한국초등수학교육학회지 14(3) 745-768.
2010. 12. 31

Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(3) 745-768.
December 31. 2010.

초등 수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수·학습 자료 개발 절차와 방법에 관한 연구[1]

김양권[2] · 송상헌[3]

본 연구는 수준이 다른 여러 영재 집단의 소속 학생들이 도형수와 관련된 과제를 해결하고 창의적 산출물을 도출하는 가운데 그들의 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 발휘할 수 있도록 수준별 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하는 절차와 방법을 탐구해 보는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 교수·학습 자료 개발의 준거와 절차 모형에 따라 도형수 과제의 교수·학습 자료의 원형과 실제적인 자료를 개발하고 그것을 현장 수업에 적용하면서 학생들의 다양한 해결과정을 분석하면서 그 자료의 문제점과 개선점을 제시하였다. 그리고 초등학교에서 집단의 수준별로 산출물 탐구가 가능한 도형수의 내용 범위를 설정해 보면서 차후 유사한 다른 수학 영재 교수·학습 자료 개발할 때 고려한 네 가지의 시사점을 제안하였다.

[주제어] 수학 영재, 도형수, 수준별, 교수·학습 자료, 일반화

Ⅰ. 서 론

우리나라는 2002년 '제1차 영재교육진흥종합계획'에 이어 2007년 12월 '제2차 영재교육진흥종합계획'을 공포하여 향후 5년간 영재교육이 또 한 단계 도약할 수 있는 새로운 전기를 맞이하면서 중앙 정부보다는 각 지역교육청별로 그 지역에 맞는 특성화된 영재교육을 실시하고자 다각도로 노력을 기울이고 있다. 특히 경기도교육청은 2009년도에 영재교육기관이 425개, 학급 수는 926학급으로 전체 학생 수 대비 0.82%로 양적인 확대가 이루어졌다(경기도교육청, 2009:15-28). 영재교육을 실시하고 있는 주체는 영재학교, 대학부설 과학영재교육원, 교육청부설 영재교육원, 지역공동 영재학급, 단위학교 영재학급, 슈퍼영재 사사교육, 사이버 영재교육 등으로 다양하다. 양적인 확대와 다양한 영재교육기관임에도 불구하고, 영재 교수·학습 자료는 대부분 한국교육개발원에서 2002년부터 2007년까지 개발된 영재 교수·학습 자료를 활용하거나 이를 재구성하여 사용하고 있다(송상헌, 2008). 수준이 다른 기관에서 교수·학습 자료를 활용할 때는 해당 교육대상자들에게 적용할 학습 목표의 기준이나 관점, 수학영재 교수·학습 자료의 개발 방향, 내용 수준, 수학영재 교수·학습 자료의 유형, 학생들의 수학적 사고 수준 등을 고려하여야 한다. 특히 학생들의 사고 수준에 맞춘 수준별 교수·학습 자료를 개발하여 실제 현장에 적용해 보면서 수정해

---

1) 이 글은 김양권(2009)의 석사학위논문을 요약하여 발췌한 것임.
2) [제1저자] 경기 포곡초등학교
3) [교신저자] 경인교육대학교 수학교육과/아주대학교 영재교육전공

나갈 필요가 있다.

이에 본 연구는 도형수와 관련된 과제를 수준이 다른 여러 영재집단에서 사용하면서 창의적 산출물을 도출하고자 할 때 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 발휘할 수 있도록 하는 수준별 교수·학습 자료의 개발 과정을 탐구하고 이를 활용한 실제 수업 사례를 분석함으로써 차후 유사한 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 주는 시사점을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학영재와 수준별 영재 집단

송상헌(1998, 2006)은 수학영재성과 관련된 기존의 연구 결과들을 종합하여 "수학영재란 선천적으로 타고난 소질과 적성 및 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 하여 수학적인 문제를 해결하고자 하는 지적, 정의적인 행동특성이 수학적 사고 기능과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 특별한 수학적 과제를 창의적으로 수행해 낼 수 있는 잠재적 가능성을 가진 사람"이라고 하였다. 이는 우리나라 영재교육진흥법 2조 2항에 나와 있는 일반적인 영재에 대한 정의인 "영재라 함은 재능이 뛰어난 사람으로서 타고난 잠재력을 계발하기 위하여 특별한 교육을 필요로 하는 자"와 맥락을 같이하면서 수학분야에 구체화한 정의로 볼 수 있다. 이러한 방식은 영재를 정의하는 여러 가지 방법 가운데 일종의 '교육적' 정의라고 할 수 있지만 이 정의는 학자들이 말하고 있는 수학영재의 특성이 일부 구체적으로 드러나기는 하지만 영재들 간에도 존재하는 수준에 대한 타당한 기준까지 고려하지는 못한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 일종의 '실증적' 정의를 사용하기도 한다. 즉, "우리나라 영재교육진흥법과 그 시행령에 따라 설립된 각 기관에서 이미 선발되어 현재 영재교육을 받고 있는 사람"을 영재라 보고 각 기관의 수준을 현실적으로 인정하는 방법이다(송상헌, 2008).

따라서 본 연구에서는 '우리나라 영재교육진흥법과 그 시행령에 따라 설립된 각 기관에서 수학영재교육 대상자로 이미 선발되어 교육을 받고 있는 사람'을 수학영재로 보고 그들이 속한 각 기관(영재학교, 대학부설 과학영재교육원, 교육청부설 영재교육원, 지역공동 영재학급, 단위학교 영재학급 등)의 수준차를 인정하여 필요시에는 '수준별 영재 집단'이라 부르기로 한다.

2. 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 방향 및 준거

영재 교수·학습 자료는 각 분야별 영재들의 탁월하고 왕성한 지적 욕구를 충족시킬 수 있어야 하며, 그들의 잠재력을 최대한 계발하는데 적절한 것이어야 한다. 영재의 특성에 맞게 개발된 교수·학습 자료는 영재들의 창의적 지식 생산 능력을 길러줄 수 있으며 분석, 종합, 평가와 같은 고급 사고기능을 길러 줄 수 있다는 특징이 있다. 이러한 영재들의 특성을 반영하여 수학 영재 교수·학습 자료는 주제중심, 활동 중심, 개방적 교육 내용, 학습자 중심을 고려하여 구성되어야 한다. 이를 구현하기 위해 남승인(1998), 강숙희 외(2000), 김지영(2002), 이경화(2003), 송상헌(2004), 최종현(2004) 등은 수학 영재 교수·학습 자료 개발을 위한 구체적인 안내를 제안한 바 있다. 이에 본 연구에서는 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 준거를 목표, 내용, 방법, 자료의 측면과 기타로 분류하여 다음과 같이

설정하였다.

첫째[목표면], 교수·학습 자료는 주제별 학습 목표는 수학 영재 집단의 수준과 특징을 고려하여 그들의 지적 욕구뿐만 아니라 태도, 의지력 등의 정의적이고 의지적인 능력까지도 계발하고 자극할 수 있어야 한다.

둘째[내용면], 교수·학습 자료는 수학 영재들이 관심을 갖는 문제 상황을 통해 수학의 내용 영역(대수, 해석, 기하, 확률과 통계, 조합론 등)에 기초한 수업 소재 또는 연구 과제를 발굴하고 그 과제를 해결하는 과정에서 학생들이 탐구할 수학적 사고요소를 추출하는 것이 필요하다.

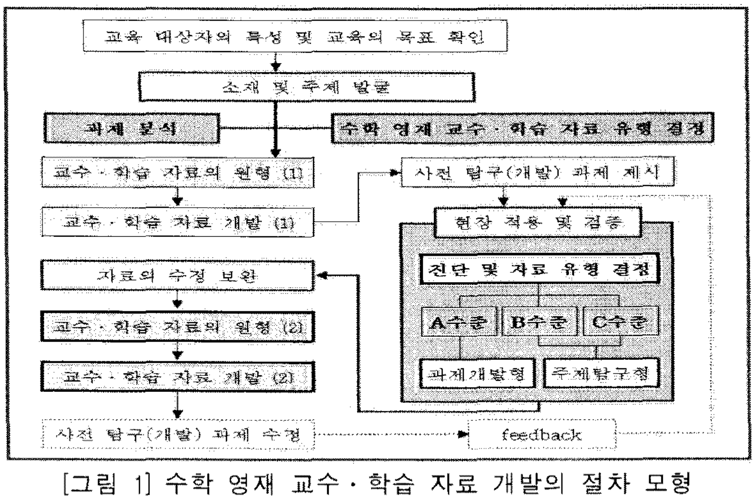
셋째[방법면], 교수·학습 자료는 수학 영재들이 주어진 연구 과제를 해결하고 창조적 산출물을 제작하면서 보다 고차원적인 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 개발·신장시키는데 초점을 맞추되 다양한 구체적인 조작활동이나 보다 추상적인 사고 활동 속에서 수학적으로 의미 있는 추측과 그것의 타당화를 통해 새로운 개념을 이해하거나 재창조하는 경험을 갖도록 하여야 한다.

넷째[자료면], 수학 영재 교수·학습 자료는 지역공동 영재학급, 교육청부설 영재교육원, 대학부설 과학영재교육원에 각각 적용하면서 집단의 수준별로 비교하여 각 집단별 반응의 특성과 공통점, 차이점, 그리고 특이점 등을 분석한 내용을 바탕으로 교수·학습 자료의 유형을 결정하고 실제 활용할 수 있는 학생용뿐만 아니라 교사용 자료를 통해 자세히 안내해주어야 한다.

다섯째[기타], 교수·학습 자료를 개발하는 개발자는 그것을 활용하는 교사가 학생들로 하여금 실제적인 주제학습 과정에서 자기 주도적으로 수행한 과제에 대한 평가 방법을 자세히 안내할 뿐만 아니라 후속적인 탐구 활동을 유발할 수 있도록 안내하는 방법에 도움이 되는 방법을 가능한 한 자세히 기술해 주어야 한다.

3. 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 절차 모형

수학 영재 교수·학습 자료 개발의 절차 모형은 최종현(2004)을 바탕으로 [그림 1]과 같이 수정하였다. 여기서 집단의 수준에 따라 과제의 특성과 교수·학습 자료의 유형을 달리 고려할 수 있음을 알 수 있다.



[그림 1] 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 절차 모형

가. 교육 대상자의 특성 및 교육의 목표 확인

대학부설 과학영재교육원, 교육청부설 영재교육원, 지역공동 영재학급 집단과 같은 다양한 수준의 영재학생들의 지적 · 정의적 특성과 욕구를 바르게 이해하고 그들의 수준에 비추어 가르치고자 하는 것이 무엇인지를 분명히 해야 한다.

나. 소재 및 주제 발굴

영재 학생들이 가지고 있는 기지의 수학 내용 및 범교과적인 모든 지식과 도구를 활용하여 주어진 연구 과제를 해결하고 창조적 산출물을 제작하면서 보다 고차원적인 수학적 사고력과 창의적인 아이디어를 개발 · 신장시키는데 초점을 맞춰서 소재 및 주제를 발굴해야 한다.

다. 과제 분석

과제라 함은 하위수준의 지식이나 기능으로부터 이와 관련된 보다 높은 수준의 지식이나 기능 등이 위계적으로 구성되어 있어서 학습과 훈련의 전이가 가장 잘 이루어질 수 있도록 짜여진 지적 능력과 기능의 총체적 체계를 말한다. 과제분석이란 설정된 목표수준이나 선정된 과제를 숙지, 숙달하는데 필요한 과정이나 절차를 알아보는 방식 또는 설정된 목표를 달성하기 위하여 무슨 일을 해야 할 것인가를 알아보는 방법이다. 과제분석의 목적은 학습자들이 학습해야 하는 과제의 기술(記述), 학습에 요구되는 행동들의 세목화, 세목화된 행동들이 일어날 수 있는 조건의 확인, 과제성취나 행동수행의 평가기준 개발 등이다.

라. 수학 영재 교수·학습 자료 유형 결정

지금까지 개발된 수학과의 교수 · 학습 자료의 내용 성격에 따른 유형을 분석하면 <표 1>과 같이 문제중심형, 주제중심형, 과제중심형, 연구중심형으로 그 유형을 나눌 수 있다(송상헌, 2004, 2008).

<표 1> 수학과에서 활용할 수 있는 교수 · 학습 자료의 유형

프로그램의 유형	←기초과정 (단계/수준별)	심화과정→	유의점
문제중심형	문제풀이	문제해결	남이 만들어 놓은 문제를 풀기만 할 것이 아니라 학생들이 직접 만들어 보거나 평가까지도 병행
주제중심형	주제학습	주제탐구	주제를 가르치고 배우는 수준을 넘어 자기 주도적으로 깊이 있는 내용을 탐구함.
과제중심형	과제수행	과제개발	예상하는 답을 향해 주어진 과제를 수행해 나가도록 요구하는 수준을 넘어 창의적인 산출물을 생산해냄.
연구중심형	안내된 재발명	창의적 개별연구	전문가 수준의 연구/개발, 보고서, 논문 작성

마. 수학 영재 교수·학습 자료의 원형 개발

교수·학습 자료의 원형은 교수·학습 자료를 구성하기 위한 기초가 되는 것으로 이것을 바탕으로 하여 교수·학습 자료를 개발한다. 원형 속에 포함되는 내용은 아래 <표 2>와 같다.

<표 2> 교수·학습 자료의 원형에 포함될 요소들

1) 주제 설정의 취지 및 목적	8) 교수·학습 요소
2) 프로그램 학습 대상 및 사고 수준의 적합성	가) 주요 학습 개념 나) 학습 내용
3) 학생들이 해결해야 할 문제 상황	다) 주요 기능 라) 학습 결과
4) 관련 교육과정	9) 평가 계획
5) 학습목표	10) 학습 활동의 전개 절차
6) 교수·학습 방법 및 자료의 유형	11) 참고도서
7) 수준별 지도 계획 및 지도상의 유의점	

바. 수학 영재 교수·학습 자료 개발

1) 학생용 학습 자료 체계

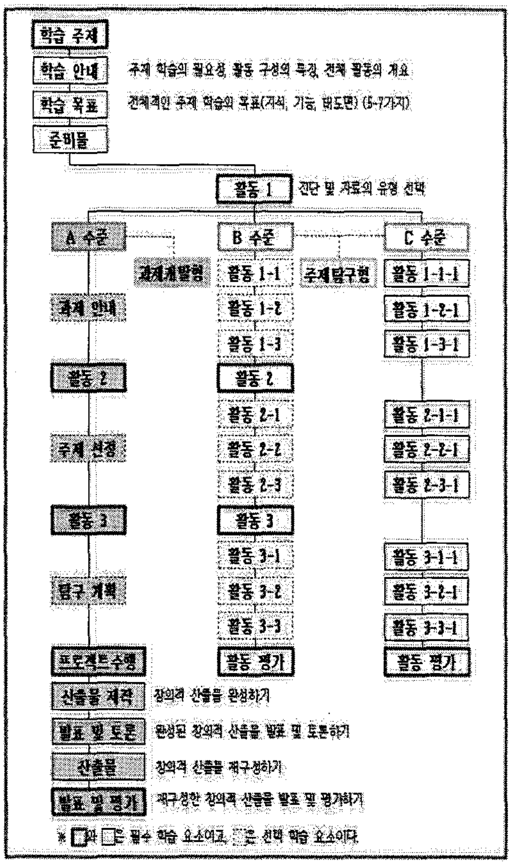
[그림 2]는 학생용 학습 자료의 집필 체제를 나타낸 것이다. 학생용 교수·학습 자료를 개발하기 위해서는 다음의 몇 가지를 고려하여야 한다.

첫째, 학생용 교수·학습 자료에는 학생들의 수학적 사고 과정을 구체적으로 표현할 수 있도록 충분한 여백을 제공하여야 한다. 문제 상황을 이해하고 창의적 산출물을 만들어 가는 과정에서 새로운 관계나, 더 고차원적인 상황, 일반적인 식 등을 고려하여 영재아가 어떤 사고 과정을 통해 창의적 산출물을 제작하는지 알 수 있어야 한다.

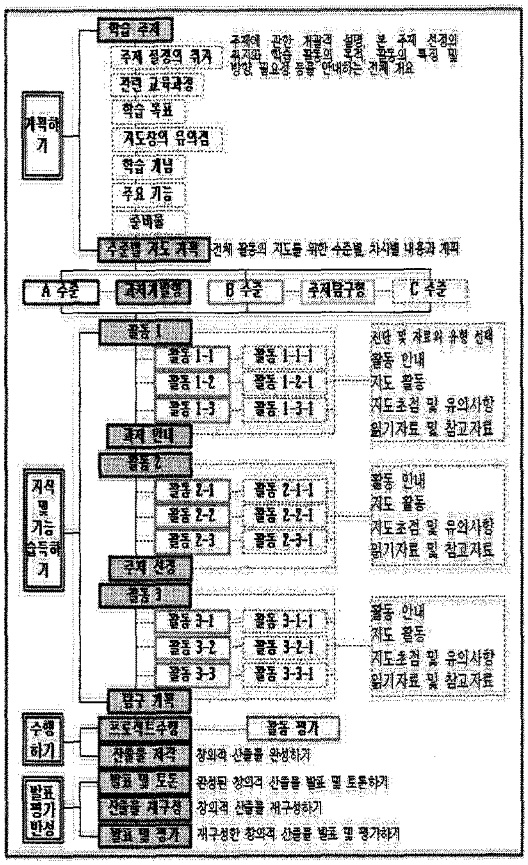
둘째, 학생들의 능력, 적성, 개인차를 고려하여 자기 주도적 학습이 가능하도록 수준별로 구성한다. 자기 주도 학습에 도움을 줄 수 있는 단계적, 체계적으로 내용을 구성하고 학생의 능력, 적성, 개인차를 고려하여 수준별로 구성한다. A 수준의 학생들은 함수적 관계 인식, 문제 상황의 구조 인식을 바탕으로 창의적 산출물 제작에 중점을 두고 운영하고, B 수준의 학생들은 함수적 관계 인식, 문제 상황의 구조 인식에 중점을 두고 운영하고, C 수준의 학생들은 순환적 관계 인식을 기본으로 하여 함수적 관계 인식과 문제 상황의 구조 인식의 일반화 사고를 확장하도록 중점을 두어 운영하도록 구성한다.

셋째, 내용이 너무 자세히 안내되어서는 안 된다. 일반 교육과정의 교과서는 다음 단계로의 안내가 너무 상세히 되어 있어서 학생들의 창의성을 제한하는 경우가 많다. 예를 들어 뒤에 제시된 질문이 앞에 문제를 해결하는 데 단서가 되어 영재아들이 그 범위 내에서 해결하려는 경향을 보일 때가 있다. 특히 영재아들은 주변 환경에 대한 민감한 반응을 보이고 사소한 단서도 놓치지 않는 경향이 있다. 따라서 교사용 지도서에는 그 과정을 자세히 안내하지만 학생에게는 발문을 통해 사고 과정을 유도하는 것이 적절하다.

넷째, 교수·학습 자료와 관계된 참고문헌을 자세히 안내해 준다. 영재아들은 교사에게서 배운 지식으로 끝내지 않고 그 내용을 더 발전해서 공부하려는 경향이 있다. 따라서 참고문헌을 통해 학생들이 사후 연구 과제를 선정할 수 있고 이해하지 못한 부분에 대하여 보충하기 위한 수단으로 사용할 수 있다.



[그림 2] 학생용 학습 자료 체계



[그림 3] 교사용 지도 자료 체제

2) 교사용 지도 자료 체계

[그림 3]은 교사용 지도 자료의 집필 체제를 나타낸 것이다. 교사용 교수 · 학습 자료를 개발하기 위해 다음의 몇 가지를 고려해야 한다.

첫째, 주제 설정의 취지와 관련 교육과정, 학습의 목표, 학생들이 해결해야할 문제 상황에 대한 구체적인 설명 등을 명시하여 활용하고자 하는 교사들에게 충분한 안내서의 역할을 할 수 있어야 한다.

둘째, 활동별로 교육과정의 위계 또는 개념도, 활동 전개 계획표 등을 제시하여 수업에서 교사가 수업의 흐름을 확인할 수 있도록 해 주어야 한다.

셋째, 전체 활동의 지도를 위한 수준별, 차시별 내용과 계획을 위한 수준별 지도계획을 세워 수준별 교수 · 학습 과정에 대한 충분한 이해가 되도록 해 주어야 한다.

넷째, 활동 학습을 통하여 학생들의 수학적 사고 능력과 태도의 변화를 유발하기 위한 지도의 초점과 지도 시 유의사항들을 예시와 함께 상세히 기술해 주어야 한다.

다섯째, 학생용 자료에 제시된 문제나 과제에 대해 학생들이 나타낼 수 있는 다양한 전략이나 풀이 방법 등을 예시해 주어야 한다.

여섯째, 교재를 개발하면서 도움을 받았던 참고문헌이나 인터넷 주소를 정확하게 적어두어 지도교사가 그 교재를 재구성하거나 수업 시 문제점이 발생하였을 때에 신속하게 대처할 수 있도록 해주어야 한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

1. 연구의 대상자

본 연구를 위해 선택한 교육 대상자의 특성은 <표 3>과 같다. 우리나라 영재교육 기관의 수준을 명확히 구분하는 기준은 없다. 하지만 사회의 관습상 각 집단 교육 대상자들을 선발하는 시기와 경쟁률, 그리고 교육의 내용은 그 집단의 수준을 어느 정도 반영한다.4)

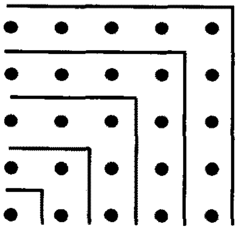
<표 3> 연구 대상자들의 특성과 수업 적용 방법

연구 대상의 수준별 집단	구분 (수준)	학년	인원	또래 학년에서의 수준	적용 시기	적용방법 및 수업시간 (50분 단위수업 시수)
A대학부설과학영재교육원 심화반	A1	5,6	16	상위 0.05%	1차	원격(2) 주말교육(4)
A대학부설과학영재교육원 기초반	A2	4,5,6	15	상위 0.1%	1차	원격(2) 주말교육(4)
G도교육청 슈퍼영재	A3	5,6	2	상위 0.1%	2차	원격(2) 주중교육(4+4)
Y교육청 영재교육원	B1	6	20	상위 1%	2차	주중교육(4+4)
G교대 수학영재캠프	B2	6	16	상위 1%	1차	집중교육(3+3)
S초지역공동 영재학급	C1	6	20	상위 5%	1,2차	원격(2) 주중교육(4+4)

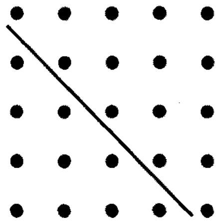
A2수준은 G도의 초등학생들이 가장 선호하는 대학부설 과학영재교육원으로 지역내 모든 시, 군, 구 지역교육청 소속의 각 학교에서 추천한 1~2명(총 500여명)을 대상으로 대학자체의 학년별 학력검사(1차, 경쟁률 25:1)와 학년통합 사고력검사(2차, 경쟁률 5:1), 구술면접(3차 경쟁률2:1)을 거쳐 선발되므로 가장 우수한 집단(또래 학령인구의 0.1%)이다. A1집단(심화반)은 A2집단(기초반)으로 선발되어 1년간 100시간이상의 영재교육을 이수한 학생들로서 A2집단보다 대체로 우수하다. A3집단(슈퍼영재)은 B1집단(지역교육청)에서 가장 우수한 학생들만을 대상으로 도교육청에서 별도로 선발한 학생들로서 B1집단 내에서도 10% 이내에 속한다. B1집단은 G도내 특정한 시교육청에 소속한 학생들로서 우리나라 영재교육 진흥법과 그 시행령에서 일반적으로 규정하는 0.8~1%정도에 해당하고 A2집단과 비슷한 선발과정을 거친다. B1집단의 수준으로서 최근 5년간 A집단으로 진학한 학생의 비율은 10%에 미치지 못하였다. B2집단은 B1집단과 유사한 방법으로 선발된 G도내 20여개의 교육청으로부터 추천을 받아 실시한 방학 중 집중 캠프에 참가한 학생들이다. C1집단은 지역공동 영재학급으로서 이 학급에서 가장 우수한 학생들 중 일부가 다음 해에 B1집단 또는 매우 드물게 A2집단에 선발되곤 한다. 이들을 대상으로 1차 수업 후 수정을 거쳐 2차 수업을 진행하였으며 각 집단을 대상으로 실시한 수업의 방법과 시간은 <표 3>에 함께 실었다.

4) 이 표는 각 기관의 선발시기와 과정에서 드러나는 학생들의 선호와 선발인원, 경쟁률, 그리고 지도하는 내용의 수준과 더불어 선행연구들의 결과에서 서술하는 해당 집단 학생들의 사고특성에 비추어 구분한 것이다.

2. 연구의 과제



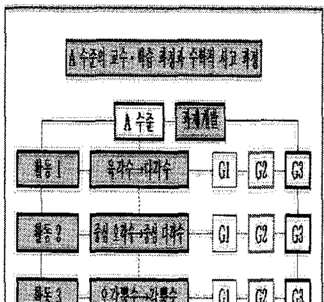
[그림 4] 홀수의 합과 정사각수



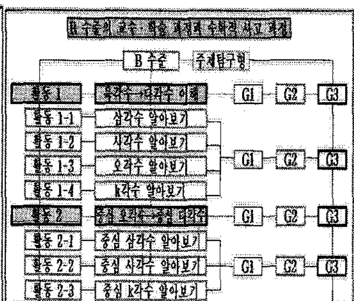
[그림 5] 연속된 두 삼각수의 합

수학교육학자인 프로이덴탈(Hans Freudenthal, 1905~1990)은 도형수가 수학화의 좋은 예가 될 수 있다고 한다(박교식, 2004; 우정호 외, 2008). 도형수 사이의 크기와 관계가 기하학적으로 표현되는 한, 그것은 수평적 수학화의 문제일 수 있다. 예를 들면 [그림 4]에서 처음 n개의 홀수의 합은 n번째 정사각형과 같다. 또는 [그림 5]에서 $(n-1)$번째 삼각수와 n번째 삼각수의 합은 n번째 정사각형과 같다. 이런 식과 관계를 공식적으로 표현하여 처리하는 한, 수직적 수학화가 일어나지만, 그것은 결국 수평적 수학화로 경험된다. 비록 이런 관계를 증명하는데 필요한 귀납적 단계는 결국 수평적 수학화로 경험될 지라도, 그것은 다시 수직적 수학화의 특징을 가진다. 증명에서 사용하는 것과 같은 그러한 완전 귀납을 언어화하는 것은 다시 수직적 수학화가 일어난 것이다(우정호 외, 2008).

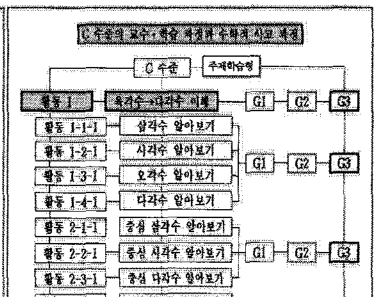
도형수와 관련하여 연구된 내용은 크게 평면도형수와 입체도형수, 프랙탈 도형수, 4차원 도형수 등이 있다(박교식, 2004). 평면도형수에는 다각수, 중심다각수, 직사각수, 그노몬수, 다윗별수 등이 있고, 입체도형수에는 각뿔수, 중심 각뿔수, 3차원 다윗별수, 정다면체수, 깍은 정다면체수, 깍은 정다면체 표면수, 3차원 그노몬수 등이 있고, 프랙탈 도형수에는 시어핀스키 체수와 시어핀스키 스폰지수, 시어핀스키 카페트수와 멩거 스폰지수, 코흐 눈송이수와 3차원 눈송이수가 있고, 4차원 도형수에는 4차원 각뿔수, 4차원 각뿔 표면수, 중심 4차원 r각뿔수, 4차원 초정다면체수 등이 있다. 이 연구는 그 중 초등학생들에게 적용할 수 있는 수준으로 다각수와 중심 다각수, 각뿔수만을 분석의 대상으로 삼았다.



[그림 6] A 수준의 과제개발형



[그림 7] B 수준의 주제탐구형



[그림 8] C 수준의 주제학습형

학생들이 속한 집단의 수준에 따라 과제의 수준과 활동의 구체화 정도는 달라져야 한다. [그림 6], [그림 7], [그림 8]은 수준별로 달리 제공한 사례를 나타낸 것이다. A수준에서는 활동이 일반적인 개요 수준만 제공하고 과제개발(프로젝트)형으로 진행하고 B수준에서는 구체적인 활동과 함께 주제탐구형으로 진행하나 C수준에서는 활동을 보다 상세화하여 구체적이고 단계적인 유형을 제공하여 주제학습형으로 개발하였다.

3. 자료 수집

본 연구에서는 연구 대상 학생들이 참여했던 A수준(대학부설 영재교육원 기초반, 심화반, 슈퍼영재 사사교육), B수준(교육청 영재교육원, 수학영재캠프), C수준(지역공동 영재학급) 등에서 제1저자는 모든 수업에 직접 수업진행자로 참여하여 수업의 전 과정을 비디오로 촬영하였다. 일부(A3와 C1)를 제외한 모든 수업에는 관찰 기록 교사를 두어 별지의 관찰 일지까지 작성하였다. 각 집단별 연구 대상자의 활동지, 학생용 수업일지, 창의적산출물 발표 자료, 캠프 참여 일지, 도형수 과제 해결 노트 등의 기록물을 수집하였다. 직접 관찰이나 활동지, 비디오 촬영만으로는 부족하여 연구 대상자로부터 직접 보충 설명을 들어야 할 필요가 있을 때는 추가 면담의 방법을 사용하였다. 이러한 면담은 학생들이 과제 해결 과정에서 느끼는 수학적 사고 방법, 일반화 유형, 정당화 전략 등에 대한 기억이 최대한 유지될 수 있는 상태에서 이루어질 수 있도록 수업 중 수시로 또는 휴식시간이나 수업 직후에 이루어졌다.

연구 대상자들에게 수업 이전에 활동지나 수업일지 등에 자신의 생각을 구체적으로 기술할 것을 요구 하였고, 활동지에 자신의 생각을 수정할 경우 자신의 이전 사고 과정에 대한 기록을 완전히 삭제하지 않도록 하여 학생들의 전체적인 사고 과정에 대한 기록이 활동지에 남도록 하였다.

4. 수업 분석의 기준

가. 패턴의 관계와 일반화 전략 분석

도형수를 소재로 한 패턴의 관계나 일반화 전략을 분석하기 위해서 박은정(2006)과 김민정 외(2008)의 연구에서 구성한 일반화 전략 유형의 분석틀을 바탕으로 분석의 기준을 삼았다[5].

나. 수준별 자료 개발의 타당성 분석

수준별 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하여 현장에 적용하고, 수업 사례를 분석할 때, 학생들의 수학적 사고 과정에 대한 분석과 함께 자료 개발의 기준을 근거로 자료 개발의 타당성을 분석하기 위해 다음과 같은 자료 개발의 분석 기준을 마련하였다.

첫째, 학생이 속한 집단의 특성을 고려하면서 교사의 설명과 학생의 자기주도적인 탐구 활동의 정도를 고려하였는가?

둘째, 동일한 주제에 대한 활동을 쉬우면서도 흥미로운 활동에서 점차 깊이 있는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동 간에 연계성이 있도록 구성하였는가?

---

5) 일반화 전략의 분석 유형은 순환적 관계 인식(G1), 함수적 관계 인식(G2), 문제 상황의 구조 인식(G3)의 세 가지로 조정하여 분석하였다.

셋째, 각 교육기관마다, 또는 학생들의 수학적 사고 수준 및 수학 성취도 수준에 맞는 교수 · 학습 자료가 필요하다. 수업을 전개해 나가는데 있어, 규칙을 이해하고 패턴을 찾아서 일반화를 시켜보는 활동을 중심으로 주제중심형 교수 · 학습 자료로 구성하거나, 도형수 과제의 규칙과 패턴을 찾고 일반화를 시켜보는 활동을 바탕으로 고차원적인 수학적 사고 능력을 기르고 창의적인 아이디어로 창의적인 산출물을 만들어보는 과제중심형 교수 · 학습 자료로 구성하는 것과 같이, 수준별 수학 영재 교수 · 학습 자료로 구성하였는가?

넷째, 같은 문제에 대하여 학생들의 다양한 반응 속에 가장 효율적인 방법을 찾는 것은 학생들의 사고 발달에 큰 도움이 되므로, 다양한 전략이나 해결방법을 가지는 활동으로 발전적인 사고를 할 수 있도록 구성하였는가?

다섯째, 다양한 활동 속에서 개연적 추리를 통하여 수학적인 추측을 하고 이를 탐구하여 타당성을 확인하면서 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여토록 하면서 스스로의 사고를 체계화하고 명확화 할 수 있도록 하였는가?

다. 산출물 분석

수행 과제는 제시한 학습 내용과 다른 새로운 도형수를 개발하고 그것의 일반식을 구하는 보고서(산출물)를 제출하는 것이다. 이 산출물의 분석 기준은 다음과 같다.

첫째, 제시한 학습 내용에 비해 새롭거나 발전적인가?

둘째, 그 도형수의 일반식을 구하였는가?

Ⅳ. 현장 적용 결과 분석

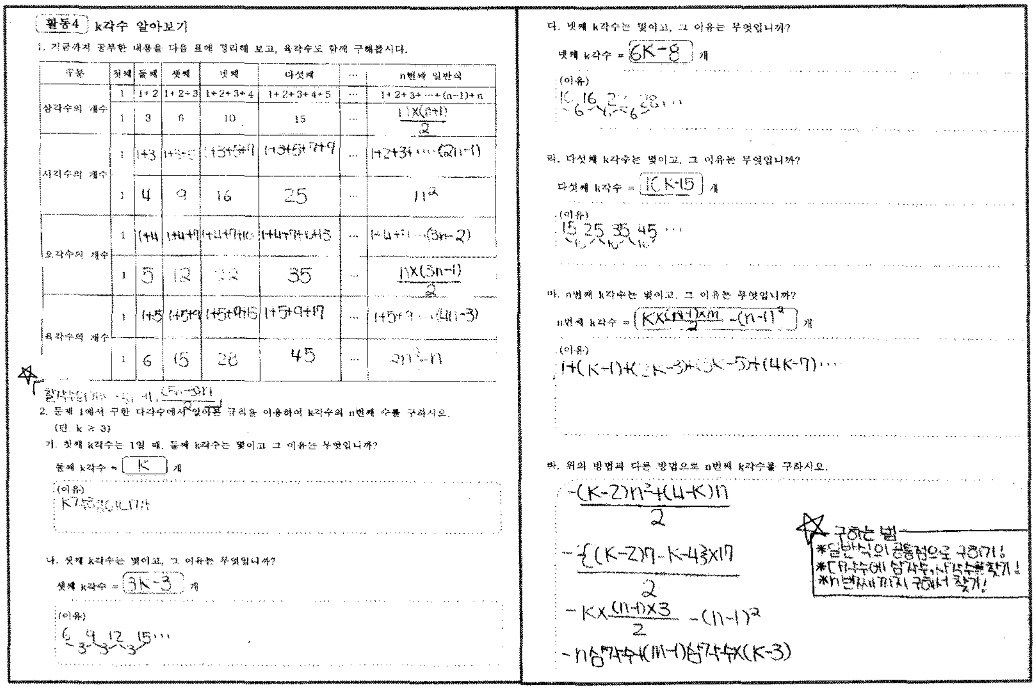
1. 1차 현장 적용 결과 분석

가. C1집단에 대한 1차 현장 적용 결과

'삼각수 알아보기'의 경우 모든 학생들이 수의 패턴에서 규칙을 찾아(순환적 관계 인식, G1) 일반식을 구하였다. '사각수 알아보기'에서도 모든 학생들이 순환적 관계 인식을 통해 일반식을 구하였지만, 삼각수와의 관계를 학습한 후에 14명(70%)의 학생이 삼각수와의 관계를 통해(문제 상황의 구조 인식, G3) 일반식을 구하였다. 오각수의 경우, 수의 패턴에서 규칙을 찾거나 함수적 관계 인식으로 일반식을 구한 학생이 2명(10%)이었지만, 삼각수와의 관계를 통해 일반식을 구한 학생들이 15명(75%)으로 훨씬 많았다. 복잡한 다각수일 경우에 수의 패턴에서 규칙을 찾는 것보다는 삼각수와의 관계에서 일반식을 구하기가 더 쉽기 때문이다. k각수의 경우 수의 패턴이나 다각수의 순서 관계의 이해에서 일반식을 구하는 것을 어려워하였고, 삼각수의 관계를 통해 일반식을 구한 학생들도 10명(50%)밖에 되지 못하였다.

1C1-12[6] 학생의 경우 k각수의 일반식을 구할 때, 첫째, 둘째, 셋째, 넷째, 다섯째, …의 다각수들에서 규칙을 찾아서 일반식을 구하였고, 다른 방법으로는 다각수들의 일반식에서 규칙을 찾아서 구하는 방법과 다각수들과 삼각수, 사각수와의 관계에서 구하는 방법을 생각해내었다.

6) 이하 학생을 구분하기 위한 ID에서 1C1-12는 1(적용시기)C1(영재교육기관)-12(개별학생번호)임.


활동4 k각수 알아보기

1. 지금까지 공부한 내용을 다음 표에 정리해 보고, 육각수도 함께 구해봅시다.

구분	첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째	…	n번째 일반식
삼각수의 개수	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5	…	1+2+3+…+(n−1)+n
	1	3	6	10	15	…	$\frac{n\times(n+1)}{2}$
사각수의 개수	1	1+3	1+3+5	1+3+5+7	1+3+5+7+9	…	1+2+3+…(2n−1)
	1	4	9	16	25	…	n^2
오각수의 개수	1	1+4	1+4+7	1+4+7+10	1+4+7+10+13	…	1+4+7…(3n−2)
	1	5	12	22	35	…	$\frac{n\times(3n-1)}{2}$
육각수의 개수	1	1+5	1+5+9	1+5+9+13	1+5+9+17	…	1+5+9…(4n−3)
	1	6	15	28	45	…	$2n^2-n$

2. 문제 1에서 구한 다각수에서 알아본 규칙을 이용하여 k각수의 n번째 수를 구하시오. (단, k ≥ 3)

가. 첫째 k각수는 1일 때, 둘째 k각수는 몇이고 그 이유는 무엇입니까?

둘째 k각수 = K 개

(이유) K각형이니까

나. 셋째 k각수는 몇이고, 그 이유는 무엇입니까?

셋째 k각수 = 3K−3 개

(이유) 6 9 12 15 …

다. 넷째 k각수는 몇이고, 그 이유는 무엇입니까?

넷째 k각수 = 6K−8 개

(이유) 10 16 22 28 …

라. 다섯째 k각수는 몇이고, 그 이유는 무엇입니까?

다섯째 k각수 = 10K−15 개

(이유) 15 25 35 45 …

마. n번째 k각수는 몇이고, 그 이유는 무엇입니까?

n번째 k각수 = $K\times\frac{(n-1)\times n}{2}-(n-1)^2$ 개

(이유) 1+(K−1)+(2K−3)+(3K−5)+(4K−7)…

바. 위의 방법과 다른 방법으로 n번째 k각수를 구하시오.

$\frac{(K-2)n^2+(4-K)n}{2}$

$\frac{\{(K-2)n-K-4\}\times n}{2}$

$K\times\frac{(n-1)\times3}{2}-(n-1)^2$

n삼각수+(n−1)삼각수×(K−3)

구하는 법

*일반식의 공통점으로 구하기!

*다각수에 삼각수, 사각수 찾기!

*n번째까지 구해서 찾기!

[그림 9] 1C1-12의 다각수 알아보기

(예화1)

T : 너는 어떻게 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했어?

1C1-12: 첫째 k각수는 1이고, 둘째 k각수는 k각형이니까 k이고, 셋째 k각수는 6, 9, 12, 15, …, 3k-3이므로 3k-3이고, 넷째 k각수는 10, 16, 22, 28, …, 6k-8이므로 6k-8이고, 다섯째 k각수는 15, 25, 35, 45, …, 10k-15이므로 10k-15입니다. 그래서 n번째 k각수는 1+(k-1)+(2k-3) +(3k-5)+(4k-7)+⋯{(n-1)k-(2n-3)}이므로 $k\frac{(n-1)n}{2}-n(n-2)$으로 일반식을 구할 수 있습니다.(여기에서 수식을 간단히 정리하지는 못하였다.)

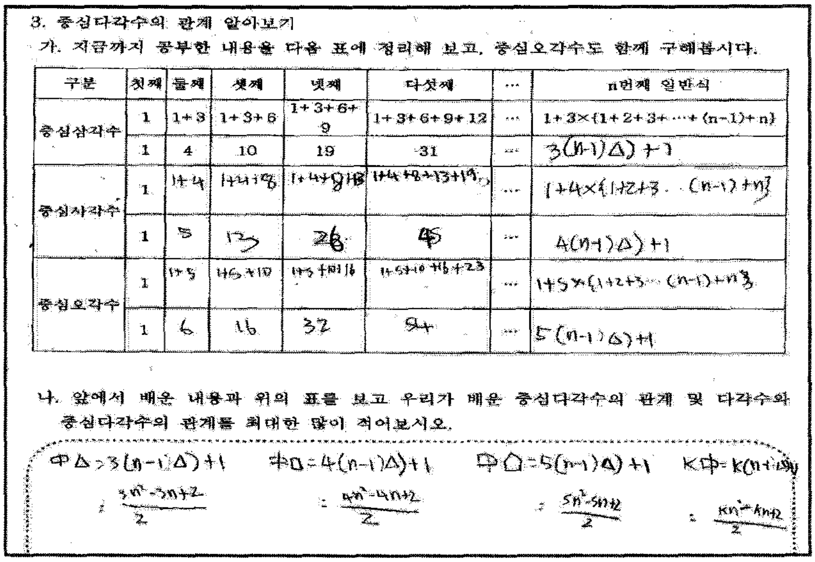
T : k각수의 일반식을 구하는 다른 방법은 어떤 것들이 있을까?

1C1-12: 삼각수, 사각수, 오각수, 육각수, … 들의 일반식에서 공통점을 찾아서 다음과 같이 구할 수 있습니다. 삼각수는 $\frac{n(n+1)}{2}$이고, 사각수는 $n^2=\frac{n(2n+0)}{2}$이고, 오각수는 $\frac{n(3n-1)}{2}$이고, 육각수는 $\frac{n(4n-2)}{2}$이므로 k각수의 일반식은 $\frac{\{n(k-2)+(4-k)\}}{2}$와 같이 구할 수 있습니다. 또 다른 방법으로는 n째 사각수에는 n째 삼각수와 n-1째 삼각수의 합이고, n째 오각수는 n째 삼각수와 n-1째 삼각수 2개의 합이고, n째 육각수는 n째 삼각수와 n-1째 삼각수 3개의 합이므로, n째 k각수는 n째 삼각수와 n-1째 삼각수 (k-3)개의 합이 되므로 k각수의 일반식은 $\frac{\{n(k-2)+(4-k)\}}{2}$와 같이 구할 수 있습니다.

창의적 산출물의 경우 16명(80%) 학생들이 배웠던 내용과 유사한 내용으로 창의적 산출물을 만들었고, 4명(20%)의 학생들만 발전적인 내용이었지만 연구된 내용도 새로운 도형수의 일반식은 찾지 못하였고 문제제기 수준의 내용이었다.

나. B2집단에 대한 1차 현장 적용 결과

중심 다각수의 경우 모든 학생이 함수적 관계 인식(G2), 문제 상황의 구조 인식(G3)을 통해 일반식을 구하였다.



3. 중심다각수의 관계 알아보기

가. 지금까지 공부한 내용을 다음 표에 정리해 보고, 중심오각수도 함께 구해봅시다.

구분	첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째	…	n번째 일반식
중심삼각수	1	1+3	1+3+6	1+3+6+9	1+3+6+9+12	…	1+3×{1+2+3+⋯+(n−1)+n}
	1	4	10	19	31	…	3((n-1)△)+1
중심사각수	1	1+4	1+4+8	1+4+8+13	1+4+8+13+19	…	1+4×{1+2+3 . . (n-1)+n}
	1	5	13	26	45	…	4((n-1)△)+1
중심오각수	1	1+5	1+5+10	1+5+10+16	1+5+10+16+23	…	1+5×{1+2+3⋯(n-1)+n}
	1	6	16	32	54	…	5((n-1)△)+1

나. 앞에서 배운 내용과 위의 표를 보고 우리가 배운 중심다각수의 관계 및 다각수와 중심다각수의 관계를 최대한 많이 적어보시오.

중△=3(n-1△)+1 $=\frac{3n^2-3n+2}{2}$ 중□=4(n-1△)+1 $=\frac{4n^2-4n+2}{2}$ 중⬠=5(n-1△)+1 $=\frac{5n^2-5n+2}{2}$ k중=k(n-1△)+1 $=\frac{kn^2-kn+2}{2}$

[그림 10] 1B2-11의 중심다각수

(예화2)

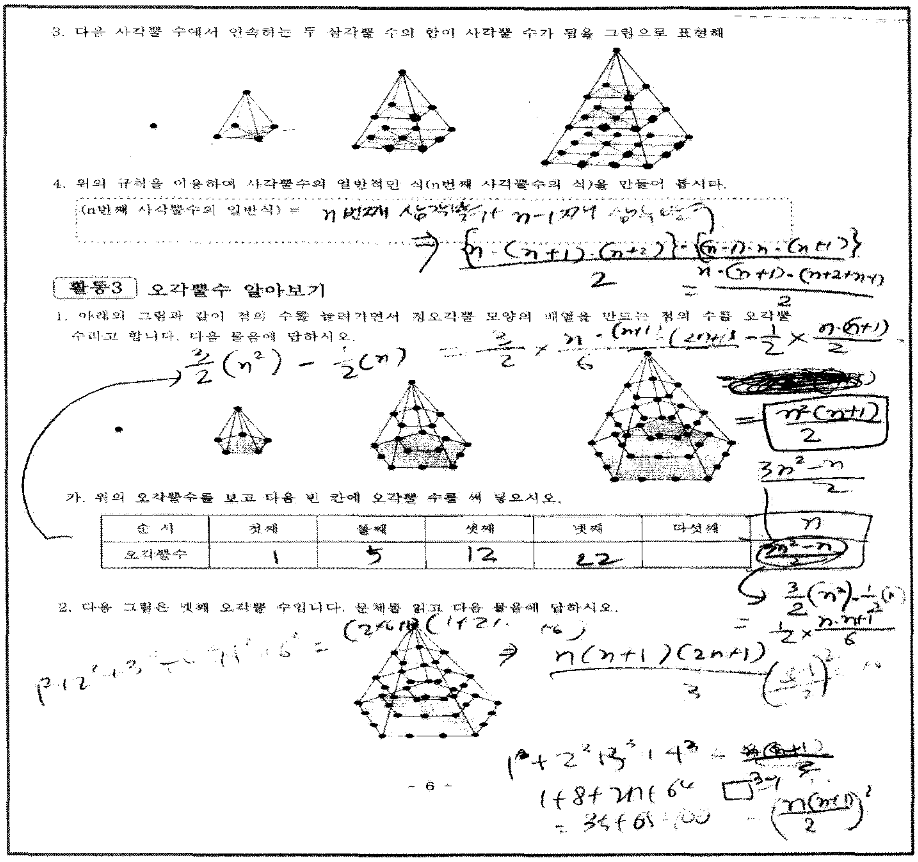
T : 너는 어떻게 중심 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

1B2-11: n번째 중심삼각수는 n-1번째 삼각수 3개와 1의 합이고, n번째 중심사각수는 n-1번째 삼각수 4개와 1의 합이고, n번째 중심오각수는 n-1번째 삼각수 5개와 1의 합이므로 n번째 중심k각수는 n-1번째 삼각수 k개와 1의 합입니다. 그래서 n번째 중심k각수는 $\frac{kn^2-kn+2}{2}$ 입니다.

창의적 산출물의 경우 14명 중 11명이 4개의 모둠으로 나누어져서 4가지 산출물을 연구하였으나, 기존 학습 내용과 유사한 내용의 산출물을 발표하였다

다. A2집단에 대한 1차 현장 적용 결과

각뿔수 알아보기에서 삼각뿔수(67%), 사각뿔수(73%)는 높게 나왔지만, 오각뿔수(27%)에서는 A1 학생들에(53%) 비해 낮게 나왔다. A1 학생들에 비해 낮게 나온 이유는 과학영재교육원 첫 해이며, 4, 5학년이 9명(60%)로 A1 학생들에 비해 많기 때문이다. 다수의 학생들이 함수적 관계 인식(G2)을 하였지만, 문제 상황의 구조 인식(G3)으로 더 쉽게 이해를 하고 일반식을 구하였다.



[그림 11] 1A2-8(5)의 각뿔수

(예화3)

T : 너는 어떻게 오각뿔수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

1A2-8: 2번 그림에서 넷째 오각뿔수는 넷째 사각뿔수와 셋째 삼각뿔수의 합이 되는 것을 알 수 있습니다. 이것을 더 넓혀서 생각해보면 n번째 오각뿔수는 n번째 사각뿔수와 n-1번째 삼각뿔수의 합이므로 다음과 같이 식을 세울 수 있습니다. (n번째 오각뿔수)=(n번째 사각뿔수)+(n-1번째 삼각뿔수)= $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)}{2}$ 입니다.

T : 다른 방법으로는 구할 수 없을까?

1A2-8: n번째 오각뿔수는 n번째 삼각뿔수와 n-1번째 삼각뿔수 2개의 합으로도 구할 수 있습니다.

창의적 산출물의 경우 15명 중 11명(73%)이 기존 학습 내용을 발전시킨 내용의 산출물을 발표하였다. 구체적인 예로 k각뿔수의 일반식을 탐구한 1A2-5(5) 학생의 경우가 있고, k각뿔수, 중심 k각뿔수, k각기둥수, 중심 k각기둥수의 관계를 탐구한 1A2-6(5) 학생도 있었다.

라. A1집단에 대한 1차 현장 적용 결과

삼각수 알아보기의 경우 모든 학생들이 삼각수가 자연수의 합임을 알고 일반식을 구하였다. 사각수 알아보기에서도 모든 학생들이 함수적 관계 인식(G2), 문제 상황의 구조 인

식(G3)을 통해 일반식을 구하였다. 오각수의 경우, 삼각수와의 관계를 통해 일반식을 구한 학생들이 13명(87%)으로 구하였고, 함수적 관계 인식을 통해 구한 학생은 1명이었다. k각수의 경우 13명(87%)의 학생이 함수적 관계 인식(G2), 문제 상황의 구조 인식(G3)을 통해 일반식을 구하였는데 1A1-2(5) 학생과 1A1-10(6) 학생은 구하지 못하였다. 그 이유는 수업 외적인 요인(관심 및 집중 부족)으로 기인한 듯하다(이후 활동에서 패턴이나 규칙, 일반식을 찾음). 다른 수준의 학생들과 다른 점으로는 $\sum$라는 기호를 사용하는 학생들이 일부 있었는데 이는 선수학습의 결과였다.

구분	첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째	…	n번째 일반식
삼각수의 개수 $t_n = {}_3a_n$	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5	…	$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
	1	3	6	10	15	…	$\frac{n(n+1)}{2}$
사각수의 개수 $S_n = {}_4a_n$	1	1+3	1+3+5	1+3+5+7	1+3+5+7+9	…	$1+3+\ldots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
	1	4	9	16	25	…	n^2
오각수의 개수 $p_n = {}_5a_n$	1	1+4	1+4+7	1+4+7+10	1+4+7+19+13	…	$1+4+7+\ldots+(3n-2) = \sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{3n^2-n}{2}$
	1	5	12	22	35	…	$\frac{3n^2-n}{2}$
육각수의 개수 $h_n = {}_6a_n$	1	1+5	1+5+9	1+5+9+13	1+5+9+13+17	…	$1+5+9+\ldots+(4n-3) = \sum_{k=1}^{n}(4k-3) = \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n$
	1	6	15	28	45	…	$2n^2-n$
k각수의 개수 ${}_ka_n$	1	1+(k-1)	1+(k-1)+(2k-3)	1+(k-1)+(2k-3)+(3k-5)	1+(k-1)+(2k-3)+(3k-5)+(4k-7)	…	$1+(k-1)+(2k-3)+\ldots+[(n-1)k-(2n-3)] = \sum_{i=1}^{n}[(i-1)k-(2i-3)] = \frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$
	1	k	3k-3	6k-8	10k-15	…	$\frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$

2. 여러 가지 다각수들 사이의 관계를 찾아보세요.

(예) n번째 사각수= (n번째 삼각수)+(n-1번째 삼각수)

$$p_n = S_n + S_{n-1} - S_{n-2} + S_{n-3} - \ldots + (-1)^n S_1$$
$$= S_n + t_{n-1}$$

$$h_n = p_n + t_{n-1} = p_n + S_n - t_n$$
$$(h_n - p_n = p_n - S_n = S_n - t_n = t_{n-1})$$

일반적으로 ${}_ka_n - {}_{k-1}a_n = t_{n-1}$

[그림 12] 1A1-14(6)의 다각수

(예화4)

T : 너는 어떻게 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

1A1-14: k각수의 일반식은 첫째 k각수+둘째 k각수+셋째 k각수+…+n째 k각수이므로 다음과 같은 합을 구할 수 있습니다.

$$1+(k-1)+(2k-3)+\ldots+[(n-1)k-(2n-3)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n}[(i-1)k-(2i-3)] = \frac{1}{2}[(k-2)n^2-(k-4)n]$$

T : 너는 특이하게 $\sum$라는 기호를 썼는데 그 기호의 뜻을 알고 있니?

1A1-14: 네, $\sum$는 연속된 수들의 합을 간단하게 표현하는 것으로 배운 적이 있어요. 예를 들면 사각수 같은 경우는 $1+3+\ldots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ 로 쓸 수 있고, 오각수 같은 경우도 $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=\frac{3n^2-n}{2}$ 와 같이 쓸 수 있습니다.

T : 그럼 네가 찾은 여러 가지 다각수들의 관계를 이야기 해주겠니?

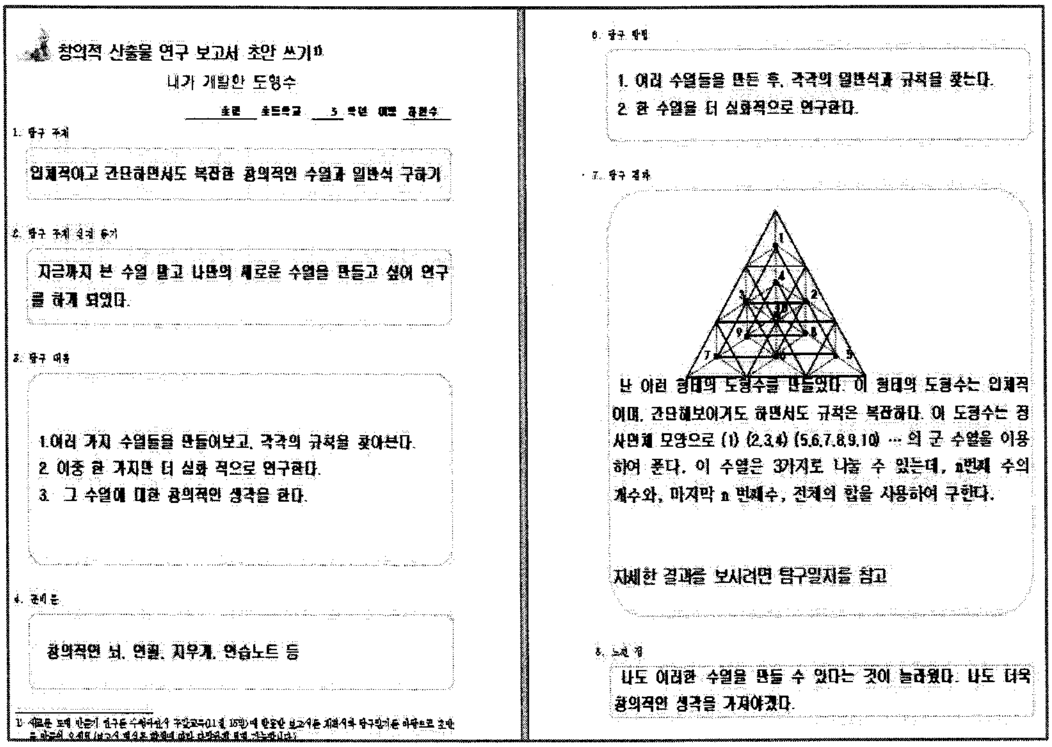
1A1-14: 삼각수의 개수를 $t_n={}_3a_n$라 하고, 사각수는 $S_n={}_4a_n$, 오각수는 $p_n={}_5a_n$, 육각수는 $h_n={}_6a_n$, k각수는 ${}_ka_n$라고 하면,

$$p_n=S_n+S_{n-1}-S_{n-2}+S_{n-3}-\ldots+(-1)^nS_1=S_n+t_{n-1}$$

$$h_n=p_n+t_{n-1}=p_n+S_n-t_n(h_n-p_n=p_n-S_n=S_n-t_n=t_{n-1})$$

일반적으로 ${}_ka_n-{}_{k-1}a_n=t_{n-1}$이 성립합니다.

창의적 산출물의 경우 15명 중 9명(60%)이 기존 학습 내용을 발전시킨 내용의 산출물을 발표하였다. 구체적인 예로 도형과 수열의 규칙이나 패턴을 새롭게 구성한 1A1-6(6) 학생의 경우가 있고([그림 10]), 기존의 내용을 발전시켜서 프랙탈 도형수를 탐구한 1A1-7(6) 학생도 있었다([그림 11]).



[그림 13] 1A1-6(6)의 창의적 산출물

마. 1차 현장 적용 자료의 문제점과 개선점

1차 현장 적용 후 발견된 문제점과 그에 대한 개선점을 정리하면 <표 4>와 같다.

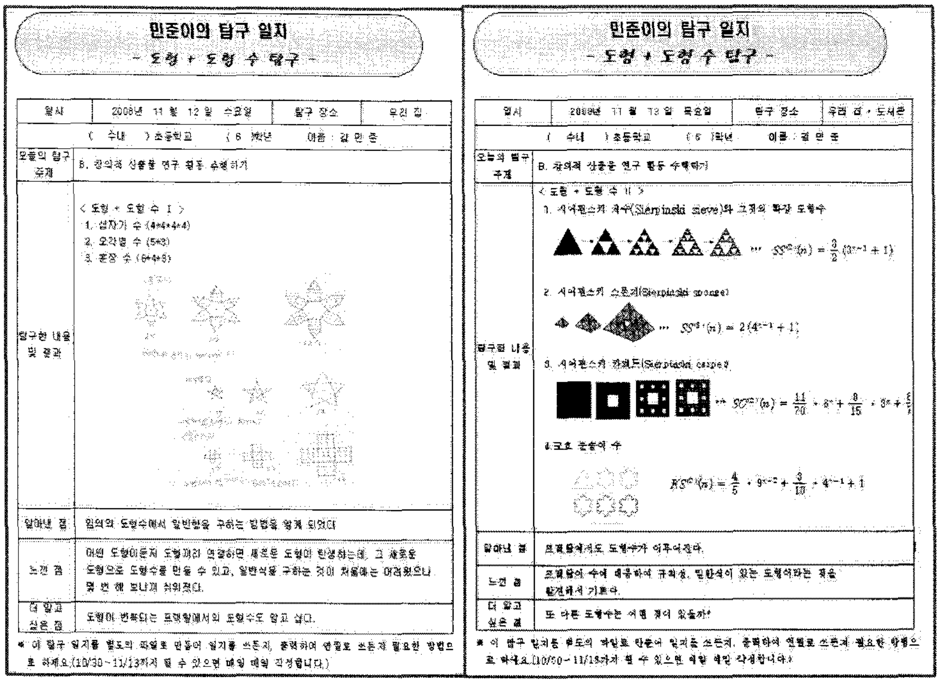
<표 4> 1차 현장 적용 자료의 문제점과 개선점

구분	문제점	개선점
활동2	• 도형수의 이름을 스스로 붙여보지 않고 제시되어 있어 학생들에게 의욕을 불러 일으키지 못한다. • 규칙을 이용하여 일정한 패턴은 잘 찾으나, k각수의 일반적인 식(n번째 k각수의 식)을 만들기에는 어려움이 크다.(C초 지역공동 영재학급 6학년) • 그림으로 배우는 여러 가지 수들의 합에서 모양을 주고 구하는 식을 설명하는 과정에서 자기 주도적 학습이 되지 못한다. • 창의적 산출물 주제(탐구주제)를 선정하는데 있어 주제가 다양하지 못하다.	• 삼각수, 사각수, 다윗별 수 등과 같이 이름을 학생들에게 제시하기 보다는 학생들이 제시된 모양 속에서 규칙을 찾아내고 그 규칙을 활용하여 이름을 붙여보게 하는 활동이 필요하다. • 학습 수준에 따라 규칙을 이용하여 일정한 패턴을 구하는 것에 중점을 두거나, 다각수의 일반적인 식(n번째 다각수의 식)을 만들기에 중점을 두는 것과 같이 수준별로 교수·학습 자료를 재구성한다. • 그림으로 배우는 여러 가지 수들의 합에서 모양을 주고 구하는 식을 설명하기 보다는 연속된 자연수의 합을 그림으로 표현해 보게 하는 활동이 필요하다.
활동3	• 다각수와 마찬가지로 규칙을 이용하여 일정한 패턴은 잘 찾고, k각수의 일반적인 식(n번째 k각수의 식)을 만들기에는 어려움이 다른 활동에 비해 적은 편이다.	• 학습 수준에 따라 규칙을 이용하여 일정한 패턴을 구하는 것에 중점을 두거나, 중심다각수의 일반적인 식(n번째 중심다각수의 식)을 만들기에 중점을 두는 것과 같이 수준별로 교수·학습 자료를 재구성한다.
활동4	• 평면도형수에 비해 입체도형수에 대한 이해의 정도가 낮아서 일정한 패턴이나 규칙은 어느 정도 찾으나 각뿔수의 일반적인 식(n번째 각뿔수의 식)을 구하는데 어려움이 크다.(C초 지역공동 영재학급 6학년, B교육청부설 영재교육원 6학년) • 입체도형수와 평면도형수와의 관계에 대한 이해가 부족하다.	• 활동2와 활동3의 개선점과 같이 학습 수준에 따라 규칙을 이용하여 일정한 패턴을 구하는 것에 중점을 두어 교수·학습 자료를 재구성하고, 각뿔수의 일반적인 식(n번째 각뿔수의 식) 만들기는 심화활동이나 A대학부설 과학영재교육원 수준의 학생들에 중점을 두고 재구성하여 활용한다. • 입체도형수에 대한 구체적인 자료를 활용하여 패턴이나 구조를 탐구해보는 활동이 필요하다.
활동5	• 도형수들의 관계에 대한 이해 부족으로 인해 새로운 도형수에 대한 창의적인 아이디어가 부족하다.	• 각 활동들의 내용을 수준별로 재구성해서 적용하고, 일반적인 식을 구하는 면에 치중하기 보다는 여러 가지 수학적인 패턴이나 구조, 각 도형수들 간의 관계를 탐구하는데 더 중점을 두고 재구성한다.

2. 2차 현장 적용 결과 분석

가. C1집단에 대한 2차 현장 적용 결과

2C1-1 학생의 경우 활동 1-4에서 각 다각수들의 일반식에서 k각수의 일반식을 구하였고, 또 k각수에서 수 패턴의 규칙을 찾아서 일반식을 구하였다. 2C1-16 학생은 각각의 다각수와 k각수에서 수 패턴을 찾아서 k각수의 일반식을 구하였다.



민준이의 탐구 일지
- 도형 + 도형 수 탐구 -

일시	2008년 11 월 12 일 수요일	탐구 장소	우리 집
	(수내) 초등학교 (6)학년 이름 : 김 민 준		
오늘의 탐구 주제	B. 창의적 산출물 연구 활동 수행하기		
탐구한 내용 및 결과	< 도형 + 도형 수 I > 1. 십자가 수 (4+4+4+4) 2. 오각별 수 (5+3) 3. 혼장 수 (6+4+6)		
알아낸 점	임의의 도형수에서 일반항을 구하는 방법을 알게 되었다		
느낀 점	어떤 도형이든지 도형끼리 연결하면 새로운 도형이 탄생하는데, 그 새로운 도형으로 도형수를 만들 수 있고, 일반식을 구하는 것이 처음에는 어려웠으나 몇 번 해 보니까 쉬워졌다.		
더 알고 싶은 점	도형이 반복되는 프랙탈에서의 도형수도 알고 싶다.		

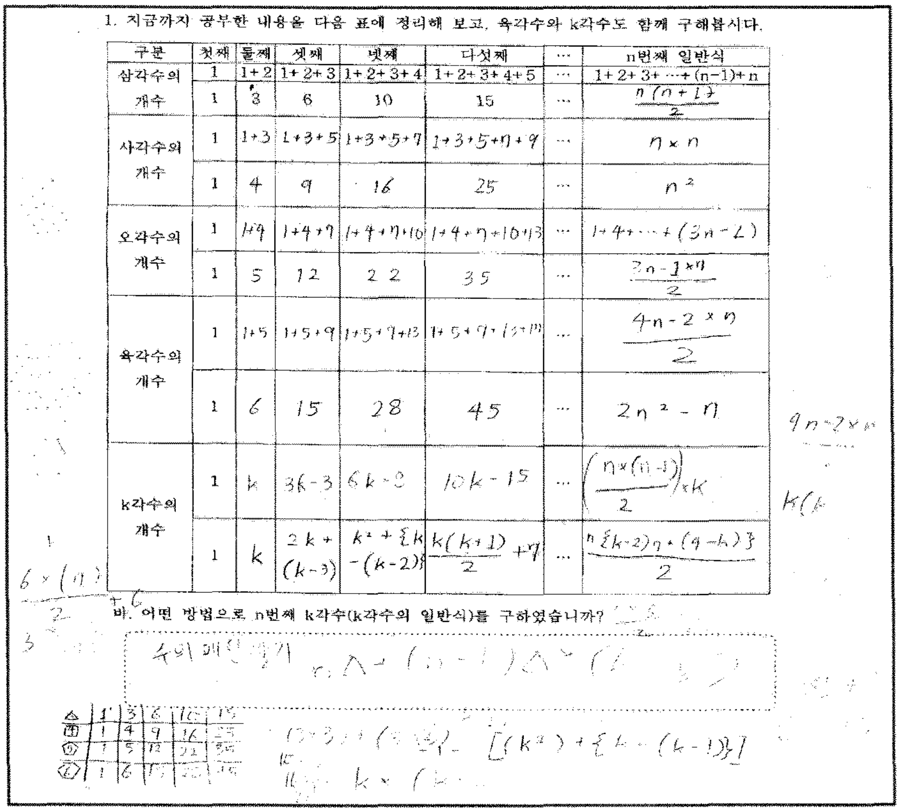
※ 이 탐구 일지를 별도의 파일로 만들어 일지를 쓰든지, 출력하여 연필로 쓰든지 필요한 방법으로 하세요.(10/30~11/13까지 될 수 있으면 매일 매일 작성합니다.)

민준이의 탐구 일지
- 도형 + 도형 수 탐구 -

일시	2008년 11 월 13 일 목요일	탐구 장소	우리 집 · 도서관
	(수내) 초등학교 (6)학년 이름 : 김 민 준		
오늘의 탐구 주제	B. 창의적 산출물 연구 활동 수행하기		
탐구한 내용 및 결과	< 도형 + 도형 수 II > 1. 시어핀스키 체(Sierpinski sieve)와 그것의 확장 도형수 $\cdots\ SS^{(2)}(n) = \frac{3}{2}(3^{n-1}+1)$ 2. 시어핀스키 스폰지(Sierpinski sponge) $\cdots\ SS^{(3)}(n) = 2(4^{n-1}+1)$ 3. 시어핀스키 카페트(Sierpinski carpet) $\cdots\ SC^{(2)}(n) = \frac{11}{70}\cdot 8^{n}+\frac{8}{15}\cdot 3^{n}+\cdots$ 4. 코흐 눈송이 수 $KS^{(2)}(n) = \frac{4}{5}\cdot 9^{n-2}+\frac{3}{10}\cdot 4^{n-1}+1$		
알아낸 점	프랙탈에서도 도형수가 이루어진다.		
느낀 점	프랙탈의 수에 대응하여 규칙성, 일반식이 있는 도형이라는 것을 발견해서 기뻤다.		
더 알고 싶은 점	또 다른 도형수는 어떤 것이 있을까?		

※ 이 탐구 일지를 별도의 파일로 만들어 일지를 쓰든지, 출력하여 연필로 쓰든지 필요한 방법으로 하세요.(10/30~11/13까지 될 수 있으면 매일 매일 작성합니다.)

[그림 14] 1A1-7(6)의 창의적 산출물



1. 지금까지 공부한 내용을 다음 표에 정리해 보고, 육각수와 k각수도 함께 구해봅시다.

구분	첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째	…	n번째 일반식
삼각수의 개수	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5	…	1+2+3+ …+(n-1)+n
	1	3	6	10	15	…	$\frac{n(n+1)}{2}$
사각수의 개수	1	1+3	1+3+5	1+3+5+7	1+3+5+7+9	…	$n \times n$
	1	4	9	16	25	…	n^2
오각수의 개수	1	1+4	1+4+7	1+4+7+10	1+4+7+10+13	…	$1+4+\cdots+(3n-2)$
	1	5	12	22	35	…	$\frac{3n-1\times n}{2}$
육각수의 개수	1	1+5	1+5+9	1+5+9+13	1+5+9+13+17	…	$\frac{4n-2\times n}{2}$
	1	6	15	28	45	…	$2n^2-n$
k각수의 개수	1	k	3k-3	6k-8	10k-15	…	$\left(\frac{n\times(n-1)}{2}\right)\times k$
	1	k	2k+(k-3)	$k^2+\{k-(k-2)\}$	$\frac{k(k+1)}{2}+7$	…	$\frac{n\{(k-2)n+(4-k)\}}{2}$

바. 어떤 방법으로 n번째 k각수(k각수의 일반식)를 구하였습니까?

수의 배열 보기 $n\triangle+(n-1)\triangle\times(k-2)$

$(1+3)+(3\times2)$ $[(k^2)+\{k-(k-1)\}]$

[그림 15] 2C1-16의 다각수

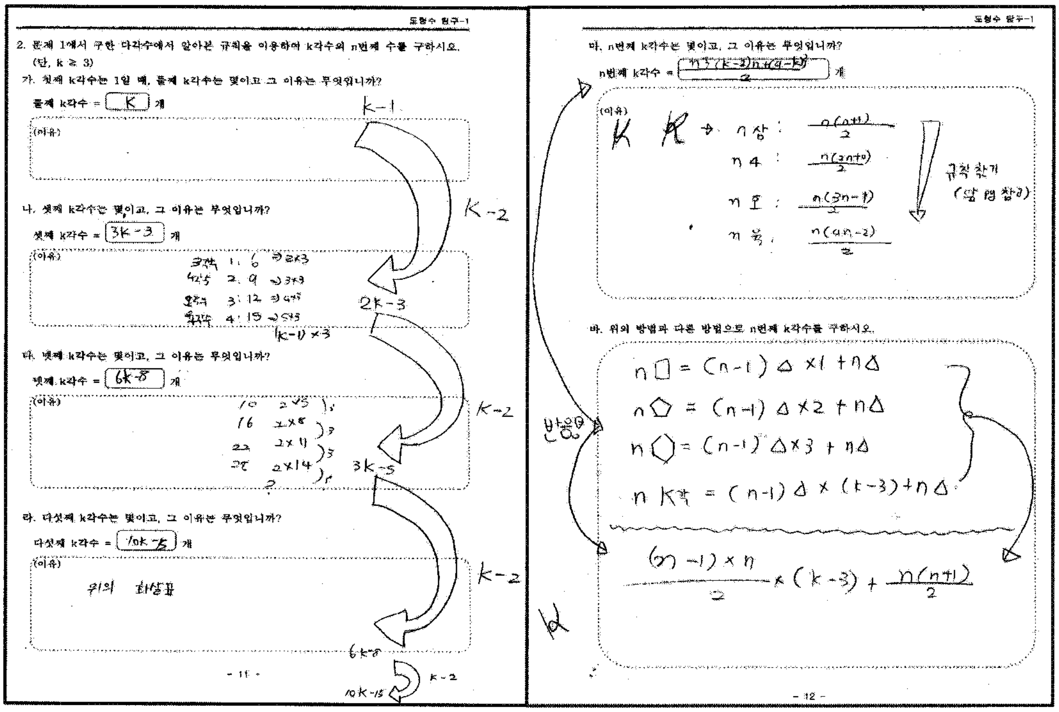
(예화5)

T　　: 너는 어떻게 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

2C1-16: 저는 삼각수, 사각수, 오각수, 육각수의 일반식에서 수의 패턴을 찾아서 구했습니다. 삼각수는 $\frac{n(n+1)}{2}$이고, 사각수는 $n^2=\frac{n(2n)}{2}$이고, 오각수는 $\frac{n(3n-1)}{2}$이고, 육각수는 $\frac{n(4n-2)}{2}$이므로 k각수는 $\frac{\{n(k-2)n+(4-k)\}}{2}$입니다. 다른 방법으로는 n번째 k각수는 n번째 삼각수와 n-1번째 삼각수가 (k-3)개 있으므로 n번째 삼각수와 n-1번째 삼각수의 일반식을 구하여 계산하면 됩니다.

나. B1집단에 대한 2차 현장 적용 결과

2B1-3 학생의 경우 활동 1-4. k각수 알아보기를 해결하는 과정에서 순환적 관계 인식(G1)과 문제 상황의 구조 인식(G3)을 통해 일반식을 구하였다.



[그림 16] 2B1-3의 다각수 알아보기

(예화6)

T　　: 너는 어떻게 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

2B1-3: 삼각수에서 n번째 늘어나는 수는 n이고, 사각수는 2n-1이고, 오각수는 3n-2, 육각수는 4n-3이므로 k각수에서 n번째 늘어나는 수는 (k-2)n+3-k입니다. 또 첫째 k각수가 1이고, 둘째 k각수가 k-1, 셋째 k각수가 2k-3, 넷째 k각수가 3k-5이므로 k각수는 k-2씩 일정하게 늘어나므로 k각수의 일반식은 1+(k-1)+(2k-3)+⋯+(k-2)n+3-k = $\frac{\{n(k-2)n+(4-k)\}}{2}$ 로 구할 수 있습니다.

T　　: 또 다른 방법으로 구할 수 없을까?

2B1-3: 다음과 같이 다각수들과 삼각수들이 관계가 되므로 k각수를 구할 수 있습니다.

n번째 사각수=n번째 삼각수+(n-1)번째 삼각수

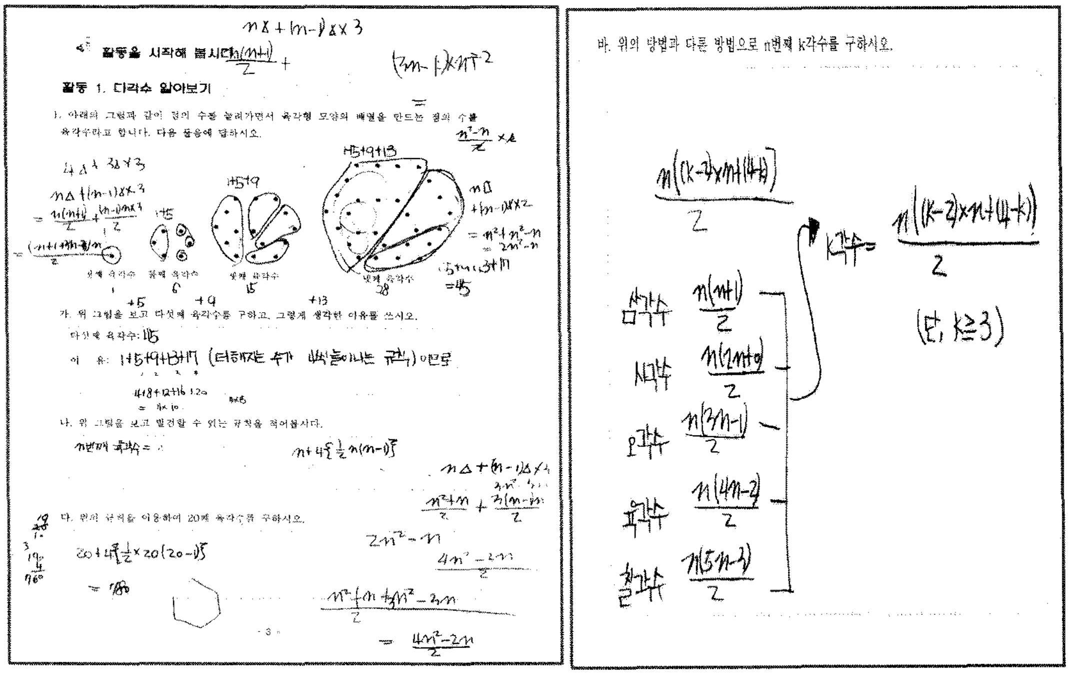
n번째 오각수=n번째 삼각수+(n-1)번째 삼각수×2

n번째 육각수=n번째 삼각수+(n-1)번째 삼각수×3

n번째 k각수=n번째 삼각수+(n-1)번째 삼각수×4

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \times (k-3) = \frac{\{n(k-2)n+(4-k)\}}{2}$$

다. A3집단에 대한 2차 현장 적용 결과



[그림 17] 2A3-2(6)의 다각수 알아보기

(예화7)

T : 너는 어떻게 k각수의 n번째 수(일반식)를 구했니?

2A3-2 : n번째 삼각수: 1+2+3+⋯+n이고, n번째 사각수: 1+3+5+⋯+(2n-1), n번째 오각수: 1+4+7+⋯+(3n-2), n번째 육각수: 1+5+9+⋯+(4n-3)이므로 n번째 k각수는 1+(k-1)+(2k-3)+⋯ +{(k-2)n+3-k}= $\frac{\{n(k-2)n+(4-k)\}}{2}$ 입니다.

창의적 산출물의 경우 2명 모두 기존 학습 내용을 발전시킨 내용의 산출물을 발표하였다. 구체적인 예로 2A3-1(5) 학생은 정다면체수의 면마다 뿔을 나오게 한 뿔정다면체수를 탐구하였고, 2A3-2(6) 학생은 준정다면체수를 탐구하였다.

라. 2차 현장 적용 자료의 문제점과 개선점

2차 현장 적용 후 발견된 문제점과 그에 대한 개선점을 정리하면 <표 5>와 같다.

<표 5> 2차 개발 자료의 문제점과 개선점

구분	활동 내용			문제점	개선점
	A 수준	B 수준	C 수준		
활동1	•육각수를 통해 다각수(k각수) 이해하기	•육각수를 통해 다각수(k각수) 이해하기	•육각수를 통해 다각수(k각수) 이해하기	•A 수준의 학생들이 활동 1을 해결하고 나서 발전적인 사고의 기회가 적다. •C 수준(B 수준 일부)의 학생들에게 k각수의 일반식 구하기가 너무 어렵다.	•A 수준의 학생들이 활동 1을 학습하고 난 후 다각수 관련 문제 만들기나 다각수 및 도형수의 관계 찾기 활동을 포함한다. •C 수준(B 수준 일부)의 학생들에게 k각수의 일반식 구하기에 중점을 두기보다는 다각수들의 관계와 수 패턴에서의 규칙에 중점을 두고 구성한다.
1-1	•과제 안내	-삼각수 알아보기	-삼각수 알아보기		
1-2		-사각수 알아보기	-사각수 알아보기		
1-3		-오각수 알아보기	-오각수 알아보기		
1-4		-k각수 알아보기	-k각수 알아보기		
활동2	•중심 오각수를 통해 중심 다각수(중심 k각수)이해하기	•중심 오각수를 통해 중심 다각수(중심 k각수)이해하기		•A 수준의 학생들이 활동 2를 해결하고 나서 발전적인 사고의 기회가 적다.	•A 수준의 학생들이 활동 2을 학습하고 난 후 중심 다각수 관련 문제 만들기나 다각수 및 도형수의 관계 찾기 활동을 포함한다.
2-1	•주제 선정	-중심 삼각수 알아보기	-중심 삼각수 알아보기		
2-2		-중심 사각수 알아보기	-중심 사각수 알아보기		
2-3		-중심 k각수 알아보기	-중심 k각수 알아보기		
2-4	•그림으로 알아보는 여러 가지 수들의 합	•그림으로 알아보는 여러 가지 수들의 합	•그림으로 알아보는 여러 가지 수들의 합		
활동3	•오각뿔수를 통해 각뿔수(k각뿔수) 이해하기	•오각뿔수를 통해 각뿔수(k각뿔수) 이해하기		•C 수준(B 수준 일부)의 학생들에게 k각수의 일반식 구하기가 너무 어렵다.	•C 수준(B 수준 일부)의 학생들에게 k각뿔수의 일반식 구하기에 중점을 두기보다는 수학교구를 활용하여 각뿔수와 도형수들의 관계와 수 패턴에서의 규칙에 중점을 두고 구성한다.
3-1	•탐구 계획	-삼각뿔수 알아보기	-삼각뿔수 알아보기		
3-2		-사각뿔수 알아보기	-사각뿔수 알아보기		
활동4	•프로젝트 수행 -산출물 제작 -발표 및 토론 -산출물 재구성 -발표 및 평가	•활동 평가	•활동 평가	•A 수준의 학생들에게 창의적 산출물을 만들 시간적인 여유가 부족하다.	•탐구 기간을 장기적인 프로젝트로 계획하여 활동하도록 하고, 그렇게 할 수 없는 경우에는 팀별 연구나 개별 연구 활동으로 구성한다.

3. 최종 수정된 교수 · 학습 자료

두 번의 현장 적용 후 발견된 문제점과 그에 대한 개선점을 통해 최종 수정된 교수 · 학습 자료의 주요 활동 내용과 유의할 점은 <표 6>과 같다.

<표 6> 최종 수정된 교수·학습 자료의 주요 활동 내용 및 유의할 점

구분 (C수준)	활동 내용			비고(유의할 점)
	A 수준	B 수준	C 수준	
활동1	• 육각수를 통해 다각수(k각수)이해하기	• 육각수를 통해 다각수(k각수)이해하기	• 육각수를 통해 다각수(k각수)이해하기	• 활동1은 A, B, C 수준의 학생 구분을 위한 진단평가이다. • A 수준의 학생들에게는 활동1의 내용을 학습한 후 과제 안내를 한다. • B 수준과 C 수준의 차이점: B수준은 다각수의 일반식을 알고 나서 k각수를 탐구하고, C수준은 다각수의 일반식을 탐구하되 k각수의 일반식 구하기를 강조하지 않는다.
1-1 (1-1-1)	• 과제 안내	-삼각수 알아보기	-삼각수 알아보기	
1-2 (1-2-1)		-사각수 알아보기	-사각수 알아보기	
1-3 (1-3-1)		-오각수 알아보기	-오각수 알아보기	
1-4 (1-4-1)		-k각수 알아보기	-다각수 알아보기	
활동2	• 중심 오각수를 통해 중심 다각수(중심 k각수)이해하기	• 중심 오각수를 통해 중심 다각수(중심 k각수)이해하기		• A 수준의 학생들은 활동 2를 학습 한 후 창의적 산출물 주제 선정을 한다. • B 수준과 C 수준의 차이점: B수준은 중심 다각수의 일반식을 알고 나서 중심 k각수를 탐구하고, C수준은 중심 다각수의 일반식을 탐구하되 중심 k각수의 일반식 구하기를 강조하지 않는다.
2-1 (2-1-1)	• 주제 선정	-중심 삼각수 알아보기	-중심 삼각수 알아보기	
2-2 (2-2-1)		-중심 사각수 알아보기	-중심 사각수 알아보기	
2-3 (2-3-1)		-중심 k각수 알아보기	-중심 다각수 알아보기	
2-4	• 그림으로 알아보는 여러 가지 수의 합	• 그림으로 알아보는 여러 가지 수의 합	• 그림으로 알아보는 여러 가지 수의 합	
활동3	• 오각뿔수를 통해 각뿔수(k각뿔수) 이해하기	• 오각뿔수를 통해 각뿔수(k각뿔수) 이해하기		• A 수준의 학생들은 활동 3을 학습 한 후 창의적 산출물 탐구 계획을 세운다. • B 수준과 C 수준의 차이점: B수준은 각뿔수의 일반식을 알고 나서 k각뿔수를 탐구하고, C수준은 각뿔수의 일반식을 탐구하되 k각뿔수의 일반식 구하기를 강조하지 않는다. • B, C 수준의 학생들이 각뿔수를 구조적으로 이해하도록 교구를 활용한다.
3-1 (3-1-1)	• 탐구 계획	-삼각뿔수 알아보기	-삼각뿔수 알아보기	
3-2 (3-2-1)		-사각뿔수 알아보기	-사각뿔수 알아보기	
(3-3-1)			-오각뿔수 알아보기	
활동4	• 프로젝트 수행 -산출물 제작 -발표 및 토론 -산출물 재구성 -발표 및 평가	• 활동 평가	• 활동 평가	• A 수준의 학생들은 창의적 산출물 제작 및 발표, 토론, 재구성, 평가를 실시한다. • B 수준과 C 수준의 학생들은 활동 전반에 대한 평가를 실시한다.

V. 결 론

본 연구는 도형수와 관련된 과제를 수준이 다른 여러 영재 집단에 적용하여 창의적 산출물 제작을 위한 수준별 교수·학습 자료를 개발하고 그 자료를 실제 수업에 적용한 사례를 분석하였다. 이를 통해 수준별 교수·학습 자료를 개발하는 과정과 방법, 그리고 수준별로 탐구할 수 있는 도형수의 내용 범위를 탐색해 보았다. 이를 통해 다음을 확인할 수 있었다.

첫째, 도형수 과제는 초등수학영재 집단의 수준에 비추어 다양한 내용으로 구성하기에 적합한 수학적 맥락이 풍부한 소재였다. 지역공동 영재학급, 교육청부설 영재교육원, 대학부설과학영재교육원 등의 수준별 영재집단 간에 도형수 과제에 대한 반응 특성에는 여러 가지 다양한 답변을 통해 집단간 사고 수준의 차이를 확인할 수 있었다.

둘째, 초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 수학 영재 교수·학습 자료 개발은 수학 영재교육이 추구하는 목표면, 내용면, 방법면, 가치면에서 의미있는 요소들을 추출하고 확인할 수 있었다. 목표면으로는 수학 영재들이 가지고 있는 잠재적인 수학적 능력을 최대한 발휘할 수 있도록 도와줌으로써 학생들 각자의 수준에 맞는 수학적 힘을 양성하여 창조적 지식의 생산자 육성하기, 내용면에서는 삼각수나 사각수와 같이 기본적인 이해에서 다각수의 일반식, 평면도형수와 입체도형수의 관계, 4차원 도형수까지의 확장과 같이 수학적 깊이 및 발전가능성을 통해 방법적 지식을 획득하기, 방법면에서는 기존의 수학적 지식을 바탕으로 다양한 학습 결과를 보여주고 자기 주도적으로 탐구하면서 다양한 재발명 및 재구성의 기회 제공하기, 가치면에서는 영재학생들이 도형수 과제와 함께 수준별 교수·학습 자료로부터 수학화 활동을 통해 학습하고자 하는 수학을 구성하고 활용한 내용을 바탕으로 교사의 안내에 의해 학생 스스로 수학을 재창조하기가 가능함을 확인할 수 있었다.

셋째, 수준별 교수·학습 자료를 개발하는 과정에서 자료의 내용, 방법, 교사의 역할의 측면 등을 고려하여 교수·학습 자료의 원형에 따른 실제 자료를 개발하였다. 본 연구에서 사용한 도형수 과제는 수준별 수학 영재 교수·학습 자료 개발의 절차 모형이나 수준별 교수·학습 자료의 원형도 현장 적용을 통해 교수·학습 자료 개발의 준거에 따라 검증하고 수정한 것이다. 이 자료들로 두 차례(1차 4집단, 2차 3집단)의 현장 적용을 실시하면서 수준별로 다양하게 적용할 필요를 확인하면서 수차례 수정을 거듭하였다. 이처럼 자료의 내용은 반드시 현장 적용과 관찰 및 분석을 통해 수정해 나가야 함을 알 수 있었다. 특히, 교사의 관찰과 학생들의 포트폴리오 분석을 통해 수준별 교수·학습 자료의 개발 준거에 따른 타당성과 원형에서의 오류와 활용 가능성을 검증하고, 교수·학습 자료를 적용하는데 따른 여러 가지 문제점과 개선점을 찾아내어 보완할 수 있었다.

초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 수학 영재 교수·학습 자료를 개발하고 현장 적용하여 얻은 시사점은 다음과 같다.

첫째, 수준별 영재 집단 간에는 수나 문자, 기호나 관계를 조작하고 일반화시키는 능력의 차이가 있으므로 수준별 교수·학습 자료를 개발할 필요가 있다.

둘째, 수준별 수학영재 교수·학습 자료로서 유의미한 소재가 되려면 과제는 단편적으로 연결된 문제 상황이 아니라 치밀하고 구조적으로 조직되어야 하며, 수학적 사고(유추적 사고, 일반화 사고, 발전적 사고, 통합적 사고 등)의 본질을 추구하는 내용으로 구성되어야 한다. 그래야 고차원적인 수학적 사고를 체계적으로 경험할 수 있다.

셋째, 주어진 과제에 대해서 규칙을 이해하고 패턴을 찾아서 일반화를 시킬 능력이 되지 않는 수준의 학생에게는 지나치게 고차원적인 수학적 능력과 창의적인 산출물을 기대해서는 안 된다.

넷째, 보다 나은 교수·학습 자료를 만들기 위해서는 현장 적용과 관찰, 분석, 검증을 통해 지속적으로 수정해 나가야 한다. 수학적 사고 수준이 높다고 해서 무조건 어려운 내용을 제시하거나 수학적인 내용과는 무관하게 학생들의 흥미나 관심이 있는 내용에만 초점을 맞추지 않도록 수준별 수학영재 교수·학습 자료 개발의 절차에 따라 계속적인 현장 적용과 검증, 피드백이 필요하다.

참 고 문 헌

강숙희 외 (2000). **영재 교수·학습 자료 개발 연구- 초·중 영재학교/영재학급용-**. 한국교육개발원 수탁연구 CR2000-15. 한국교육개발원.

경기도교육청 (2009). **영재교육 실무편람**. 영재교육 장학자료. 경기도교육청 과학산업과.

김민정, 이경화, 송상헌 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **대한수학교육학회지 <학교수학>, 10**(1), 23-41.

김양권 (2009). **초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수·학습 자료 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

김지영 (2002). **창의성 신장을 위한 초등학교 수학 영재 학급용 프로그램 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

남승인 (1998). 초등학교 수학 영재 지도 방안에 관한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 2**(1), 41-59.

박교식 (2004). **도형에 대응시킨 수**. 서울: 경문사.

박은정 (2006). **능력별 집단에 따른 수학영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구**. 경인교육대학교 석사학위논문.

송상헌 (1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구**. 서울대학교대학원 박사학위논문.

송상헌 (2006). **수학 영재의 판별과 선발**. (주) 학문출판.

송상헌 (2008). 초등수학 영재교육프로그램 개발방향 및 사례지도. **제6기 영재교육 담당 교원 심화연수 교재**, 3-35. 한국교육개발원.

우정호 외 (2008). **프로이덴탈의 수학교육론**. 서울: 경문사.

이경화 (2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. **대한수학교육학회지<수학교육학연구>, 13**(3), 365-382.

최종현 (2004). **주제 탐구형 수학 영재 교수·학습 자료 개발에 관한 연구**. 경인교육대학교대학원 석사학위논문.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* The University of Chicago Press.

<Abstract>

A Study on the Process of Teaching · Learning Materials Development According to the Level in the Figurate Number Tasks for Elementary Math Gifted Students

Kim, Yang Gwon[7]; & Song, Sang Hun[8]

The purpose of this study at gifted students' solving ability of the given study task by using all knowledge and tools which encompass mathematical contents and curriculums, and developing the teaching · learning materials of gifted students in accordance with their level which can enhance their mathematical thinking ability and develop creative idea. With these considerations in mind, this paper sought for the standard and procedures of teaching · learning materials development according to the levels for the education of the mathematically gifted students. presented the procedure model of material development, produced teaching · learning methods according to levels in the task of figurate number, and developed prototypes and examples of teaching · learning materials for the mathematically gifted students.

Based on the prototype of teaching · learning materials for the gifted students in mathematics in accordance with their level, this research developed the materials for students and materials for teachers, and performed the modification and complement of material through the field application and verification. It confirmed various solving processes and mathematical thinking levels by analyzing the figurate number tasks. This result will contribute to solving the study task by using all knowledge and tools of mathematical contents and curriculums that encompass various mathematically gifted students, and provide the direction of the learning contents and teaching · learning materials which can promote the development of mathematically gifted students.

Keywords: mathematically gifted students, the figurate number, teaching · learning materials, generalization

논문접수: 2010. 10. 17
논문심사: 2010. 10. 29
게재확정: 2010. 11. 15

7) agsarang@dreamwiz.com
8) song2343@hanmail.net