한국초등수학교육학회지 14(3) 681-700.
2010. 12. 31
Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(3) 681-700.
December 31. 2010.

초등학교 수학교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형 분석

조영준[1] · 신항균[2]

최근 수학적 의사소통에 대한 중요성이 강조됨에 따라, 수학적 의사소통이라는 것이 초등 수학교실에서 어떻게 이루어지고 있으며, 수학적 사고와 관련하여 바람직한 수학적 의사소통 유형이 무엇인지 알아보는데 연구 목적을 두고 있다. 수학적 의사소통의 유형을 IRE형, 깔때기형(funnel pattern), 초점형(focus pattern)으로 나누었고, 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고와의 관계를 알아보고자 인지하기(recognize), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)으로 나누어 살펴보았다. 초등 수학교실에서 나타나는 수학적 의사소통의 유형은 IRE형, 깔때기형, 초점형이 나타나는데, 그 발생정도는 교사의 수업 방식에 영향을 받고 있었으며, 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고수준은 그 유형에 따라 수학적 사고의 수준이 영향을 받는다. 따라서 수학적 사고 수준과 관련된 바람직한 수학적 의사소통 유형의 수학적 사고 수준을 높게 일으키는 유형이다. 수학적 의사소통은 교사와 학생의 활발한 상호작용의 발생 빈도보다는 수학적 사고를 높이게 할 수 있는 수학적 의사소통이 필요하다. 이런 부분에서 수학적 의사소통은 학생들의 수학적 사고를 높일 수 있는 수학적 의사소통인 초점형 의사소통을 통해 초등 수학 교실에서 나아가야 할 바람직한 수학적 의사소통 유형이다.

[주제어] 수학적 의사소통 유형, 수학적 사고 수준

Ⅰ. 서 론

수학교실의 언어와 의사소통은 최근 많은 논의가 되고 있는 주제이다. 이는 수학교육자들이 이전에 관심을 가지고 있지 않았다는 것이 아니라, 의사소통 보다는 언어에 보다 초점을 두고 있었다는 것이다. 이전에는 개인 학생의 인지적 과정이 각광을 받아왔으나, 이제는 사회 문화적인 면이나 교실에서 교사와 학생 간에 구성되는 수학적 의미의 출현적 특성에 관심을 갖고 있다.

NCTM의 규준(1989)에 의하면 수학 수업은 학생들의 문제해결과 의사소통, 추론 능력을 신장시키고, 수학에 대한 긍정적인 태도를 기르는 데 초점이 맞추어져야 한다. 교사와 학생, 학생과 학생의 의사소통을 통하여 '수학 할(do mathematics)' 것을 강조하였다. '수학한다.'라는 말이 생경하지만 음악을 한다와 같은 맥락의 의미이다.

수학과 음악을 비교하여 그 뜻을 자세히 알아보면, 수학처럼 음악도 재즈, 클래식, 록

1) [제1저자] 서울 신영초등학교
2) [교신저자] 서울교육대학교 수학교육과

또는 기악, 성악 등 다양한 분야가 있다. 또, 음악에도 음표, 빠르기, 음자리표 등 정보를 기록한 기호 체계와 작곡에 대한 이론 등이 있다. 그러나 음악에 대한 그런 기호를 배우는 것은 음악을 한다고 하지 않는다. 음악을 한다는 것은 오직 음악을 행동으로 표현하였을 때를 의미한다. 마찬가지로 수학에서도 수학적인 개념이나, 원리, 해결방법 등을 배울 수 있지만 수학을 하는 것이 아니다. 수학을 한다는 것은 문제를 해결하고, 추상하고, 창의적으로 생각하고, 자신의 주장이 타당함을 증명하는 것 등을 의미한다(Romberg, 1992, p.6).

'듣기만 한 것은 잊어버리고 (I hear and I forget), 본 것은 기억되지만 (I see and I remember), 해 본 것은 이해할 수 있다 (I do and I understand).' 마리아 몬테소리 여사의 말로써 듣고 본 것보다 좋은 것이 바로 직접해보는 것이다. "I Do" 학습의 주체자인 학생이 수학을 한다고 적용해보고 싶은 문구이다. 이제는 교실 수업 상황에서 "I Do"는 교사와 학생, 학생과 학생 사이의 적극적인 의사소통을 통해 학생들의 사고 과정의 변화와 발전되는 모습을 발견해야 할 것이다.

2007년에 고시된 개정 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2008)은 수학과 총괄 목표에 "수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러"와 같이 명시함으로써 학교 수학에서의 수학적 의사소통의 중요성을 좀 더 부각시키고 있다. 이와 관련하여 수학과 교수 · 학습 방법과 평가에 있어서도 학생들의 수학적 표현의 이해, 수학적 아이디어의 설명과 표현 및 다른 사람과의 의사소통, 수학학습에 있어 수학적 의사소통의 중요성에 대해 유의하고 합리적으로 평가할 것을 제안하였다.

우리나라 수학 수업에서는 여전히 교사 주도의 설명식 수업이 주를 이루고 있고, 그로 인해 수학 수업에서의 의사소통이 간과되고 있다. 수학적 의사소통 수업의 운영에 있어 그 필요성이나 효율성에 대한 인식은 높은 편이나 교사들이 실제로 수업에서 구현하는데 어려움을 느끼고 있다(이종희, 김선희, 2002; 이해영, 2005).

외형적으로는 교사와 학생, 학생 상호 간의 수학적 의사소통이 활발한 것으로 보이는 수업이지만 수학적 사고나 의사소통의 질적 측면이 부족한 경향이 있는 것으로 나타났다(방정숙, 정희진, 2006). 이는 기존의 교과서와 지도서에 수학적 의사소통을 이끌기 위한 구체적인 활동이나 교수 · 학습 방법의 제시 없이 교사의 역량에 따라 수업을 진행하도록 하는데 원인이 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 Mehan(1979)에 의해 연구되었던 단방향적인 의사소통인 IRE형, Wood (1994)의 의사소통 유형(pattern)에 따른 깔때기형 패턴과 초점형 패턴으로 나눈 수학 수업의 수학적 의사소통에 대한 이론적 근거를 바탕으로 수학교실에서 일어나는 수학적 의사소통에 관한 연구를 실시하고자 한다. 이러한 수학적 의사소통이 초등수학교실에서 학생들의 수학적 사고와 어떤 관련이 있는지를 Wood, Williams, McNeal(2006)의 수학적 사고 분석틀을 이용하여 분석한다. 초등 수학교실에서 나타나는 수학적 의사소통 유형이 어떤 것이 이루어지고 있으며, 그에 따른 수학적 사고가 어떻게 일어나는지 알아보고, 수학적 사고에 비추어 바람직한 수학적 의사소통 유형은 어떻게 이루어져야하는지에 대한 연구가 필요하겠다.

Ⅱ. 이론적 배경

수학적 의사소통 유형은 본 연구에서 IRE형, 깔때기 유형(funnel pattern), 초점형 유형

(focus pattern)으로 구분하였다. 수학적 사고 유형은 Wood, Williams, McNeal(2006)이 수업의 담화를 중심으로 만든 분석틀에서 크게 인지하기(recognizing), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)로 나누어 설명하였다.

1. 수학적 의사소통 유형

전통적인 질의 응답방식인 IRE형은 단 반향적인 의사소통 유형이다. 즉, 교사의 질문(I : teacher initiation), 학생의 대답(R : student reply), 교사의 평가(E : teacher evaluation)로 이루어진다. 깔때기 유형(funnel pattern)은 유도 패턴이라고 불리는 의사소통의 유형이다. 교사는 모호한 과제를 제시하고 학생들은 서로 다른 답과 해결책을 제시한다.

이 단계에서 학생들은 능력에 따라서 다양하고 자발적인 분석과 발견을 하도록 자극받는다. 학생들의 답이 매우 다양할 때, 교사는 학생들에게 하나의 특정한 논의와 해결책으로 안내한다. 이러한 방법이 학생들을 도와줄 것이라 믿으면서, 교사는 질문하고 이로부터 학생들의 지식을 이끌어내기 시작한다. 이 단계는 소크라테스의 문답식 교수법에 대응된다. 교사와 학생은 그 동안 일어난 일을 반성하고 평가한다. 초점형 유형(focusing pattern)은 토론식패턴이라고 불리는 의사소통 유형이다.

학생들은 소그룹 활동을 통한 문제를 해결하고, 교사는 학생들에게 설명하도록 요구한다. 학생들은 문제 해결책을 제시하고 설명한다. 교사는 좀 더 생각해 볼 문제, 힌트를 제시하여 학생들로 하여금 설명하도록 하고, 공동으로 설명과 해결책을 제시하면 타당한 것으로 간주한다. 교사는 나머지 학생들에게 다른 방법으로 풀었는지 물어보고, 첫 번째 단계부터 다시 지도한다.

2. 수학적 사고 유형

수학적 사고에 대한 연구는 그 동안 많이 있었으나 수학적 사고에 대해 명확하게 사용하는 공통적인 정의를 찾기는 어렵다. 우선 강완과 백석윤(1998)은 수학적 사고를 수학적 문제 상황을 해결하기 위한 사고라고 정의하고 있다. 수학의 각 내용 영역과 관련시켜 집합적인 사고, 함수적 사고, 도형적 사고, 통계적 사고 등으로 세분하여 설명한다. 또한 수학의 특징 내용과 관계없이 기능 측면에서 구별할 때는 논리적 사고, 추상화, 일반화, 연역적 사고, 귀납적 사고, 유비적 사고 등으로 구별하기도 한다.

Williams(2000)는 수학적 사고를 수학적 아이디어의 추상화와 일반화를 포함하는 지적 활동으로 정의하고, 학생들이 수학문제를 해결할 때 사용하는 인지 활동의 위계를 개발하기 위해서 인지적 복잡성(cognitive complexity)을 체계적으로 분류하기 위해 틀을 만들었다. 여기서 사용된 인지 활동이 이해하기, 적용하기, 분석하기, 종합-분석하기(synthetic-analyzing), 평가-분석하기(evaluative-analyzing), 종합하기, 평가하기이다.

이러한 위계는 수학적 지식의 구성은 추상화와 일반화의 인지과정에서 일어나는 세 가지 관찰 가능한 인식행동(epistemic actions), 즉, 인지하기(recognizing), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)로 이루어진다는 Dreyfus, Hershkowita, Schwarz(2001)의 연구를 바탕으로 보다 정교화된다. Williams의 위계는 특정한 유형의 수학적 사고를 관찰 가능한 인식행동과 연결했다는 점에서 의의가 있다.

한편, Wood, Williams, McNeal(2006)은 개별적인 인지 활동을 연구하기 위해서 개발된 Williams의 위계를 보다 확장하여 면담과 같은 특정상황에서 개개 학생들의 사고를 관찰하는 수준을 넘어서서 학생들이 모둠이나 전체 학급 토론과 같은 상황에서 표현하는 수학

적 사고를 고려했다. 이러한 확장은 교실에서 일어나는 상호작용의 패턴과 학생들이 표현된 수학적 사고 간의 관계를 탐색할 수 있는 수단을 제공한다는 측면에서 본 연구와 관련된다.

<표 1> Wood, Williams, McNeal(2006)의 수학적 사고 유형

<table>
<tr><td rowspan="2">인지하기
(Recognize)</td><td>이해하기
(comprehending)</td><td>· 배운 아이디어나 알고 있는 전략을 바탕으로 개념을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>적용하기
(applying)</td><td>· 알고 있는 수학적 아이디어를 언제 사용할지 알고 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">형성하기
(Building-with)</td><td>분석하기
(analyzing)</td><td>· 새로운 상황에서 알고 있는 수학적 절차를 적용한다.
· 유사한 문제를 이용하여 해결한다.
· 수 예시를 이용하여 문제를 친숙하게 한다.
· 수를 나타내는 결과와 패턴을 찾는 것을 체계화한다.</td></tr>
<tr><td>종합-적용하기
(synthetic-analyzing)</td><td>· 두 가지 서로 다른 방법을 비교와 대조한다.
· 다양한 표현, 조작, 설명을 상호 연결한다.
· 문제를 해결하는데 한 가지 이상의 방법을 사용한다.
· '작은 발견'이라 할 수 있는 독자적인 일반화를 제시한다.
· 새로운 규칙을 만들기 위한 유도원칙을 형성하거나 한 경우를 분석한다.</td></tr>
<tr><td>평가-분석하기
(evaluative-analyzing)</td><td>· 토론에서 문제 해결방법의 장단점을 상호 연결한다.
· 정당화를 위해 아이디어를 모은다.
· 방법 혹은 결과가 정당한지, 효과적인지, 세련된 것인지를 평가한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">구성하기
(Constructing)</td><td>종합하기
(synthesizing)</td><td>· 발견된 패턴을 설명하기 위해 수학적 논쟁을 명확히 말한다.
· 문제의 해답을 찾기보다는 많은 사고방식으로부터 문제를 탐구한다.
· 새로운 생각이나 아이디어로부터 만들어진 개념을 통합한다.
· 새로운 아이디어나 생각을 계속적으로 전개하여 문제를 탐구한다.</td></tr>
<tr><td>평가하기
(evaluating)</td><td>· 점차 일관성 없는 정보를 인지하고 보다 세련된 해결책을 찾는 목적으로 상황을 전체적으로 반성한다.
· 다른 상황에 적용할 수 있는지 못하는지를 문제 해결과정에서 반성한다.
· 향후 개발된 문제 해결 방법이 수학적 해결절차에 적용 가능한지를 반성한다.</td></tr>
</table>

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 초등학교 수학 교실에서 일어나는 수학적 의사소통에 대한 유형을 분석하고자 초등학교 3개 학급을 선정하였다. 표본 선정에 어떠한 의도된 표본은 없으며, 단지 경력, 지역과 전공심화과정이 다른 교사의 학급을 선정하였다. 이렇게 선정된 교실을 바탕으로 초등 5학년 2개 차시의 수업을 전사(transcript)하여 다음과 같이 연구를 진행하였다.

1. 연구 대상

연구의 목적이 초등학교 수학교실에서 일어나는 수학적 의사소통 유형에 대한 것을 알기 위하여 본 연구에서는 의도된 표본을 선정을 하지 않았다. 그러나, 본 연구를 위하여 표본의 다양성을 위하여 3개 학급의 학교와 대상자의 경력, 전공심화를 다르게 선정하여 연구 대상자를 선정하였다. 지속적인 수업관찰이 가능하고, 허락을 한 3개의 학급의 교사를 A, B, C로 나누어 교사와 학생이 수학 교실에서 일어나는 의사소통 유형에 대한 분석을 하였다. 본 연구의 수업 교사의 지역, 경력, 성별은 <표 2>와 같다.

<표 2> 연구 대상 교실의 수업자

교사	근무지	비고
A	서울○○초등학교	'가'구 소재 11년차 여교사
B	서울○○초등학교	'나'구 소재 02년차 여교사
C	서울○○초등학교	'다'구 소재 25년차 여교사

A교사의 학교는 '가'구에 위치하고 있는 학교이다. 전반적으로 전형적인 주택 밀집지역이며, 아파트에서 거주하는 학생들은 20-30%에 불과하다. 학부모의 경제적 수준은 중하위에 해당되며, 대부분 생계를 위해 맞벌이는 하는 가정이 80%에 이른다. 학생들의 학습준비에 대한 관심이 조금 부족한 풍토인 지역이며, 학업성적에 대한 관심은 그리 높지 않은 것으로 나타났다. A교사 학교의 5학년 학생들의 경우 학원의 경우 평균 1곳 정도 다니고 있으며, 보통 학교에서 시행하는 '방과 후 교육 시설'[3]을 이용하는 경우가 대부분이다.

전체적으로 선행 학습에 대한 부분은 없는 상태이며, 학부모뿐만 아니라 학생들의 경우도 학습에 대한 의욕도 많이 떨어지는 지역이다. A교사의 학교는 전체 29학급 중에서 5학년이 5학급으로 운영되고 있다. A교사의 경우 교육경력이 11년이 된 여교사이며, 대학에서 초등 미술을 전공하고, 대학원에서 영재교육 석사를 하였으며, 현재까지 지역교육청 영재교육원에서 수학을 가르치고 있다. 또한, 교실 수업개선을 위한 연구대회도 참여 하는 등 학교 수업에 대한 개선을 위해 평소 노력을 많이 하고 있다.

B교사의 학교는 '나'구에 위치하고 있으며, 학구 자체가 오래전에 뉴타운 지역으로 건물이 노후화 되어 있고, 해마다 학급 수가 줄어들고 있는 실정이다. 학교는 올해 신축건물이 완공된 상태이며, 전체 29학급 중에서 5학급이 5학년에서 운영 중이다. 이 지역 또한 낙후지역으로서 크게 아파트 지역 학생들과 주택지역 거주로 나누어진다.

교육적 환경은 A교사의 학교에 비해 조금 나은 편이나, B교사의 학교도 '좋은 학교 만들기 자원학교'[4]로서 학부모들의 경제적 수준은 그리 높지 않다. 20%의 학생들은 학원을 통해 선행학습이 되어 있으며, 나머지 80%의 학생은 선행학습보다는 학습준비도 비미한 상태라고 할 수 있다. B교사의 경우 대학에서 초등 수학을 심화 전공하였으며, 이제 교육경력이 2년 된 신규 여교사이다. 수학 교육에 대한 관심과 열의가 많으며, 평소 교실 수업개선에 대한 노력을 많이 하고 있다.

C교사의 학교는 '다'구에 위치하고 있으며, 학부모들의 경제적 수준은 중간정도이며, 교육적 관심과 열의가 높은 편이다. 학부모의 70% 정도가 맞벌이를 하고 있으며, 학교 활동

3) 방과 후 교육시설: 단위 학교에서 학원 수강료보다 저렴한 가격으로 학생들에게 제공하는 프로그램.
4) 좋은 학교 만들기 자원학교: 저소득 계층의 자녀가 많이 다니는 학교에 교육청에서 예산을 타학교에 비해 많이 투자해 교육의 질적 서비스를 향상시키기 위해 지정한 학교.

에 적극적으로 참여하는 편이며, 학생들의 학업 성적 향상에 대해서도 높은 관심을 가지고 있다. 학생들은 평균 2곳을 학원에 다니고 있으며, 전체 50%이상의 학생들이 선행학습이 되어 있는 상태이다.

전체 30학급 중에서 5학년이 5학급으로 운영되고 있다. C교사의 경우 교육 경력이 25년 된 여교사로서 교육대학에서 초등사회교육을 심화과정으로 전공하였다. 학급 경영을 잘하는 편이여서 후배 교사들의 귀감이 될 정도로 열의와 열정이 있는 교사이다. 수학과 관련된 어떠한 활동을 하지 않았으며, 교실에서 학생들에게 학습에 대한 열의를 가지고 있다. 3학급의 중에서 비교적 수학과 관련 없는 학급이다.

2. 연구 내용 및 절차

본 연구를 위해 수업 전사(transcript)를 통해 각 차시별 세 학급 교사의 수업을 분석하고자 한다. 동일 단원 동일 차시의 수업을 위해 5학년 수학 수업으로 한정하였으며, 수업 내용은 아래 표와 같다.

<표 3> 연구 적용 수업 내용

단원명	차시	학습주제	수업자
6. 넓이와 무게	1차시	사다리꼴의 넓이를 알아봅시다.	A교사 B교사 C교사
8. 문제푸는방법찾기	1차시	문제 푸는 방법을 비교하여 봅시다.	

5학년 교실을 선정한 이유는 수업촬영을 허락해주신 수업자의 학년이 5학년인 것도 있다. 학생 자신의 생각과 사고를 어느 정도 논리적으로 표현할 수 있고, 수업 참여에 대한 열의가 높을 것이라는 생각에서 5학년을 선정하였다. 연구에 적용할 수업 주제의 경우 5학년 나 단계 6단원 넓이와 무게의 사다리꼴의 넓이 알아보기는 다양한 수업 형태가 나올 수 있는 부분이다. 단순히 설명식 수업이 진행 할 수 있는 부분도 있고, 탐구학습을 통해 넓이에 대한 이해로 접근이 가능할 수 도 있고, 학생들과 상호작용 활동을 통해 넓이를 알아볼 수 있는 부분이다.

8단원의 문제해결 방법찾기는 설명식 수업의 교사주도, 문제에 대한 해결책을 교사의 의도에 따라 알려주는 방법, 다양한 문제해결 전략을 찾고 다양한 의사소통을 통한 방법이 나올 수 있는 부분이다. 이에 따라 2개의 차시를 선정하여 각 교실에서 교사의 수업이 어떻게 이루어지며, 수학교실에서 일어나는 의사소통 유형을 알아보기 적합하여 다음과 같이 연구 수업에 적용하였다.

연구 절차는 다음과 같이 진행되었다. 초등학교 수학 교실에서 교사와 학생들의 수학적 의사소통이 어떻게 이루어지는지를 분석하기 위해 세 교사의 수업을 2번씩 수업내용을 촬영하여 전사하였다. 수업전사 내용을 바탕으로 수학교실에서의 수학적 의사소통 유형별 발생빈도가 어떻게 나타나고, 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고의 유형이 어떻게 다른지 살펴본다.

수업전사 내용을 바탕으로 총 6개의 수업을 에피소드별로 나누어 A, B, C교사로 구분하여 에피소드별 수학적 의사소통 유형을 살펴본다. 수학적 의사소통 유형은 크게 IRE형, 깔때기형, 초점형으로 나누었다. 각 수업 장면의 에피소드를 세 가지 유형의 수학적 의사소통 유형으로 나누어 분류하여 그 발생빈도를 알아본다.

수학적 사고 유형은 Wood, Williams, McNeal(2006)의 수학적 사고 분석틀을 바탕으로 수업의 에피소드에 나타난 수학적 사고 유형의 단계를 구분지어 분석한다. 여기서 수학적 의사소통 유형과의 관계를 살펴보기 위해서 IRE형, 깔데기형, 초점형에서 나타나는 수학적 사고 발달 단계와의 연관성을 통해 바람직한 수학적 의사소통 유형에 대한 방향을 찾아본다.

3. 자료분석 및 수집

초등학교 5학년 세 학급에서 수학 5학년 나 단계에서 2개의 단원을 선택하였으며, 세부 차시 내용으로는 6단원 넓이와 무게에서 사다리꼴 넓이 구하기, 8단원 문제 푸는 방법 찾기에서 문제 푸는 방법 비교하기를 선택하였다. 6단원의 사다리꼴 넓이는 단순히 교사 주도적 설명식 수업이 진행 될 수도 있다. 교사의 문제해결 전략의 소개로 유사문제를 해결하는 수업, 다양한 해결방법을 찾아보고 학생중심의 수업이 진행될 수 있는 개연성이 있기 때문에 단원 차시를 선정하였다. 8단원은 수학에서 규칙성과 함수 영역은 수학 학습의 기초가 되어 수학 전 영역의 토대가 되나 '문제 푸는 방법 찾기' 단원의 경우학생들이 어려워하는 부분이다. 문제해결전략이 한 가지만 있는 것이 아닌 여러 가지 방법이 있어서 다양한 전략에 대해 비교, 대조해보는 등의 논의가 활발히 일어날 수 있어 교사와 학생 간의 수학적 의사소통을 살펴보기 적합하다고 판단하였다.

3개 학급에서 2차시의 수업을 관찰하고 전체 6개의 수업전사 내용을 바탕으로 자료를 수집하였다. 동일한 차시의 수업을 비교하는 이유는 수업의 흐름과 교사의 역할 행동 및 그에 따른 학생의 활동을 좀 더 분명하게 비교 분석하기 위함이었다. 또한 되도록 평소와 유사한 지도 형태를 유지하도록 했으며 연구에 대해 학생들에게 어떤 강조나 특별한 설명 등도 삼가도록 하였다. 교사와 학생 전체를 중심으로 수업 과정을 녹화하기 위해 교실 뒤편에 한 대의 캠코더를 설치하였다. 캠코더의 위치는 항상 동일한 위치에서 촬영하였다. 그것은 수업에 대한 항상성 유지를 위한 방편이었다. 수업 관찰을 통한 6차시의 촬영 자료는 추후에 전사(transcript)를 만들어 분석의 기초로 삼았다.

자료의 분석은 비디오 녹화를 통한 6차시 분량의 수업은 먼저, 수학교실에서 일어나는 수학적 의사소통 유형별 분석을 하였다. 수학교실에서 일어나는 수학적 의사소통의 유형을 IRE형, 초점형, 깔때기형 3가지로 나누어 보았다. 이것은 Wood(1994)의 이론에 따라 의사소통 유형을 나누어 분석하였다. 3가지 수학적 의사소통 유형을 바탕으로 수학교실에서 일어나는 수학적 의사소통 유형의 발생 빈도가 어떻게 일어나는지 알아보기 위해서 각 반별로 빈도수를 조사하고 각각 백분율로 나타내었다. 초등 수학 교실에서 나타나는 수학적 의사소통의 유형을 알아보기 위해 세 교실의 수학적 의사소통 유형에 나타난 전체 에피소드에 차지하는 빈도를 알아보았다.

다음은 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고 유형이 어떻게 일어나는지 알아보기 위해서 6차시 분량의 수업을 에피소드별로 나누어 분석하였다. Williams(2000)는 수학적 사고를 수학적 아이디어의 추상화와 일반화를 포함하는 지적 활동으로 정의한다. 학생들이 수학문제를 해결할 때 사용하는 인지 활동의 위계를 개발하기 위해서 인지적 복잡성(cognitive complexity)을 체계적으로 분류하기 위해 틀을 만들었다. 여기서 사용된 인지 활동이 이해하기, 적용하기, 분석하기, 종합-분석하기(synthetic-analyzing), 평가-분석하기(evaluative-analyzing), 종합하기, 평가하기이다. 이러한 위계는 수학적 지식의 구성은 추상화와 일반화의 인지과정에서 일어나는 세 가지 관찰 가능한 인식행동(epistemic actions),

즉, 인지하기(recognizing), 형성하기(building-with), 구성하기(constructing)로 이루어진다.

IRE형, 초점형, 깔때기형과 같은 수학적 의사소통 유형으로 구분 지어진 수업 에피소드별로 나타나는 수학적 사고 유형을 분석한다. 한편, Wood, Williams, Wood, Williams, McNeal(2006)은 개별적인 인지 활동을 연구하기 위해서 개발된 Williams의 위계를 보다 확장하여 면담과 같은 특정상황에서 개개 학생들의 사고를 관찰하는 수준을 넘어서서 학생들이 모둠이나 전체 학급 토론과 같은 상황에서 표현하는 수학적 사고를 고려했다. 이러한 확장은 교실에서 일어나는 상호작용의 패턴과 학생들이 표현된 수학적 사고 간의 관계를 탐색할 수 있는 수단을 제공하였다. 인지하기(이해, 적용), 형성하기(분석, 종합-분석, 종합-적용, 평가-적용), 구성하기(종합, 평가)의 순으로 수학적 사고의 단계가 높은 단계로 표현하였다.

Ⅳ. 연구 결과

동영상으로 녹화된 수업을 분석한 결과를 A, B, C교실별로 나타난 수학적 의사소통 유형을 분석하였다. 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고 수준의 정도는 각 교실에서 발생빈도가 높은 유형을 중심으로 분석하였다. 이렇게 하여 A교실 초점형, B교실 IRE형, C교실 깔때기형을 중심으로 수업 에피소드를 분석하였다.

1. 초등 수학교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형

가. A교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형 분석

수학 5-나 단계 6단원의 사다리꼴 넓이를 알아보는 수업에서 교사는 사다리꼴의 넓이에 대한 공식이 어떻게 도출된 것인지에 대한 논점을 두고 수업을 이끌어나간다. 사다리꼴 넓이 구하는 공식을 적용하여 문제를 해결하는 수업보다는 기존에 학습한 사각형, 삼각형, 평행사변형의 넓이를 구하는 방법을 이용하여 사다리꼴의 넓이 공식을 이끌어 내려는 수업을 하였다. 8단원의 문제 푸는 방법 찾기에서는 문제를 해결하는 방법적 적용을 한 가지 방법보다는 다양한 해결방법을 찾아보려고 노력하는 수업을 하였으며, 가능하면 다양한 학생들의 수업참여를 유도하는 수업을 이끌어갔다.

전반적인 수업의 흐름은 교사보다는 학생들에게 참여를 많이 시키려는 수업을 지향하였으며, 기존의 질의 응답방식인 IRE형 의사소통보다는 깔때기형이나 초점형 의사소통이 주를 이루는 수업이었다. A-6의 에피소드는 총 20개이고, A-8의 에피소드는 9개이다. A교실의 총 에피소드는 29개로 분류하였으며, 각 에피소드별 의사소통 유형은 다음과 같이 나타난다.

<표 4> A-6 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
A-6-1		○		A-6-11		○	
A-6-2		○		A-6-12		○	
A-6-3			○	A-6-13			○
A-6-4		○		A-6-14		○	
A-6-5	○			A-6-15		○	

A-6-6		○		A-6-16			○
A-6-7	○			A-6-17			○
A-6-8		○		A-6-18			○
A-6-9			○	A-6-19	○		
A-6-10		○		A-6-20	○		

<표 5> A-8 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
A-8-1		○		A-8-6	○		
A-8-2		○		A-8-7	○		
A-8-3			○	A-8-8	○		
A-8-4			○	A-8-9		○	
A-8-5	○						

A교실의 수학적 의사소통 유형을 살펴본 결과 전체 29개의 에피소드에서 IRE형 의사소통은 8번 발생하여 전체 27.5%, 깔때기형은 13번 발생하여 전체 45%, 초점형은 8번 27.5% 발생한 것으로 나타났다. 전반적으로 깔때기형이 45%차지하는 가운데 초점형의 비중도 27.5%를 차지하는 수학적 의사소통 수업형태를 보이고 있다.

나. B교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형 분석

수업에 있어서 판서를 많이 하는 편이다. 사다리꼴의 넓이를 알아보는 수업에 있어서 사다리꼴의 넓이는 평행사변형의 넓이를 이용하여 구하려고 하는 교사의 의도가 있었으며, 이러한 의도된 전략에 의해서 수업이 진행되었다.

문제 푸는 방법 알아보기에서는 다양한 해결전략에 대한 탐구를 수업에 적용하려고 하였으며, 교사가 직접 새로운 전략에 대한 소개도 해준 수업이었다. 전반적으로 교사의 의도가 수업에 깔려 있어서, IRE형과 깔때기형이 주를 이룬 수업 형태였으며, 교사의 수업 위주가 된 수학 수업이었다. B-6의 에피소드는 총 16개이고, B-8의 에피소드는 11개이다. B교실의 총 에피소드는 27개로 분류하였으며, 각 에피소드별 의사소통 유형은 다음과 같이 나타난다.

<표 6> B-6 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
B-6-1	○			B-6-9	○		
B-6-2		○		B-6-10		○	
B-6-3	○			B-6-11	○		
B-6-4		○		B-6-12	○		
B-6-5			○	B-6-13	○		
B-6-6	○			B-6-14		○	
B-6-7		○		B-6-15	○		
B-6-8			○	B-6-16	○		

<표 7> B-8 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
B-8-1	○			B-8-7			○
B-8-2		○		B-8-8		○	
B-8-3		○		B-8-9	○		
B-8-4		○		B-8-10	○		
B-8-5		○		B-8-11	○		
B-8-6	○						

B교실의 수학적 의사소통 유형을 살펴본 결과 전체 27개의 에피소드에서 IRE형 의사소통은 14번 발생하여 전체 52%, 깔때기형은 10번 발생하여 전체 37%, 초점형은 3번 11%발생한 것으로 나타났다. 전반적으로 B교실에서는 IRE형 단방향적인 의사소통 유형의 수업이 52%이었으며, 초점형의 수업형태는 11%에 지나지 않음을 보여주고 있다.

다. C교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형 분석

전반적인 수업의 흐름에 있어서 학생들의 참여가 저조한 편이며, 그로인해 교사의 빠른 질의응답 방식이 자주 나오는 수업흐름이 되는 것을 알 수 있다. 사다리꼴의 넓이를 알아보는 수업에서 전시학습에 대한 넓이에 대한 학습 확인을 많이 하였다. 단위 넓이를 이용한 넓이의 불편함을 이용하여 사다리꼴의 넓이를 구하는 학습의 흐름을 유지하였다.

문제 푸는 방법 찾기 수업에서 해답보다는 다양한 해결책의 중요성을 강조하였으며, 다양한 해결책에 대한 해답은 부족한 듯하였다. 학습지에 대한 이해 부족한 학생들도 있어서 학습지에 대한 안내부분이 단위 수업에 차지하는 비중도 무시할 수 없었다. 전체적으로 수업에 대한 교사의 의도된 수업이었으며, 학생들의 반응보다는 조금 빠른 교사의 답변이 있는 수업이다. C-6의 에피소드는 총 24개이고, C-8의 에피소드는 15개이다. C교실의 총 에피소드는 39개로 분류하였으며, 각 에피소드별 수학적 의사소통 유형은 다음과 같이 나타난다.

<표 8> C-6 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
C-6-1	○			C-6-13		○	
C-6-2		○		C-6-14			○
C-6-3		○		C-6-15			○
C-6-4	○			C-6-16	○		
C-6-5	○			C-6-17		○	
C-6-6	○			C-6-18		○	
C-6-7	○			C-6-19	○		
C-6-8	○			C-6-20		○	
C-6-9	○			C-6-21		○	
C-6-10		○		C-6-22	○		
C-6-11	○			C-6-23		○	
C-6-12	○			C-6-24		○	

<표 9> C-8 수업의 에피소드별 의사소통 유형

에피소드	의사소통유형			에피소드	의사소통유형		
	IRE형	깔때기형	초점형		IRE형	깔때기형	초점형
C-8-1		○		C-8-9	○		
C-8-2	○			C-8-10			○
C-8-3		○		C-8-11	○		
C-8-4		○		C-8-12	○		
C-8-5		○		C-8-13			○
C-8-6		○		C-8-14			○
C-8-7			○	C-8-15		○	
C-8-8		○					

C교실의 의사소통 유형을 살펴본 결과 전체 39개의 에피소드에서 IRE형 의사소통은 16번 발생하여 전체 41%, 깔때기형은 17번 발생하여 전체 44%, 초점형은 6번 15%발생한 것으로 나타났다. 전반적으로 C교실에서의 의사소통 수업형태는 IRE형과 깔때기형이 공통적으로 40%정도이고, 두 의사소통의 유형을 합하면 전체 의사소통 유형의 80%가 조금 넘는다는 것으로 나타났다.

2. 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고수준 분석

세 교실의 수업을 분석한 결과를 바탕으로 해당 교실에서 수학적 의사소통 유형의 빈도수가 많은 대표적인 에피소드 별로 나누어 살펴보았고, A교실에서는 초점형이, B교실에서는 IRE형이, C교실에서는 깔때기형을 중심으로 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고수준에 대한 결과 분석을 하였다.

가. IRE형에 따른 수학적 사고 수준 (B교실)

문제 해결 방법 찾기에서 표를 이용하여 문제를 해결하는 과정에서 세발자전거와 두발자전거의 바퀴 수를 이용하여 자전거의 개수를 구하는 문제로써 다음은 교사와 학생간의 문제해결과정의 일부분이다.

T: 여러분이 표를 다 작성해보았는데요, 같이 한번 해볼 거예요.(칠판에 판서하면서)
T: 간단하게 3줄로 할게요, 자, 두발 자전거가 여기 25부터 되어있는데요, 저기에 있는 자료를 보기 좋게 정리하는 거라고 했죠? 그러니까 두발 자전거가 20대일 때, 세발자전거는 30대, 20이면 바퀴 수는 40개 30개면 90개, 합은 130개. 21일면?
S: 29.
T: 29예요, 21일 때 두발이요 곱셈 안 해도 구할 수 있죠?
S: 네.
T: 두발자전거가 20대일 때 바퀴가 40개가 필요해요. 20대에서 21대로 두발자전거가 몇 대 늘어났죠?
S: 1대.
T: 1대 늘었났으면 바퀴는 몇 개 늘어났다?

S: 2개.
T: 40에서 몇 개로?
S: 42.
T: 42요. 여기는 한 대가 줄어들었죠? 그러면 90에서 어떻게 해요?
S: 빼기 3
T: 3을 빼내면 되겠네요. 얼마죠?
S: 87.

두발자전거와 세발자전거의 개수를 찾는 문제이다. 문제를 해결하는 과정에서 세발자전거와 두발자전거의 합이 50이라는 것을 이용하여 교사는 두발자전거가 21이면 세발자전거는 얼마인가라는 질의를 한다.(I) 이에 따라 학생은 50-21은 29라는 것을 생각하고 29라고 답변을 한다.(R) 교사는 학생의 답변이 맞았음을 인식하고(E) 다음 질의를 한다. 두발자전거가 1대 늘어나면 바퀴 수는 몇 개 늘어나는가라는 질의에 학생은 두발이기 때문에 2개씩 늘어남을 알 수 있었다.

전반적으로 학생과 교사는 단방향적인 질의-응답이 이루어지고 있다. 학생은 단지 단순히 자신이 알고 있는 수학적 사실을 이용하여 더하고 빼는 과정을 하고 있다. 이러한 IRE형의 의사소통 수업과정에서는 수학적 사고 유형이 인지하기(Recognize) 수준에 머무른다. 단순히 학생들은 답이 무엇인지 확인하고, 이에 따라 교사는 맞고 틀림을 확인하는 과정이다. 인지하기의 이해부분은 기존에 알고 있는 수학적 개념을 이해하는 부분이며, 이보다 한 단계 높은 적용하기는 배운 지식이나, 알게 된 수학적 개념을 언제 어떻게 사용할지 알고 있다는 것이다.

세발자전거와 두발 자전거의 개수를 구하는 문제에서 보다 다양한 해결방법을 탐구하기 보다는 문제를 풀어가면서 확인하는 단방향적인 의사소통을 통해 학생들의 수학적 사고는 단지 개념을 다시 이해하는 이해하기 수준이다.

나. 깔때기형에 따른 수학적 사고 수준 분석 (C교실)

사다리꼴의 넓이를 구하는 과정에서 삼각형의 넓이를 이용하여 구하려는 과정에서 교사는 먼저 제시된 사다리꼴에 선을 하나 그어 보라고 한다. 사다리꼴이 두 개의 삼각형으로 나누어진 것을 바탕으로 수업이 진행되고 있는 과정이다.

T:자 다시 여기보세요 지금 선생님이 여러분한테 뭐하라고 그랬죠? 우리 지금 사다리꼴을 선 하나를 그어서 몇 개로 만들었어요?
S:2개
T:2개의 도형으로 나누었죠. 삼각형 두 개로. 그리고 뭐하라고 했죠?
S:삼각형의 넓이
T:그래요. 삼각형의 넓이를 이용해서 구하라고 했죠. 물론 단비가 한 게 맞아요. 우리가 최종적으로 공부해야 될 사다리꼴의 넓이 내는 공식으로 한 게 맞아요. 근데 선생님이 원하는 건 공식을 외우는 건 물론 공식을 외우는 것도 중요하지만 더 중요한건 왜 그 공식이 나왔는지 과정을 이해하는가 라고 했죠? 너희들은 사다리꼴의 넓이를 구하려고, 이 숫자 하나를 알려고 하는 게 아니라 넓이를 구하는 방법을 머릿속으로 생각할 줄 알아야 되요. 지금 여러분들 활동 2번하고 있어요. 자 이렇게 나누세요. 그리고 각각의 삼각형의 넓이를 구해보세요. 조희야 식 불러보

세요 식 못 구한 사람들은 식 써넣어 보세요.
S:......
T:지금 뭐의 식을 구하는 거죠? 삼각형 ㄱㄴㄹ과 삼각형 ㄴㄷㄹ 의 넓이를 구하는 거죠. 봐. 얘, 삼각형 넓이 구하고 얘 삼각형 넓이 구해서 더하면 사다리꼴의 넓이 되요, 안 돼요?
S:되요
T:그럼 식 불러보세요
S:11곱하기 5 나누기 2
T:그리고요. 하나의 넓이 됐어요. 지금 구한게 이 삼각형의 넓이죠. 그다음에
S: 6곱하기 5 나누기 2
T:자 이 두 개를 어떻게 해야 되요?
S:더해요
T:그럼 얼마 나와요?
S:42.5
T:42.5. 단위는?
S:제곱센티미터

깔때기형 의사소통은 문제해결의 방법이 다양하게 제시되고 학생들의 활발한 수업참여를 하고 있는 듯, 하지만 그 내면을 자세히 살펴본다면 교사의 의도에 맞춘 질의와 그에 따른 답변을 만들어 가고 있음을 알 수 있다. 교사는 사다리꼴의 넓이를 구할 때 먼저 사다리꼴에 선을 그어서 두 개의 삼각형으로 나누어 보라고 한다. 그리고 사다리꼴의 넓이를 구하려면 어떤 것을 구하면 사다리꼴의 넓이가 되느냐는 질의에 학생들은 삼각형 ㄱㄴㄹ과 삼각형 ㄴㄷㄹ 의 넓이를 합하면 된다고 대답을 한다. 교사는 이러한 답변을 의도하였으며, 다시 다른 학생에게 각각의 삼각형의 넓이가 어떻게 되냐는 질문을 통해 사다리꼴의 넓이는 두 개의 삼각형을 합하는 것이라는 결론을 얻는다.

여기서 수업을 살펴보면, 학생들이 한 활동은 사다리꼴의 넓이를 구하는 활동을 했다기보다는 제시된 사다리꼴에 선을 하나 그어 본 것과, 삼각형 ㄱㄴㄹ과 삼각형 ㄴㄷㄹ 의 넓이를 합하고 더한 활동 밖에 없다. 교사는 처음에 사다리꼴의 넓이 공식을 외우는 것보다는 구하는 방법을 아는 것이 중요하다고 했지만, 정작 학생들이 한 활동은 삼각형의 넓이를 구한 것을 더한 것 밖에 없다. 전형적인 깔때기형 의사소통 유형이다.

교사는 의도된 질문을 하고 교사가 예상하는 답변을 하기를 기다리고 그에 대한 대답이 나올 때까지 계속적인 질문을 던진다. 깔때기에 물이 흘러 내려가는 모습처럼 교사는 점점 자신의 의도된 답변을 얻기 위해 계속적인 질문을 한다. 결국 수업은 교사가 진행하고 있는 것이며, 학생들의 수학적 사고를 일으키기보다는 여기에서 보았듯이, 선을 긋고 삼각형 넓이 구하고 더하는 활동에 지나지 않게 된다. 수학적 사고 유형도 인지하기(Recognize)단계의 적용과정이다. 알고 있는 삼각형 넓이라는 공식을 통해 사다리꼴의 넓이를 구하는 과정에 적용하는 활동을 하고 있는 것이다.

이 수업이 학생들에게 초점형 의사소통을 통해서 수업이 진행된다면, 학생들의 수학적 사고는 더 높은 단계가 될 수 있었을 것이다. 의도된 답변을 기다리기 보다는 제시된 사다리꼴을 통해 어떻게 넓이를 구할 수 있을 지 논의해보고, 선을 긋더라도 학생들이 논의와 사고과정을 통해 이루어져야 했다. 한 가지 방법만이 아닌 사다리꼴을 합쳐 평행사변형으로 만들어보는 다양한 활동을 통해 학생들 스스로 불편함을 느끼고, 더욱 합리적인 방법을

탐색할 수 있는 기회를 제공하고 기다렸어야 한다.

다. 초점형에 따른 수학적 사고 수준 분석 (A교실)

사다리꼴 넓이를 알아보는 수업 중에서 이 전 학습에서 직사각형의 넓이를 구하는 방법을 통해 제시 된 사다리꼴의 넓이를 구하려고 하고 있다. 교사는 학생들에게 어떻게 구하면 될지에 대한 질의를 하고 학생들은 끼워 맞추면 될 것이라는 대답을 하고 직접 단위넓이를 이용하여 몇 개가 끼워지는 확인하면서 어려움을 느낀다. 이에 따라 새로운 방법에 대한 탐구를 하고 있는 부분이다.

T: 그럼 맞추어보면, 여기 있는 것은 이쪽으로 저쪽 것은 이쪽으로....이렇게 해서 구할 수는 있지만, 정확하게 구하기는 어렵고 번거롭죠. 그래서, 이것을 가지고 구하기는 문제가 있을 거예요. 이런 방법 말고 다른 방법이 뭐가 있을까? 그것을 생각해보세요.
S: 사다리꼴 두 개를 붙여서 밑변과 높이를 곱한 다음에 나누기 2를 하면 되요.
T: 네, 훌륭한 생각을 했어요. 결국에 사다리꼴 하나만 가지고는 구하기 어렵다. 그래서 변형을 시켰는데, 그럼, 기홍이가 말한 것을 한번 나와서 설명하여 볼래.
S: (화면에서 사다리꼴을 똑같은 것을 뒤집어 붙인다.)
T: 지금 기홍이가 말한 것처럼 사다리꼴 두 개를 붙였더니 무슨 모양이 되었어요.
S: 평행사변형이요.
T: 평행사변형으로 바뀌었습니다. 여러분 평행사변형의 넓이를 구할 수 있나요?
S: 네
T: 평행사변형의 넓이를 구할 수 있다면 사다리꼴의 넓이도 구할 수 있나?
S: 네
T: 어떻게 구하면 되?
S: 평행사변형은 두 개의 사다리꼴로 된 것이지 때문에 둘로 나누어서 구하면 되요.
T: 그렇죠. 일단 평행사변형의 넓이를 구하면 둘로 나누면 사다리꼴 넓이 하나를 구할 수 있습니다. 일단 하나의 방법이 나왔습니다.

사다리꼴의 넓이를 구하는데 있어서 기존의 방법이 단위 넓이의 개수를 세는 방법으로는 해결 할 수 없다는 것을 알게 된 후, 교사는 새로운 방법에 대한 탐구를 필요로 하였다. 단위넓이의 개수를 찾는 것을 제시한 학생의 방법과는 다른 해결책이 없는지 학생들에게 의견을 제시하고, 한 학생이 사다리꼴을 두 개 겹쳐서 평행사변형으로 만들어 보자고 한다. 이에 따라 교사는 앞에 나와 다른 친구들에게 자신의 해결방법을 설명해 주라고 한다. 자신의 해결방법을 실물화상기를 통해 사다리꼴 두 개를 이용하여 평행사변형을 만든다. 평행사변형은 이 전 학습에 배운 것이기 때문에 이 방법을 통해 사다리꼴의 넓이를 구하는 것은 문제가 되지 않는다. 여기서 교사는 사다리꼴을 평행사변형으로 만들면 끝이냐는 질문을 하고 이에 학생은 두 개의 사다리꼴을 이용하여 넓이를 구하였기 때문에 평행사변형의 넓이에서 둘로 나누어 주면 사다리꼴의 넓이를 구할 수 있다고 답변을 한다.

이 수업 장면에서 교사와 학생은 동등한 위치에서 대화에 참여 하였다. 처음 채워넣기 방법이 틀렸다는 반성적 기회를 학생들에게 직접해보게 하여 다른 해결방법을 또 다른 학생에게 기회를 제공한다. 초점형 의사소통에서 교사는 수업의 주체가 아닌 보조자로서 학생의 수학적 사고를 최대한 끌어올리려는 조력자이다. 사다리꼴 넓이를 구하는데 적절한

설명과 그에 따른 근거를 제시함으로써 다른 학생들에게 정당성을 부여 받는다. 수학적 사고 유형을 살펴보면, 구성하기(Constructing)의 종합하기(synthesizing)에 해당한다.

문제에 대한 해결방법에 대한 반성과 토론도 이루어지고 있으며, 문제의 해답을 찾기보다는 다양한 사고과정을 통해 방법적인 것을 중요시 한다. 또한, 단위넓이를 이용한 것뿐만 아니라, 사다리꼴의 모양 변형을 통해 새로운 방법에 대한 새로운 시도를 계속적으로 탐구하고 있다. 사다리꼴의 넓이를 기존에 배운 평행사변형으로 바꾸어 해결하는 새로운 아이디어를 통해 만들어지니 개념을 통합하고 직접 시도하려고 하는 부분에서 학생들의 수학적 사고가 높은 수준까지 올라간 부분이다.

라. 세 교실에 나타난 수학적 의사소통유형에 따른 수학적 사고 수준

세 교실에서 총 95개의 에피소드별로 분류가 되었으며, 한 교실 당 2차시 수업을 바탕으로 6개의 수업을 분석한 결과 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고 유형은 다음과 같이 나타났다.

<표 10> 세 교실에 나타난 수학적 의사소통유형에 따른 수학적 사고 유형

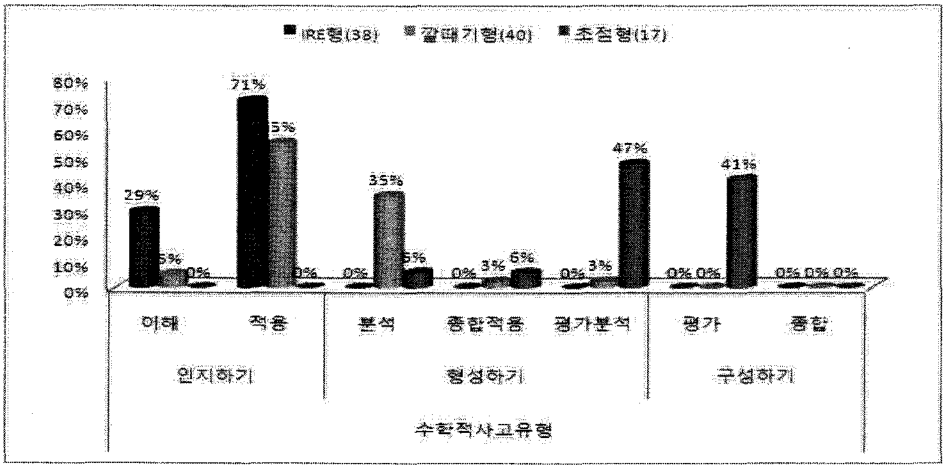
수업	의사소통유형	수학적사고유형						
		인지하기		형성하기			구성하기	
		이해하기	적용하기	분석하기	종합적용하기	평가분석하기	종합하기	평가하기
A교실 (29)	IRE형(8)	2	6	0	0	0	0	0
	깔때기형(13)	0	9	3	1	0	0	0
	초점형(8)	0	0	1	0	4	3	0
B교실 (27)	IRE형(14)	4	10	0	0	0	0	0
	깔때기형(10)	2	3	5	0	0	0	0
	초점형(3)	0	0	0	1	1	1	0
C교실 (39)	IRE형(16)	5	11	0	0	0	0	0
	깔때기형(17)	0	10	6	0	1	0	0
	초점형(6)	0	0	0	0	3	3	0

<표 10>을 살펴보면 의사소통 유형별 수학적 사고가 확연히 나타난다고 볼 수 있다. 먼저, 전통적인 질의-응답 방식의 IRE형은 95개의 에피소드 중에서 40%에 해당하는 38개의 에피소드에서 나타났다. 대부분의 수학적 사고 수준이 인지하기단계의 이해하기와 적용하기에 머문다는 것을 알 수 있다. 두 번째는 깔때기형의 의사소통 유형은 95개의 에피소드 중에서 42%에 해당하는 40개의 에피소드에서 나타났다. 깔때기 유형은 60%정도 인지하기 단계에서 이해와 적용단계에 머무른다는 것을 알 수 있었고, 교사의 발문에 따라 형성하기 단계에 이를 수 있다는 것을 알 수 있다. 그렇지만, 대부분 깔때기 유형 같은 경우에서는 높은 수준의 구성하기 단계의 수학적 사고가 발생하지 않았다. 형성하기 단계의 수학적 사고 수준도 가장 낮은 분석하기 단계에 대부분 일어난다는 것을 확인할 수 있었다.

마지막 초점형의 의사소통 유형을 살펴보면, 전체 95개의 에피소드 중에서 18%에 해당하는 17번이 발생하였다. 수학적 사고 유형을 살펴보면, 초점형 의사소통 같은 경우에서는 수학적 사고 단계가 가장 높은 구성하기 단계에 도달하는 경우가 약 41%있고, 형성하기단

계에서 대부분 가장 높은 평가분석하기에 대부분 차지하는 것으로 나타났다. 초점형 의사소통 유형에서는 수학적 사고 수준의 가장 낮은 인지하기 단계가 나타나지 않았다. 대부분 형성하기의 높은 단계의 수학적 사고와 구성하기에 이르는 것으로 나타났음을 알 수 있다.

수학적 의사소통 유형별 발생하는 수학적 사고 유형을 그래프로 나타낸 결과를 통해 보면 다음과 같은 나타났음을 알 수 있다.



[그림 1] 의사소통 유형에 따른 수학적 사고 유형 발생빈도

IRE형 의사소통유형에서는 수학적 사고 유형이 인지하기(이해)가 29%, 인지하기(적용)이 71%로 나타났다. IRE형의 의사소통 유형에서는 수학적 사고 유형이 형성하기와 구성하기 단계가 나타나지 않음을 알 수 있었다. 깔때기형 의사소통 유형에서는 인지하기단계(이해, 적용)가 60%이고, 형성하기단계(분석, 종합적용, 평가분석)가 40%로 나타났다. 깔때기유형의 의사소통에서도 수학적 사고 유형이 구성하기 단계까지 나타나지 않음을 알 수 있었다. 초점형 의사소통에서는 수학적 사고 유형이 형성하기(분석, 종합적용, 평가분석)에서 59%, 구성하기(평가, 종합)에서 41%로 나타났다. 초점형 의사소통 유형에서는 인지하기 단계는 나타나지 않았으나, 구성하기 단계인 평가부분에서 41%가 나왔음을 알 수 있다.

깔때기형에서는 겉으로 보기에 많은 의사소통이 일어나는 듯하지만, 실제 대부분 인지하기 단계에 있는 것으로 나타났으며, 형성하기의 세부단계에서도 분석하기 단계에 대부분이 차지하는 것으로 나타났다. 초점형 의사소통에서는 구성하기 단계까지 이르게 됨을 알 수 있었고, 형성하기 단계에서도 높은 단계인 평가 분석 단계임을 알 수 있었다. 이에 미루어 보아 앞으로 초등 수학 교실에서 필요한 바람직한 의사소통 유형은 초점형 유형이라고 할 수 있다. 학생들의 다양한 논의와 주체가 되는 초점형 의사소통 수업은 학생들의 수학적 사고를 높은 단계에 이르게 하는 것이다.

Ⅴ. 논 의

초등학교 수학교실에서 나타나는 수학적 의사소통은 본 연구에서 세 교사의 교실을 살펴본 결과 아직까지도 초등 수학교실에서는 단방향적인 의사소통인 IRE형이 40%이상을

차지하고 있었다. 교사의 의도에 따라 질문을 유도하고 교사의 의도된 사고를 하게 하는 깔때기형이 차지하는 비중도 42%가 된다는 것으로 나타났다. 이는 수학교실에서 교사 주도의 수학 수업이 이루어지고 있다는 반증이다. 3개 교실의 6개 수업을 통해 살펴본 결과 전체 수업의 약 18%정도는 초점형이 나타난 것으로 분석되었다. 물론 교실마다 그 정도의 차이는 있지만, 그 수치는 무시할 수 없을 정도의 긍정적인 결과였다고 할 수 있다. 왜냐하면, 단위 수업 전체를 초점형 의사소통으로 수업을 할 수 있는 것이 아니기 때문이다. 수학적 지식과 개념을 알고 수업이 진행되어야 할 수업인 경우 교사의 의도된 방법으로 개념을 형성시키기 위해 수학적 사고를 인지시키고 형성하여야 한다. 하지만, 학생의 수학적 사고를 자극하고 높은 수준으로 이끌 수 있는 수업을 교사에게 필요하다. 그것은 앞서 분석한 수학적 사고에 따른 수학적 사고 수준이 다르기 때문이다.

수업을 전사한 내용을 분석하면서, 초등 수학교실에서 수학적 의사소통은 교사의 발문에 중요한 역할이 있음을 확인할 수 있었다. 무엇으로 시작하는 발문이며, 다음 발문이 어떤 발문이어야 하느냐에 따라 수업 유형이 달라짐을 알 수 있었다. 학생의 답변을 기다리고 인내하는 자세가 필요하다고 할 수 있다. 다음으로는 교사도 수업 중에 많은 사고를 해야 한다는 것이다. 다음 질문을 위해 생각하고, 학생들의 수학적 사고를 일으킬 수 있는 발문에 대한 예측도 해야 한다는 것이다. 이 부분에 대해서는 교사가 보다 많은 연구와 노력이 필요한 부분이라고 할 수 있겠다.

연구 분석결과 대부분 수학적 사고를 높은 단계에까지 이르게 하는 수학적 의사소통 유형은 초점형 의사소통이다. 초점형 같은 경우에 형성하기의 분석단계와 종합분석하기에 있는 경우가 있었으며, 깔때기형이었지만, 형성하기의 높은 수준인 평가분석하기 단계에 있는 경우도 있었다. 물론 분석결과에 나타난 소수이지만, 수업전사를 에피소드별로 묶어 의사소통이 공존하고 있는 부분이 있었다. 에피소드에서 주를 이루는 수학적 의사소통 유형을 통해 분석한 것이지만, 앞의 내용은 논의해 볼만한 부분이다.

깔때기형의 의사소통에서 교사는 예상 답변을 기다린다. 혹은 교사의 예상과 다른 답변이 나왔을 때는 다시 교사가 예상한 답변으로 이끌기 위해 새로운 질문을 던진다. 연구결과의 에피소드 한 부분에서 나타난 것인데, 학생의 다른 다양한 답변을 하지만, 교사는 예상되는 답변이 아닌 다른 답변으로 계속적으로 교사의 의도로 이끌려고 하면서 그 속에서 학생들의 답변 속에서 학생들의 수학적 사고가 토의 되고 있음을 알 수 있었다. 이 부분을 통해 수업은 교사의 역할이 중요하다. 학생들의 다양한 사고의 표현을 통해 수업을 이끌어 가야 한다. 하지만, 교사는 적극적으로 참여하는 학생의 답변은 놓아두고 교사의 예상답변으로 이끌어가는 수업은 자칫, 학생의 수업참여를 저해할 수 있는 부분이다. 대부분의 의사소통 유형에서 IRE형과 깔때기형에서는 높은 수준의 수학적 사고가 나타나지 않는다는 것을 알 수 있었다. 초점형 의사소통을 통해 수학적 지식을 학생들 스스로가 주체가 되고 지식을 구성해 나갈 수 있는 의사소통 유형이 높은 수준의 수학적 사고에 이를 수 있다는 것을 알 수 있었다.

Wood, Williams, McNeal(2006)은 인지하기(이해, 적용), 형성하기(분석, 종합-적용, 평가-분석), 구성하기(종합, 평가)의 순으로 수학적 사고의 단계가 높다고 설명하였다. 수학적 사고 단계의 구성하기(종합, 평가)는 초점형 의사소통에서 발생하는 것으로 연구 자료를 분석한 결과에서 알 수 있다. 분석된 에피소드에서도 나타났듯이 학습의 초점을 학생의 답변에서 수업을 진행하는 수업은 학생들의 수업 참여가 활발하다. 이것은 허용적인 분위기에서 오답에 대한 두려움이 없어져, 학생들의 머리에서 맴도는 사고가 교실에서 표현될 수 있다. 교사는 이러한 사고를 이끌어내어 수업을 함으로써 보다 많은 참여와 높은 단계의

수학적 사고 단계에 이르는 수업이 진행되고 있음을 알 수 있다. 다시 말해, 발견된 패턴을 설명하기 위해 수학적 논쟁을 명확히 말하고, 문제의 해답을 찾기보다는 많은 사고방식으로부터 문제를 탐구한다. 또한, 새로운 생각이나 아이디어로부터 만들어진 개념을 통합하고 새로운 아이디어나 생각을 계속적으로 전개하여 문제를 탐구할 수 있는 초점형 의사소통이 초등 수학교실에서 필요하고, 해야 하는 의사소통 방식이다.

Ⅵ. 결 론

첫째, 초등 수학교실에서 나타나는 수학적 의사소통의 유형은 IRE형, 깔때기형, 초점형이 나타나는데, 그 발생정도는 교사의 수업 방식에 영향을 받는다. 세 교사의 교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형을 보면 IRE형의 경우 수학적 지식과 개념을 설명식으로 수업하는 교실에서 나타났고, 깔때기형의 경우 교사의 의도된 문제해결전략과 알고리즘으로 이끌기 위해 유도된 발문을 하는 교실에서 나타났다. 초점형의 경우는 학생들의 반응에 '왜?'라는 발문을 시작으로 다양한 답변 중에서 다시 논점을 가져가면서 수업을 진행하는 교실에서 나타났다. 이러한 수학적 의사소통 유형은 교사의 경력이 유형 결정에 영향을 미친다는 것을 확인할 수 없고, 학습의 단계와 수학과의 영역에 따라 그 유형이 결정되는 것도 아니지만, 교사의 수업 방식은 수학적 의사소통 유형에 영향을 주고 있다.

둘째, 초등 수학교실에서 나타난 수학적 의사소통 유형에 따른 수학적 사고수준은 그 유형에 따라 수학적 사고의 수준이 영향을 받는다. IRE형의 의사소통 수업의 경우 단순히 교사의 질의에 답변하고 교사의 확인으로는 학생들이 이미 알고 있거나 배운 내용을 바탕으로 개념을 이해하고 적용하는 수학적 사고 단계에 이르게 만 한다. 깔때기형의 의사소통 유형은 겉으로 보기에는 활발한 의사소통이 일어나고 있는 것처럼 보이지만, 그 내면을 살펴보면, 교사의 의도에 따른 답변을 유도하고 그 유도된 답변으로 교사는 학생들에게 예상된 답변을 요구하는 것 밖에 없다. 정작 중요한 수학적 아이디어나 방법적 탐색이 아닌 교사의 방법과 수학적 아이디어에 단순히 답변하는 것에 지나지 않는다. 하지만, 초점형 의사소통 유형의 경우 대부분 수학적 사고 수준이 인지하기 단계를 넘어 형성하기와 구성하기 단계의 높은 수준을 나타내고 있었다. 초점형 의사소통에서는 수업의 주체가 학생에게 있었으며, 교사의 의도된 질문이 아닌 학생들 사이에서 나타난 수학적 아이디어와 내용을 바탕으로 계속적인 방법적 탐색과 개념을 통합해 나가고 있다.

셋째, 수학적 사고 수준에 비추어 바람직한 수학적 의사소통 유형은 수학적 사고 수준을 높게 일으키는 초점형 의사소통 유형이다. 이러한 초점형 의사소통 유형은 수학적 사고 수준이 높은 단계의 형성하기와 구성하기 단계에서 발생하였다. 학생들이 보다 동등한 자격으로 참여할 수 있는 학습상황을 마련하고, 자신의 사고와 다른 학생의 추론을 반성할 수 있는 기회를 제공하여 수업 중 다른 학생과 상호작용하면서 자신의 수학적 아이디어를 설명하고 근거를 제시하는 교실에서 나타난다. 수업 중 학생들에게 인지적 갈등을 일으킬 수 있는 문제 상황과 적절한 비계의 설정이 이러한 초점형 의사소통을 가능하게 한다. 물론 이러한 수학적 의사소통을 위해 초등 수학교실에서 교사의 역할이 매우 중요한 부분이다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤 (1998). **초등수학교육론**. 서울: 동명사.

공희정, 신항균 (2005). 초등학교 수학과 소집단 협동학습에 나타나는 의사소통의 수단 분석. **한국초등수학교육학회지**, 9(2), pp.181-200.

교육과학기술부 (2008). **2007년 개정 초등학교 교육과정 해설**. 교육과학기술부.

김상룡, 박병서 (1999). 초등수학교육에서 의사소통 지도의 실제. **한국수학교육학회. 제8집**, 33-44.

김용성 (2003). 바람직한 유형의 의사소통을 통한 수학적 사고력 신장. **초등교과교육연구**, **4**, 31-50.

방정숙, 정희진 (2006). 학습자 중심 교수법에 대한 초등교사의 이해와 실행형태: 수학적 의사소통을 중심으로. **학습자중심교과교육연구**, 6(1), 297-321.

신준식 (2007). 수학 수업에서 의사소통 분석. **한국수학교육학회**, 10(1), 15-28.

이종희, 김선희 (2002). 수학적 의사소통을 강조한 수학 학습 지도의 효과. **한국수학교육학회**, 41(2), 157-172.

이해영 (2005). **초등학교 5, 6학년 교사들의 수학적 의사소통 수업에 대한 인식과 교수의 실제**. 한국교원대학교 석사학위논문.

조우기, 오영열 (2010). 수학교실에서 교사의 역할에 따른 상호작용 패턴 분석. **한국초등수학교육학회지**, 14(1), pp.1-22.

Dreyfus, Hershkowita, Schwarz (2001). Production and Transformation of Computer Artifacts Toward Construction of Meaning in Mathematics. *MIND CULTURE AND ACTIVITY, 8*(3).

H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, A. Sierpinska (eds.). (1998). *Language and Communication in the mathematics classroom*, pp.30-62. NCTM.

Kamii, C. (1990). Constructivism and Beginning Arithmetic(K-2). In T. J Cooney(Ed.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. NCTM. PP. 22-3O.

Mehan (1979). *Learning lessons : social organization in the classroom* Harvard University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Williams (2000). Collaborative problem solving and discovered complexity. In J. Bana & A. Chapman (Eds.), *Mathematics education beyond 2000 (pp. 656-663)*. Perth, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Wood, T. & Turner-Vorbeck, T. (2001). Extending the conception of mathematics teaching. In T. Wood, B. S. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy(p.185-208)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood (1994). Patterns of interaction and the mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematics classroom(p.149-168)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wood, Williams, McNeal (2006). Children's mathematics thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222-255.

<Abstract>

Analysis of Pattern of Mathematical Interaction Occurring in the Elementary School Mathematics Classrooms

Cho, Young Jun[5]; & Shin, Hang Kyun[6]

These days, the importance of the mathematics interaction is strongly emphasized, which leads to the need of research on how the interaction is being practiced in the math class and what can be the desirable interaction in terms of mathematical thinking. To figure out the correlation between the mathematical interaction patterns and mathematical thinking, it also classifies mathematical thinking levels into the phases of recognizing, building-with and constructing. we can say that there are all of three patterns of the mathematics interactions in the class, and although it seems that the funnel pattern is contributing to active interaction between the students and teachers, it has few positive effects regarding mathematical thinking. In other words, what we need is not the frequency of the interaction but the mathematics interaction that improves students' mathematical thinking. Therefore, we can conclude that it is the focus pattern that is desirable mathematics interaction in the class in the view of mathematical thinking.

Keywords: mathematics interaction, mathematical thinking

논문접수: 2010. 10. 31
논문심사: 2010. 11. 09
게재확정: 2010. 12. 02

5) yjcho00@naver.com
6) hkshin@snue.ac.kr