률은 상대적 비를 고려하지 않고도 사건 후의 변화에 대한 인식만 가능하다면 쉽게 해결될 수 있는 조건부확률의 특별한 경우라는 것이다.

좀 더 정확히 말하자면, '상대적 조건부확률'을 조건부확률의 수학적 정의로 보는 현 교육과정에서 '조건문 조건부확률'은 조건부확률의 특별한 의미를 갖는 일부분으로 볼 수 있다. 그 특별한 의미란 것은 복잡한 수학적 정의가 필수적으로 요구되는 것이 아닌 조건사건에 대한 목적사건의 변화를 인식하는 능력을 통해 간단히 추론 가능한 부분이라는 것이다.

2. 시간 축 오류(fallacy of the time axis)

앞에서 논의된 '상대적 조건부확률', '조건문 조건부확률'의 문제에서 살짝 벗어난 또 다른 특별한 문제가 있다. 그것은 '조건문 조건부확

률'을 대표하는 비복원추출의 문제에서 시간의 순서를 바꾸어 생각해야하는 시간 축 오류를 발생시키는 문제이다.

Gras와 Totohasina의 시간적 오개념은 Falk(1979, 1989)의 연구 분석을 통해서도 확인 할 수 있다. 조건부확률의 이해에 관한 Falk(1988)의 연구는 예비교사들이 조건부확률에 대한 오개념(조건 사건의 정의, 조건 사건과 목적 사건의 시간적 순서, 조건과 우연성과의 혼동[5] 등)을 가지고 있는 것이 확실함을 보여 주었다. Falk는 88명의 대학생에게 다음과 같은 문제를 제시하여 학생들이 (a)문제는 쉽게 대답하는 반면 (b)문제는 그렇지 못하는 것을 알 수 있었다.

학생들의 전체적인 의견은 두 번째 공은 첫 번째를 꺼낼 때 어떤 영향도 줄 수 없기 때문에 (b)는 1/2이라 답하였다.

> 항아리에 두 개의 흰 공과 두 개의 빨간 공이 있다.
> 두 개의 공을 비복원추출 할 때
> (a) 첫 번째 공이 빨간 공일 때, 두 번째 공이 빨간 공일 확률은?
> (b) 두 번째 공이 빨간 공일 때, 첫 번째 공이 빨간 공일 확률은?

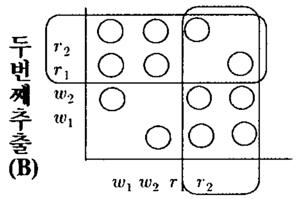
Falk는 학생들이 조건과 인과적 추론을 혼동하고 있으며 이를 '시간 축 오류'라 하였다. 즉, 뒤에 발생하는 사건은 조건 사건이 될 수 없다는 것이다. 실제 두 번째 공이 빨간 공이라면 첫 번째 공은 1개의 빨간 공과 2개의 흰 공들 중의 하나이므로 (b)는 1/3이다.

현 학교수학에서는 첫 번째 추출에 대한 두 번째 추출에서의 결과를 묻는 (a)는 바로 추측을 하도록 하나 (b)는 Bayes 정리를 사용하여 시간적인 순서를 통한 풀이로 재구성하도록 요구한다.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$$

이 풀이는 조건부확률의 문제가 시간적으로 후에 일어난 사건이 조건사건이 되었을 때 직접적인 추론이 불가능함으로 시간적으로 먼저 일어난 사건을 조건사건으로 뒤집어 주어야 계산이 가능한 것처럼 여겨진다. 이것이 많은 선행연구들이 지적한 시간 축 오류를 가져올 수 있다. 이 때 (a)는 '조건문 조건부확률'의 유형으로 볼 수 있으나 (b)는 비복원추출의 문제라 해도 (a)를 풀었던 방법으로는 적용하기 힘들다.

이 두 문제의 수학적 구조는 아래의 그림과 같다.



첫번째추출(A)

비복원추출에서 전체 표본공간에서의 사건은 추출의 순서에 상관없이 대칭이다. 즉 추출의 순서가 아무런 영향을 미치지 않는다.

3. 조건부확률에 관한 편향적인 연구들

조건부확률에 대한 대부분의 연구들은 두 가지 유형 중 어느 한 가지 유형의 문제만을 다루고 있다.

먼저 '학교 선생님이 여자일 확률'과 '여자가 학교 선생님'일 확률의 비교를 통한 조건부 확률에 관한 Tversky와 Kahneman(1983)의 연구는 '상대적 조건부확률'만을 다룬 예이다. 이와 다

5) 조건부확률 이해의 어려움은 Batanero & Sanchez(2005), Jones & Thornton(2005), Tarr & Lannin(2005)에 잘 나타나 있다.

르게 중학생의 조건부확률에 대한 이해를 다룬 Tarr와 Jones(1997)의 연구에서는 '조건문 조건부확률'만 다루었다. 그들은 조건부확률과 독립성의 이해에 관한 추론 능력을 판단하기 위해 주로 '복원, 비복원추출'을 사용하였다. 이에 관해 나귀수 외(2007:402)는 Jones et al.(1999)의 연구가 조건부 확률과 관련된 다양한 맥락 중에서도 주로 비복원 상황을 중심으로 하고 있기 때문에 영재 학생들의 문제해결방법을 분석하기에 적절하지 않다고 하였으며 더욱 다양한 조건부 확률을 통하여 영재 학생들의 조건부 확률문제 해결방법을 연구하였다. 그들은 비복원 상황을 통한 연구가 조건부확률의 다양한 맥락을 반영하지 못한다고 주장하였고, 다양한 문항을 첨가하였으며 이 때 첨가된 문항은 대부분 '상대적 조건부확률'의 문제이다.

조건부확률은 새로운 정보가 제공될 때 확률적 판단을 수정하는 원시적인 직관적 관념을 포함하는 기본적 개념이며, 종속성과 관련된 직관은 확률의 보다 깊은 이해를 위해 결정적으로 필요한 것(Borovcnik & Bentz, 1991, p. 452)이라는 견해에서도 '조건문 조건부확률'에서 발생하는 원시적인 직관에 대해서만 논하고 있다.

이러한 편향에 대해 Watson(2005)은 학생들의

<표 Ⅲ-2> 조건부확률의 세 가지 오개념(Gras & Totohasina, 1995)

시간적 개념 (chronological conception)	조건부확률 $P(A\|B)$을 시간적 관계로 해석 즉, 조건 사건 B는 항상 사건 A보다 앞서 발생해야 한다고 인식
인과적 개념 (causal conception)	조건부확률 $P(A\|B)$을 인과적 관계로 해석 즉, 조건 사건 B가 원인이고 사건 A가 결과라고 인식
수적 개념 (cardinal conception)	조건부확률 $P(A\|B)$을 $\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$로 해석

<표 Ⅲ-3> 조건부확률 문제와 오개념 발생

문제 유형	조건문 조건부확률		상대적 조건부확률	
	복원추출이나 두 주사위 문제	비복원추출이나 Polya urn[6]	기관지염/흡연 여자/선생님	한 주사위 문제
Watson의 분류	시간에 관계된 추출 상황 (time-related sampling situations)		조건에 대한 사회적 상황 서술 (social situations descriptions of conditions)	
Gras와 Totohasina의 오개념	시간적 개념 생성		시간적 개념 적용이 불가능함	
	인과적 개념 생성		인과적 개념의 적용으로 인한 오류 발생	
	적공간을 표본공간으로 구성할 시 수적 개념 적용가능하나 복잡함		수적 개념 생성	

6) 비복원추출문제는 시행이 이루어짐에 따라 추출대상이 하나씩 감소하는 문제이며, 이와 반대로 Polya urn 문제는 같은 색의 공이 하나씩 첨가되는 문제이다.

조건부확률의 이해를 평가하기 위해 사회적 문항(social contexts)이 사용되고 있음에도 불구하고 명백하게 조건부확률이 나타나는 비복원추출에 관한 문항(context of without-replacement situations)들만 연구되고 있다고 하였다. 이에 학생들의 조건부확률에 대한 이해는 다른 사건의 발생에 의해 변할 때, 다시 말하면 새로운 정보가 확률판단을 바꿀 때, 사건의 확률을 인식하고 적용하는 능력에 의해 증명되는 것으로 일반적으로 인식되고 있다(Borovcnik & Bentz, 1991, p. 90). 이는 '조건문 조건부확률'에 대한 이해만이 조건부확률의 이해를 평가하는 것으로 주로 사용되고 있는 것을 비판한 것이다.

4. 조건부확률의 오개념

위에서 논한 조건부확률의 두 가지 유형이 서로 다른 해석은 조건부확률의 오개념을 발생시킬 수 있다. 오개념에 대해 조사하기 위해 Gras와 Totohasina(1995)는 17-18세의 고등학교 학생 70명과 18-19세의 102명의 대학생을 대상으로 다음과 같은 직접적인 질문을 던졌다. 평가는 학생들의 조건부확률의 수업이후에 실시되었으며 수용도와 분류표와 벤다이어그램이 문제해결을 돕는 지도 방법으로 사용되었다(Batanero & Sanchez, 2005).

문제A. 조건부확률 $P(A|B)$ 을 계산하기 위해서 사건 B는 사건 A가 일어나기 전에 시간적으로 먼저 발생해야 하는가? (그렇다. 그렇지 않다. 잘 모르겠다.)

문제B. 조건부확률 $P(A|B)$ 을 계산하기 위해서 사건 B가 원인이고 사건 A는 B의 영향의 받는 결과라고 가정해야 하는가? (그렇다. 그렇지 않다. 잘 모르겠다.)

연구 결과 63%의 학생들은 문제 A에 '그렇다'라는 긍정적인 답을 하였으며 문제B에 대해서는 28%가 학생들이 긍정적인 답을 하였다. 이러한 연구 결과에 의해 Batanero와 Sanchez(2005)는 시간적 개념과 인과적 개념의 기원은 인식에 의한 것이며 반면에 수적인 개념은 지도에 의해 유도된다고 주장하였다. 그는 이러한 모든 오개념은 인식론적 장애로 변할 수 있으며 조건부확률의 가역적인 특성을 감추게 된다고 하였다.

<표 Ⅲ-4> '조건부확률' 단원에 제시된 각 유형 문항의 수

교과서	상대적 조건부확률	조건문 조건부확률
최봉기 외	4	0
조태근 외	5	1
최용준 외	3	1

<표 Ⅲ-5> '곱셈정리' 단원에 제시된 각 유형 문항의 수

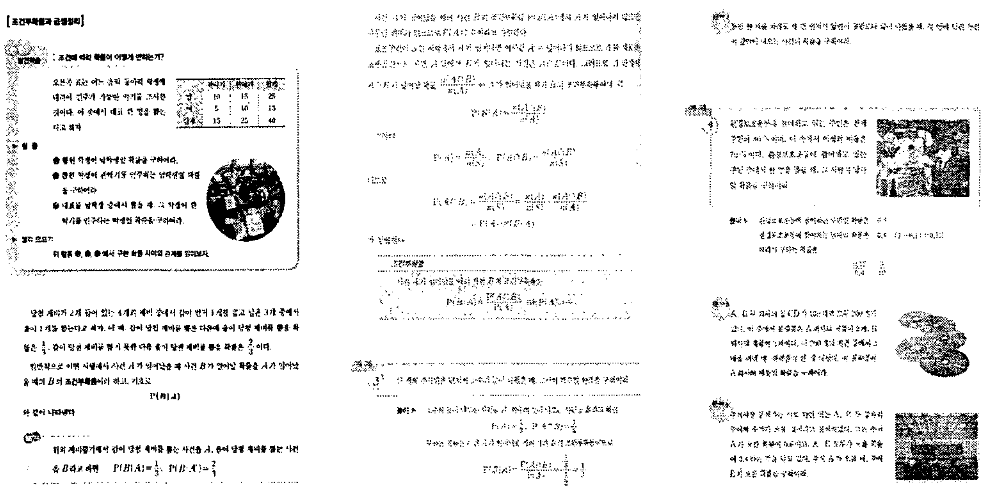
교과서	상대적 조건부확률	조건문 조건부확률
최봉기 외	0	4
조태근 외	0	2
최용준 외	0	2

Carnell(1997)또한 13명의 예비 중등교사들이 조건부확률에 대해 얼마만큼 이해하고 있는지를 연구하였다. 대체로 Carnell은 교사들이 조건 사건으로 추정된 사건을 사용하고, 생활에서 시간상 목적 사건 뒤에 발생하는 조건 사건은 무시하며, 독립성을 부적절하게 사용하고, 확률의 계산 절차를 부적절하게 적용하는 일이 자주 발생한다는 것을 주목하여 교사들의 오개념 특성을 파악하였다.

Gras와 Totohasina(1995)은 75명의 17-18세의 학생들을 대상으로 설문 조사하여 조건부확률에서 세 가지 오개념을 확인하였다.

수적 개념은 유한인 동확률 표본공간(finite equiprobable sample spaces)의 경우에는 옳다. 그러나 연속적인 표본공간이나 단순 사건의 확률이 동등하지 않을 때, 이 개념은 실수를 유발한다. 시간적, 인과적 오개념은 인식(cognitive)에 근원을 두고 수적 개념은 지도(teaching)에 의해 유도된다고 하였다(Batanero & Sanchez, 2005). 이러한 오개념은 사건의 상황에 따라 다르게 적용되는 조건부확률의 특성상 피할 수 없는 것이다. 이 세 가지 개념은 실상 어떤 문제에서는 유용하한다. Watson(2005)의 두 유형의 사건에 대한 수다가 다른 문제에서는 오개념으로 작용하기도 학적 관계인 조건부확률의 이중적 관점에 따른 Gras와 Totohasina의 개념의 생성과 오류를 다음과 같이 구분하였다.

복원, 비복원추출문제에서는 시간의 변화에 따른 추론이 큰 역할을 하는 반면에 기관지염/흡연이나 한 주사위에서 발생하는 문제의 경우



[그림 Ⅳ-1] 조건부확률 단원 교과서 분석(조태근 외, 2002)

(발견학습)

	관악기	현악기	합계
남	10	15	20
여	5	10	15
합계	15	25	40

대표 한명을 뽑을 때,

① 남학생일 확률

② 관악기를 연주하는 남학생일 확률

③ 남학생 중 관악기를 연주하는 학생일 확률

이러한 접근은 가능하지 않으며 수적 개념으로서의 접근만이 가능할 뿐이다. 또한 시간의 변화로 인한 인과적 관계를 갖게 되는 즉, 앞서 발생한 사건이 뒤에 발생한 사건에 영향을 미치는가에 관한 사고가 기관지염/흡연과 같은 문제에서 사건의 성격끼리의 인과성에 관한 적용으로 전이될 소지가 있다.

IV. 교과서 분석 및 교사 설문

1. 교과서 분석

교과서는 3종의 수I 교과서를 분석하였다. 조건부확률의 문제는 '조건부확률'단원과 '곱셈정리' 두 단원에서 제시된다.

조건부확률 단원에서 제시된 각 유형에 대한 문항의 수는 아래와 같다. 대부분 조건부 확률의 수학적 정의를 드러내는 '상대적 조건부확률'의 문제가 대부분이었으며 보편적으로 학생들이 쉽게 접근할 수 있는 조건문 조건부확률의 문항은 아예 소개되지 않거나 드물게 제시되었다.

이와 반대로 '곱셈정리 단원'에서는 대부분의 문제들이 '조건문 조건부확률'을 이용하는 비복원 추출이다.

아래는 한 교과서의 실제 내용을 통해 조건부확률의 예가 어떻게 사용되는지 알아볼 수 있다.

위의 교과서에 제시된 조건부확률의 정의와 문제 지도서의 구성은 다음과 같은 순서로 전개된다.

(개념) 당첨 제비가 2개 들어 있는 4개의 제비 중에서 갑이 먼저 1개를 뽑고 남은 3개 중에서 을이 1개를 뽑는다고 하자. 이 때, 갑이 당첨 제비를 뽑은 다음에 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은 1/3, 갑이 당첨 제비를 뽑지 못한 다음 을이 당첨 제비를 뽑을 확률은 2/3이다.

일반적으로 어떤 시행에서 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률을 A가 일어났을 때의 B의 조건부확률이라 하고, 기호로 $P(B|A)$와 같이 나타낸다.

위의 당첨 제비를 뽑는 사건을 A, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라고 하면 $P(B|A)=\frac{1}{3}, P(B|A^c)=\frac{2}{3}$ 이다.

(정의) 표본공간이 S인 시행에서 A가 일어나면 여사건 A^c는 일어나지 않으므로 A를 새로운 표본공간으로 보면 A안에서 B가 일어나는 사건은 $A\cap B$이다. 그러므로 A안에서 $A\cap B$가 일어날 확률 $\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$ 는 A가 일어났을 때의 B의 조건부확률이다.

즉 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ 가 성립한다.

사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (단, $P(A)>0$)

(문제) 1) 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나왔을 때, 그것이 짝수일 확률을 구하여라.

2) 동전 한 개를 차례로 세 번 던져서 앞면이 뒷면보다 많이 나왔을 때, 첫 번째 던진 동전이 앞면이 나오는 사건의 확률을 구하여라.

(발견학습)에서는 이원분류표를 이용하여 '상대적 조건부확률'을 탐색하도록 하였고, (개념)에서는 다시 '조건문 조건부확률'의 문제를, (정의)에서는 또 다시 '상대적 조건부확률'의 수학적 정의를 소개한 후 (문제)에서는 '상대적 조건부확률'의 적용이 가능한 문제를 다루고 있다. 교과서를 분석한 결과 조건부확률 단원에서 다루는 대부분의 문제는 '상대적 조건부확률'이었다. 이정연(2005:114)은 교과서에서 다루는 조건부확률의 문제가 대부분 조건사건이 일어난 후

에 목적사건이 일어나는 상황이므로 조건부확률에서 조건사건과 목적사건의 관계를 순차적이고 인과적인 관계로 이해하고 있음을 알 수 있다고 하였다. 실제 교과서를 분석한 결과 조건사건과 목적사건의 관계가 순차적이고 인과적인 경향이 있는 '조건문 조건부확률'의 경우 곱셈정리 단원에서 주로 다루고 있으며 조건부확률 단원에서는 '상대적 조건부확률'문제를 주로 다루고 있었다.

2. 학생들의 오개념

광주 지역에 있는 인문계 고등학교 3학년 학생들을 모집단으로 하여 평균적 학업 수준을 가진 C 고등학교 3학년 학생들을 대상으로 조건부확률의 오개념을 조사하기 위해 설문조사를 실시하였다. C고등학교 자연계열 남학생 2학급(56명)과 인문계열 여학생 2학급(59명)의 반으로 구성하여 조사하였다.

조건부 확률에 대한 인과적 오개념을 묻는 문항으로 Gras와 Totohasina의 첫 번째 문제인 "조건부 확률 $P(A|B)$ 을 계산하기 위해서 사건 B는 사건 A가 일어나기 전에 시간적으로 먼저 발생해야 하는가?"에 대한 설문 결과는 조건사건이 목적사건보다 '시간적으로 먼저 발생해야 한다'고 응답한 학생이 41%, '그렇지 않다'고 응답한 학생이 22%, '잘 모르겠다'고 응답한 학생이 30%로 나타났다. Gras와 Totohasina의 실험결과와 마찬가지로 조건부확률에 대한 시간적 오개념이 있음이 드러났다. Gras 와 Totohasina의 두 번째 문제인 "조건부 확률 $P(A|B)$ 을 계산하기 위해서 사건 B가 원인이고 사건 A는 B의 영향의 받는 결과라고 가정해야 하는가?"에 대한 결과 또한 '조건사건이 원인이고 목적사건이 결과여야 한다'고 응답한 학생이 49%, '그렇지 않다'고 응답한 학생이 36%, '잘 모르겠다'고 응답한 학생이 23%로 나타났다.

두 문항에 대한 응답은 교과서에서 조건부확률의 수학적 정의에 입각한 '상대적 조건부확률'보다 시간적, 인과적 관계가 강조되는 '조건문 조건부확률'에 더 영향을 받는 것임을 알 수 있다.

3. 교사 설문

광주 시내에 근무하는 현직 중 · 고등학교 교사 23명을 대상으로 조건부확률의 이중적 관점에 대해 교사들이 얼마만큼 인식할 수 있는지를 알아보기 위해 설문을 하였다. 조건부확률의 이중적 관점에 대한 질문을 위한 문항은 다음과 같다.

(문1) 한 개의 주사위를 던져 소수의 눈이 나올 사건이 A, 짝수의 눈이 나올 사건이 B일 때, 조건부확률 $P(B|A)$을 설명하시는 방법을 적어주세요.

(문2) 빨간 공이 3개 파란 공이 4개가 들어있는 주머니에서 갑과 을이 순서대로 비복원추출한다. 갑이 빨간 공을 꺼낼 사건이 A, 을이 파란 공을 꺼낼 사건이 B이다. 조건부확률 $P(B|A)$을 설명하시는 방법을 적어주세요.

(문3) 두 방법에서 사건을 표현하고 있는 집합기호가 일관성을 유지하고 있다고 생각하십니까? 답에 대한 이유를 적어주십시오.

(문1)과 (문2)에 대한 응답은 거의 모든 응답자가 비슷하였다. 그러나 (문3)에 대한 응답은 매우 다양하게 나타났다. 설문 응답자 23명 중단 4명만이 기호의 일관성에 의심을 하였고 7명은 두 기호가 일관성이 있다고 응답하였으며 나머지 12명은 응답하지 않았다. 그 이유는 문항자체가 어려웠다고 하거나 애매하다는 반응이었다. 아래는 (문3)에 대한 응답 중 일관성에 의심

을 가진 답변의 예이다.

[(문3)에 대한 응답]

교사1

1번의 집합은 A={1,3,5} B={2,4,6}으로 분명하게 표현가능하지만, 2번의 집합은 다소 표현하기 힘들다.

교사2

일관적이지 못하다.

순서 A·B 인지 경우 A·B 인지 일관적X

교사1은 집합으로 사건을 분명하게 표현하는 것이 어렵다고 호소하였으며 교사2는 둘을 '순서'와 '경우'로 구분하고 있다. 이는 '시간에 관계된 추출 상황'과 '조건에 대한 사회적 상황 서술'로 구분한 Watson(2005)의 견해와 비슷하다. 설문 응답자 23명 중 4명을 제외한 19명의 교사들은 문제의 의도를 파악하지 못하였거나 두 경우의 일관성에 확신을 가지고 있다는 결과는 '조건문 조건부확률'의 문제를 교사들조차 비형식적인 방법으로만 접근하고 있다는 것을 말해준다.

V. 결론

기존의 많은 연구(Shaughnessy, 1992; Tversky & Kahneman, 1983)들이 조건부확률과 관련된 오개념에 대해 연구하였으나 이러한 오개념이 생기는 원인을 심층적으로 분석할 수 있는 조건부확률의 수학적 구조에 대한 깊이 있는 논의는 회피해 왔다. Watson(2005)은 두 유형의 사건-'시간에 관계된 추출 상황'과 '조건에 대한 사회적 상황 서술'-에 대한 수학적 관계가 하나로 표현되고 있는 것에 대한 애매함을 드러내었고, 이를 바탕으로 본 논문에서는 조건부확률의 문제 유형을 두 가지-'상대적 조건부확률', '조건문 조건부확률'-로 나누어 수학적 구조를 분석하였다. 그 결과 '조건문 조건부확률'의 대표적인 예인 비복원추출 문제는 적공간을 전체 표본공간으로 할 때 '상대적 조건부확률'의 수학적 정의를 만족하였으며, 표면적으로는 두 가지 유형을 구분할 수 있으나, 본질적으로는 '조건문 조건부확률'이 구조적으로 '상대적 조건부확률'의 틀을 따르는 조건부확률의 일부임을 알 수 있었다.

이러한 관점에서 3종의 교과서를 분석한 결과, '조건부확률' 단원에서는 대부분 '상대적 조건부확률'의 문제를 다루었으며, '곱셈정리' 단원에서는 '조건문 조건부확률'의 문제를 다루고 있었다.

조건부확률의 수업은 대부분 과거에 우리가 배워온 것처럼, 가르쳐 온 것처럼, 교과서가 유도하고 있는 것처럼 학생들이 개념을 정확히 적용하는 것보다 다양한 문제에 적응하기를 기대하는 경향이 있다. 이러한 과정에서 학생들은 왜 조건부확률의 정의에 따른 상대적 비로 계산하다 비복원추출과 같이 변화된 상황에 대한 인식을 통해 확률을 구해야 하는지 혼란이 올 수 있으며 그로 인해 조건부확률이 어려운 개념이라 생각할 수 있다. 특히 곱셈정리 단원에서 주로 다루어지는 비복원추출과 같은 간단한 '조건문 조건부확률'의 사용이 강조됨에 따라 변화된 상황에 따라 조건부확률의 값을 결정하는 시간적, 인과적 오개념을 형성할 수 있으므로 통합적인 수학적 구조에 대한 이해가 절실히 필요하다.

현 학교 수학에서 학생들의 수준을 고려하여 지도되어야 한다는 교수학적 원칙에 입각하여 이러한 두 유형의 문제를 암묵적으로 구분하지 않은 채 지도되고 있으나 이것은 조건부확률의 객관적인 수학적 의미를 비형식적인 의미로 간주하도록 할 소지가 있다. 이러한 과정에서 학생들은 '조건문 조건부확률'의 특별한 성질인 인과

적, 시간적 개념을 조건부확률의 전체적인 개념으로 받아들일 수 있다.

적어도 교사들의 입장에서는 접근방법에서 확연한 차이가 있는 조건부확률의 두 가지 유형의 분별이 요구된다. 이에 조건부확률의 개념 지도에 있어 정의에 부합하는 '상대적 조건부확률'을 우선적으로 다루다가 '조건문 조건부확률'이 조건부확률의 정의를 만족하는 부분적인 형태로 소개하고, '조건문 조건부확률'에서 발생하는 인과적, 시간적 개념이 조건부확률의 부분적인 특성이라는 것을 드러내는 것이 바람직하다.

본 연구의 과정에서 정리된 '조건부확률의 두 가지 문제 유형이 동일한 수학적 구조를 지니고 있다는 것'은 새로운 것이 아니라 어찌 보면 당연한 내용이다. 그러나 우리가 눈치 채지 못했던 이유는 조건부확률의 정의보다 다양한 문제풀이를 통해 풀이 방법에 적응하기를 기대해 온 과거의 학습방법이 지속적으로 지탱되어 왔기 때문이며 이것을 교사가 인식하고 있지 못했을 때 다양한 문제에서 서로 다르게 적용하는 조건부확률의 문제를 학생들에게 가르치는 데 있어서 여러 가지 혼란은 당연히 발생될 수밖에 없다. 본 연구에서 밝힌 조건부확률의 수학적 본질에 대한 이해를 바탕으로 조건부확률에 관한 교수학적 방법에 관한 후속연구가 계속되어져서 학교 현장에서의 적절한 활용을 기대해 본다.

참고문헌

나귀수 · 이경화 · 한대희 · 송상헌(2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법. 대한수학교육학회, **학교수학, 9**(3), 397-408.

이정연(2005). **조건부확률 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위 논문.

조차미 · 박종률(2008). 확률 영역에서의 독립성, 그 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등. 한국수학교육학회, **시리즈 A <수학교육>, 47**(3), 373-386.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 홍진곤(2002). **고등학교 수학I**. (주)금성출판사.

최용준 · 신현성(2002). **고등학교 수학I**. (주)천재교육.

최봉대 · 강옥기 · 확석근 · 이재돈 · 김영욱 · 홍진철(2002). **고등학교 수학I**. (주)중앙교육진흥연구소.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). High school students' conceptions and misconceptions about probability. *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). USA: Springer.

Borovcnik, M., & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia and M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters : Probability in Education*, 135-167. London: Kluwer Academic Publisher.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability(preservice teachers)*. Unpublished doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Dwass, M. (1970). *Probability*, Theory and applications. W. A. Benjamin, NewYork.

Falk, R. (1979). Revision of probability and the time axis. In Proceeings of the third International Conference for the Psychology of *Mathematics Education*, 64-66. Warwick, UK:Organising Committee.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & F. Swift (eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, 292-297. Victoria, B.C.:University of Victoria.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. In R. Morris (eds.), *Studies in mathematics education: The teaching of statistics,.7,* 175-184. Paris:UNESCO.

Gras, R., & Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques á la notion de probabilité conditionnelle[Chronology and causality, onceptions sources of epistemological obstacles in the notion of conditional probability]. *Recherches en Didactique des Mathéma- tiques,* 15(1), 49-95.

Hogg, R. V., & Tanis, E. A. (1997). *Probability and statistical inference* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' Probabilistic Thinking in Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(5), 487-521.

Jones, G. A. & Thornton, C. (2005). An Overview of Research into the Teaching and Learning of Probability. In Graham A. Jones (Eds.), *Exploring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning,* 145-169. Springer Science+Business Media, Inc.

Mosteller, F., Rourke, R. E. K., & Thomas, G. B. (1973). *Probability with statistical applications*(2nd ed). Addison-wesley publishing company.

Neyman, J. (1950). *First course in probability and statistics.* New York : Henry Holt and company.

Parzysz, B. (1990). Un outil sous-estimé: l'arbre probabiliste. *APMEP,* 69 annee, 372, France, 47-54.

Rossman, A. J., & Short, T. H. (1995). Conditional probability and Education Reform : Are They Compatible? *Journal of Statistics Education* [Online], 3(2). (www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html)

Shafer, G. (1982). Bayes' Two Arguments for the Rule of Conditioning. *The Annals of statistics,* 10(4), 1075-1089.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. In Douglas A. Grows (eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, NY:Macmillan Publishing Company, 465-494.

Stohl, H. (2005). Probabilisty in teacher education and development. In Graham A. Jones (eds.), *Exploring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning,* 145-169. Springer Science+Business Media, Inc.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal,* 9, 39-59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning,* 215-238. USA: Springer.

Tomlinson, S., & Quinn, R. (1997). Understanding Conditional Probability. *Teaching Statistics,* 19(1), 2-7.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgement. *Psychological Review, 90,* 293-315.

Watson, J. M. (1995). Conditional probability : Its Place in the Mathematics Curriculum. *The Mathematics Teacher*, 88(1), 12-17.

Watson, J. M.(2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), 305-337

Watson, J. M. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. In Graham A. Jones (Eds.), *Exploring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning*, 145-169. Springer Science+Business Media, Inc.

Wolf, F. L. (1962). *Elements of Probability and statistics*. McGraw-Hill Book Company.

A Study on Conditional Probability

Cho, Cha Mi (Yongdu Middle School)

Conditional probability may look simple but it raises various misconceptions. Preceding studies are mostly about such misconceptions. However, instead of focusing on those misconceptions, this paper focused on what the mathematical essence of conditional probability which can be applied to various situations and how good teachers' understanding on that is. In view of this purpose, this paper classified conditional probability which have different ways of defining into two-relative conditional probability which can be get by relative ratio and if-conditional probability which can be get by the inference of the situation change of conditional event. Yet, this is just a superficial classification of resolving ways of conditional probability. The purpose of this paper is in finding the mathematical essence implied in those, and by doing that, tried to find out how well teachers understand about conditional probability which is one integrated concept.

* **Key Words** : 상대적 조건부확률(relative-conditional probability), 조건문 조건부확률(if-conditional probability)

논문접수: 2009. 10. 12
논문수정: 2010. 2. 10.
심사완료: 2010. 2. 17.