韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 4호, 2010. 11. 949-974

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 4, Nov. 2010. 949-974

컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 고등학생의 이해에 관한 사례 연구

조 영 주 (계산여자고등학교)
김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)†

본 연구의 목적은 고등학생 6명을 대상으로 교수실험을 통해 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징들을 알아보는 것이다. 본 연구에서는 Drijvers(2003)의 매개변수 개념의 구분에 따라 매개변수 개념을 "자리지기로서의 매개변수", "변하는 양으로서의 매개변수", "미지수로서의 매개변수", "일반화로서의 매개변수"로 세분화하여 컴퓨터 대수 환경에서 각 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해의 특징을 조사하고, 컴퓨터 대수 환경이 각 매개변수의 개념 이해에 어떠한 역할을 하는지에 대해 알아보았다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학교육은 지난 수세기 동안 안정감 속에서도 작은 변화들을 이루어왔다. 20세기 후반 정보통신 산업의 혁명적 발달에 따라 인간의 가치관과 교육에도 일대 전환을 가져왔는데, 작은 변화를 추구해 오던 수학교실에도 큰 변화의 한 주역으로서 테크놀로지가 등장하였다. Kaput(1992)은 수학교육에서 테크놀로지의 역할을 우리의 눈앞에서 내부와 표면에 동시에 작용하는 엄청난 힘을 가진 '새로운 활화산'으로 묘사하였다. CIC(Calculator Information Center at Ohio State University)의 연구자들은 새로운 활화산의 한 봉우리인 계산기가 수학교실에 도입되는 것에 대한 가능성과 동시에 위험에 대해 보고하였고(Parkhurst, 1979), 이 문제는 최근 30년 동안 수학교육의 논쟁의 주제가 되어 왔다. 그 결과 지금은 학생들의 학업 성취의 향상을 위해서 학교에 다양한 자원들이 지원되어야 한다는 인식이 널리 확산되고 있다. TIMSS에서는 수학·과학 수업을 위한 학교 자원의 활용 지수(Index of

---

* 접수일(2010년 9월 10일), 심사(수정)일(1차: 2010년 10월 18일, 2차: 2010년 11월 1일), 게재확정일자(2010년 11월 256일)
* ZDM 분류 : U74
* MSC2000 분류 : 97U70
* 주제어 : 매개변수, 컴퓨터 대수 체계, 이해
† 교신저자임

Availability of School Resource for Mathematics/Science instruction: ASRMI/ASRSI)를 개발하여 학교의 수학·과학 수업에 대한 지원 정도를 파악하였는데, 우리나라의 학교 자원 활용 지수는 '중'으로 나타났으며, 수학·과학에서 모두 국제 평균보다 높았다[1]. 성취도와의 관계를 살펴보면, 국제 결과에서는 학교 자원을 많이 활용할수록 성취도가 높았으나 우리나라에서는 중간 정도일 때 성취도가 가장 높았다. 이는 주입식 교육과 지필환경의 학습에 대한 안정감을 반영하는 것으로 보인다. 하지만 머지않은 시일 내에 테크놀로지는 수학교사와 학생들의 학습 파트너가 될 것이고, 테크놀로지가 없는 수학교실은 상상하기 어려울 것으로 예상된다.

Schoenfeld(1985)는 수학교육에서 수학적 사고의 중심적 역할에 주목하면서, 학생들이 풍부한 자원을 사용하여 융통성 있게 새로운 수학 문제를 효율적으로 풀이할 때 수학적으로 사고하는 방법을 이해하게 된다고 하였다. 수학을 학습하는 풍부한 자원의 하나로 컴퓨터 대수 체계(Computer Algebra System)가 내장된 계산기를 사용하는 컴퓨터 대수 환경을 생각할 수 있다. 계산기는 휴대가 가능하기 때문에 수학을 공부하는 동안 언제든지 사용할 수 있고, 가격도 저렴하기 때문에 중등학교 수업에 적절하다. 또한 강력한 대수적 기능, 그래픽 기능, 수치적 기능의 표상능력을 가진 컴퓨터 대수 체계는 점차적으로 수학을 공부하는 학생들에게 유용한 도구가 되어가고 있다. 또한 컴퓨터 대수 체계와 같은 테크놀로지 기반의 수학교실로 수학적 사고와 관련한 수학 학습의 재배열의 요구가 증가하는 것은 수학 교육의 의미 있는 움직임으로 보여진다.

Furinghetti와 Paolo(1994)는 학생들이 미지수를 하나의 숫자로, 변수를 수의 집합으로, 매개변수를 고정된 점이나 수와 같은 역할을 하는 문자로 인식한다고 지적하였다. 이 과정에서 학생들 대부분은 문자의 역할에 따른 개념적인 이해와 함께 구문론적 조작을 수행해야 하므로 미지수, 변수, 매개변수 사이의 차이를 이해하는 것을 어려워했으며, 특히 매개변수는 문맥에 의존적이고 암묵적인 형태로 의미를 이해하기 때문에 더욱 어려워하는 경향을 보인다고 하였다. 이는 매개변수의 의미와 역할을 제대로 파악하는 것이 변수의 학습에서 중요하게 다루어져야 할 부분이라는 것을 의미한다. 변수의 포괄적인 관점에서 보면 매개변수는 변수에 포함된 하위 개념이다. 우리나라 학교수학에서는 일차함수 $y=a\cdot x+b$ 에서 a, b 등의 매개변수가 특별한 언급 없이 독립변수 x, 종속변수y 등의 변수와 함께 사용되고 있어서, 학생들은 매개변수와 독립변수, 종속변수의 차이를 명확히 이해하고 있지 못하다. 이후 고등학교 수학에서 곡선 및 곡면을 표현하기 위한 수단으로 매개변수가 받아들여지고 있다. 따라서 중학교에서부터 체계적인 매개변수의 개념 지도가 필요하다.

Drijvers(2003)는 매개변수의 개념을 "자리지기로서의 매개변수(Parameter as a Placeholder)", "변하는 양으로서의 매개변수(Parameter as a Changing Quantity)", "미지수로서의 매개변수(Parameter

---

1) 수학·과학 수업을 위한 학교 자원의 활용 지수는 교수관련 자료(예: 교과서), 물품(예: 종이, 연필 등)의 예산, 학교 건물과 운동장, 냉난방 및 조명 시설, 교육 공간 등의 학교 일반 자원에 대한 4점 척도 응답 평균과 수학/과학 수업을 위한 컴퓨터, 컴퓨터 소프트웨어, 계산기, 도서, 시청각 자료, 과학 실험실 장비와 비품 등의 자원이 4점 척도 응답 평균으로 산출된다.

as an unknown)", "일반화로서의 매개변수(Parameter as a Generalizer)"로 구분하고, 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수의 사용이 매개변수의 의미와 역할을 이해하는데 도움이 된다고 하였다. 매개변수 개념에 대한 최근 국내 연구들을 살펴본 결과, 김남희(2004)는 학교현장에서 매개변수 개념의 지도를 위한 교수학적 시사점을 이끌어 내기 위해 매개변수의 개념 정의를 분석하고, 우리나라 수학과 교육과정에서 매개변수가 도입되는 맥락을 외국의 사례와 비교 검토한 바 있다. 이종희(2003)는 학생들이 문제해결을 할 때 매개변수로서의 문자의 의미를 이해하면서 유연하게 변환할 수 있도록 메타인지 사고전략을 활용한 수업 설계 모형인 '자기질문에 의한 자기조정형 수업모형'을 제안하였다. 또한 김성준(2002)은 매개변수의 역할에 대한 역동적인 변화를 다섯 가지 유형[2]으로 분류하였다. 그는 사고에 있어서 역동성을 파악하는 것이 대수적 사고의 핵심이고, 가변성을 통한 역동적 해석은 문제 전체를 볼 수 있는 기회를 제공하고 동시에 문제의 구조를 파악하도록 하는 힘을 기르게 한다고 주장하였다. 따라서 이러한 현실을 개선하기 위해 매개변수의 개념을 구체화하고 매개변수에 대한 학생들의 개념적 이해를 고찰하는 것이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 컴퓨터 대수 환경의 수업 활동에서 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해에 어떤 특징이 있는지 알아보고자 한다. 본 연구에서는 Drijvers(2003)이 분류한 매개변수의 네 가지 개념에 대하여 교수실험을 통해 학생들의 이해 과정을 살펴보고, 학생들의 이해 과정에서 나타난 교수학적 특징들을 알아보는 것으로 한정한다. 다음은 본 연구의 연구문제이다.

1) 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징들은 무엇인가?

본 연구의 목적은 소수의 학생들을 대상으로 사례 연구를 통해 컴퓨터 대수 환경에서 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징들을 기술하는 것이므로 본 연구 결과를 일반화하기는 어렵다. 본 연구의 결과가 컴퓨터 대수 환경에 따라 다소 달라질 수 있는 측면이 있으나, 각 환경에서 매개변수 개념을 다루는 기본 절차나 원리가 유사하므로 연구의 결과는 독립적일 수 있다.

2. 연구의 제한점

본 연구는 인천에 위치한 A고등학교 1학년 학생 6명을 대상으로 한 사례 연구로 본 연구의 결과를 일반화하는데 한계가 있다. 또한 새로운 도구를 사용함으로써 오는 신기효과(Novelty Effect)로 인해 학생들의 수학적 태도가 달라질 수 있음을 배제할 수 없다. 본 연구에서 교수실험에 사용한 문

2) 김성준(2002)은 다음과 같은 다섯가지 매개변수의 역할의 역동적 해석을 제시한다. (1) 매개변수→미지수 (2) 매개변수→미지수 & 변수→매개변수→변수 (3) 매개변수→변수 & 변수→매개변수→변수 (4) 매개변수→상수→매개변수→미지수 (5) 매개변수 혹은 변수

항들은 지필 환경과 컴퓨터 대수 환경에서 학생들이 다르게 해석될 수 있는 부분을 포함하고 있으며, 본 연구는 매개변수의 기능과 계산적 처리 과정의 수직적 수학화를 다루고 있는데 수평적 수학화, 수학적 모델링과 같은 실생활, 타 교과, 타 영역 등 풍부한 맥락을 결합한 폭넓은 연구로 확장될 필요가 있다.

Ⅱ. 이론적 고찰

1. 변수와 매개변수의 역사적 분석

매개변수는 변수에 포함된 하위 개념으로 변수 개념의 역사적 발달에서 매개변수의 기원을 찾아볼 수 있다. Boyer(1968)는 변수 개념의 역사적 발달을 수사적 단계(Rhetorical Stage), 약어 단계(Syncopated Stage), 기호 대수 단계(Symbolic Algebra Stage)의 3단계로 구분하였다.

첫 번째, Diophantus이전 시대에 속하는 수사적 단계(Rhetorical Stage, 대략 A.D. 250년경)는 특정 유형의 문제를 해결하기 위하여 일상적인 언어표현을 사용하였고, 미지수를 표현하기 위해서 특정 부호나 기호의 사용은 하지 않았다. 문제나 해는 자연어로 기술되었다.

두 번째, 약어 단계(Syncopated Stage)는 Diophantus에서부터 16세기 말 Viète까지 지속되었다. Diophantus는 미지수를 표현하기 위해 문자 ζ(제타)를 처음으로 사용하였다. 대수적 활동은 미지수의 수치로 된 값을 구하는 것을 목표로 하였으므로 해는 바로 수치값을 나타내었다. 마침내 다양한 문자가 다양한 변수로 사용되었다. 그러나 매개변수를 사용한 일반적인 해는 아직 나타나지 않았다. Waerden(1983)은 바벨론(Babylonian)의 저서와 Diophantus의 책에서 미지수의 수와 식의 수가 같은 문제를 어떻게 다루었는지를 개략적으로 진술하고 있다. 이것은 유한개의 수치로 된 해를 산출하였다. Diophantus는 임시위치법(Rule of False Position)을 주로 사용하였다. 이것은 일종의 시행착오법(Trial and Improve)으로 해의 어림치에서 출발하는 등분원리에 기초하고 있다. 시행착오법은 어림치 중 하나를 대입하여 먼저 계산하고, 처음의 어림치를 수정하여 다시 시도함으로서 해를 구하는 방법이다. 그러나 Diophantus는 다른 책에서 방정식의 수보다 많은 수의 변수를 가진 체계를 풀이하였다. 그러한 체계는 무한히 많은 수의 해를 가지며, 압축된 방식으로 그 체계를 표현하기 위해 매개변수의 존재가 요구되었다. 소위 이들 방정식의 결정되지 않은 체계가 매개변수의 사용을 알리는 서곡이었다. 약어 단계에서 문제해결 절차는 수치 값으로 적힌 예로 증명되었고, 같은 류의 다른 예에 적용되었다. 13세기에 Jordanus Nemorarius(1225-1260)는 De Numeris Datis라는 책을 출판하였다. 이 책에서 그는 미지수를 나타내기 위해 문자변수를 사용하였지만, 알려진 값에 대해서도 사실상 매개변수인 문자변수를 사용하였다. 이것은 Diophantus의 작업에서 부족했던 일반적인 해에 대한 지평을 연 것이며, 이는 기호 대수로 나아가는 통로가 되었다(Rojano, 1996).

세 번째, 기호 대수 단계(Symbolic Algebra Stage)는 Francois Viète에서 출발한다. Viète는 문자

변수를 주어진 양을 다루기 위해 사용하였다. 국소적 수준보다 더 포괄적인 수준 즉, '변하는 상수(Changing Constants)'로 매개변수가 존재하게 된다. 이것은 일반화와 일반적인 표기법 그리고 매개변수 방정식의 대수적 해를 가능하게 하였다. Viète의 매개변수에 대한 아이디어는 Diophantus가 제시한 각기 다른 문제와 그 해결방법을 일반적인 계산 과학으로 전환시킨 출발점이 되었다.

Viète가 문자의 다양한 역할을 구별한 첫 번째 인물이었다는 점에서 그의 업적은 대수 발달에서 아주 중요하다(Boyer, 1968). 그는 미지의 양을 기호화하는 데는 모음으로 표기하였고, 주어진 수, 즉 자료에 나타나 있거나 주어진 양에 대해서는 자음으로 표기하였다. 이것은 수치값을 알지 못하더라도 매개변수로 표현된 식이 이제 방정식의 해가 될 수 있고, 이를 하위 과정으로 보낼 수 있다는 것이다(Sfard & Linchevski, 1994). 이것은 실체로서, 대상으로서의 공식과 식의 개념을 유도한다. 또한 이것은 대수식과 공식의 실재화를 향한 아주 중요한 단계이다. 한 세대가 지난 후, Descartes는 주어진 양과 알고 있는 양에 대한 문자는 알파벳의 첫 글자부터, 미지의 양은 알파벳의 끝 글자부터 사용하기 시작했고 이것이 지금까지 문자 사용의 관례가 되어오고 있다. 오늘날 사용되고 있는 이차방정식의 일반형인 $ax^2+bx+c=0$이라는 표기법은 Viète의 발상을 토대로 데카르트가 고안한 것이다. Viète의 미지수와 매개변수의 구별, 그의 표기법 그리고 매개변수 방정식의 일반적인 해는 대수 분야의 큰 도약이라고 할 수 있다. Newton, Leibniz 등은 Viète의 업적을 통해, 변수는 역동적으로 변하는 양의 특성을 가지고 있다는 함수적 개념을 발달시킬 수 있었다.

매개변수의 역사적 분석을 통해서 볼 때, 본 연구는 매개변수 개념의 발달 즉, 약어 대수에서 기호 대수로 전환하는 과정에 초점이 맞추어져 있다. 다시 말하면 Diophantus에서 Viète로의 전환이다. 특히 매개변수에 대한 기호화의 발달, 일반해를 표현하는 대상으로서 식의 인식 등 역사적 발달 과정에서 나타난 인식론적 장애들은 학생들이 매개변수의 개념을 이해하는 과정에서 직면하게 될 어려움의 단서가 될 수 있다. 따라서 본 연구에서는 매개변수 개념의 역사적 발달을 학생들이 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 이해 과정에서 부딪치게 될 인지적 장애의 지표로 사용하고자 한다.

2. 변수의 개념

많은 연구자들이 변수 개념의 역할과 의미에 대해 다양한 측면에서 언급하고 있다. Malle(1993)는 변수를 미지수 또는 일반화된 수로서 작용하는 변수의 상황적 측면(Situational Aspect), 자리지기로서 변수를 생각한 대입적 측면(Substitution Aspect), 특정 공식에 따라 조작될 수 있는 의미 없는 대상으로서 계산적 측면(Calculation Aspect)으로 구분하였다. Freudenthal(1983)은 변수를 여러 가지 값으로 해석할 수 있는 다가이름(Polyvalent Names)의 개념으로 생각하였고, 변수를 미지수(Unknown)로서의 변수와 부정소(Undeternined Quantity)로서의 변수로 구별하였다. 다가이름으로서의 변수는 수학적 사고에서 중요한 의미를 가지는 일반화된 공식을 표현하는 수단으로 수학에서 핵심적인 역할을 담당하고 있다. 한편 Kindt(1980)는 변수 개념의 두 측면 즉, 일반화 측면과 동적인

측면을 강조하였다. 그의 일반화 측면의 변수는 Freudenthal의 부정소에 가깝다. 다시 말해 동적인 측면의 변수는 변하는 양이 중요한 요소이지만, Kindt의 학교 대수에서 변수는 정적인 측면을 가지는 경향이 강하며, 동적인 측면에는 관심을 충분히 기울이지 못하고 있다. Sfard와 Linchevski(1994)가 말한 조작적 측면은 변수의 동적인 측면에 해당하고, 일반화 측면은 구조적 측면과 일맥상통한다. 변하는 양으로서의 변수는 동적인 측면을 반영하며 함수적 접근에 해당된다. 일반화된 수로서의 변수는 대수의 일반화 측면을 나타내는 한편, 미지수로서의 변수는 문제해결 방법과 맥을 같이 한다. 마지막으로 지시 대상이 없는 기호로서의 변수는 언어로서 대수의 관점에 대응하는 역할을 한다. Saussure는 기호학적 관점에서, 기표와 기의의 이중성을 가진 기호의 이원론적 모델이 식과 방정식의 정적인 상태를 묘사할 뿐만 아니라 어떤 기호의 기표 또는 기호의 조합이 다른 새로운 기호의 기의가 되어가는 의미작용을 통해 동적인 과정을 묘사할 수 있다고 하였다. Peirce는 기호가 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 구조를 가지며, 이들의 공조를 포괄하는 기호작용인 세미오시스(semiosis)를 통해 기호의 해석화와 기호화의 지속적인 작용이 이루어지는 것으로 보았다.

변수 개념과 관련한 어려움 중의 하나는 변수의 다른 역할과 의미를 구분하고 유연하게 다루는 것이다. 변수 개념과 관련된 인식론적 장애들은 여러 연구에서 확인되었다(Bills, 2001; Wagner, 1983). Wagner(1983)는 변수로 사용되는 알파벳을 다룰 때 알파벳의 순서가 수의 순서에 대응된다고 생각하여, 37의 다음에 오는 수가 38인 것처럼 m의 다음 수는 $m+1$이라기 보다는 n이라고 생각하는 변수와 수, 단어 사이의 유사점과 차이점이 오개념의 원인이 되는 인식론적 장애를 지적하였다. 변수 개념을 학습하는 동안 학생들이 접하게 될 다른 인식론적 장애로는 수로 된 답을 기대하는 "예상된 응답 장애(Expected Answer Cbstacle)", 수가 아닌 식이나 변수가 연산자를 포함하고 있는 것을 불편하게 여기고 과정이 완결되지 않은 것으로 생각하는 "완전성 결여의 장애(Lack of Closure Obstacle)[3]"(Tall, Thomas, Davis, Gray & Simpson, 2000) 그리고 잘못된 비교와 연상으로 인한 "변수 역해석의 오류(reversal error)" 등이 있다(황우형, 1993). 이러한 장애는 산술과 대수 사이의 '교수학적 단절'을 설명한다. 변수의 개념은 두 가지 이상으로 해석될 수 있는 다가적 특성과 변수의 역할의 다양성, 변수의 의미의 다양성 등 여러 인식론적 장애 요인들을 내포하고 있으므로, 대수를 학습하는 학생들에게 변수의 다른 의미와 역할을 확인하고 이들을 유연하게 다룰 수 있는 기회를 제공해야 한다.

3. 매개변수의 개념

최근 Drijvers(2003)는 매개변수의 개념에 한정된 특성으로 높은 수준의 변화와 일반화, 매개변수의 위계적 위치, 다양한 문자 기호와 역할의 복잡성의 세 가지 측면을 제시하였다. 첫 번째 특성인

---

3) Davis(1975)는 완결되지 않은 대수식을 받아들일 때 학생들이 경험하는 인지적 어려움을 '이름-과정 딜레마'라고 하였고, Matz(1982)는 '과정-산물 딜레마'라고 하였다.

높은 수준의 변화와 일반화에 관련하여 매개변수는 '메타-변수'로 생각될 수 있다. $y=ax+b$에서 a는 자리지기, 미지수, 변하는 수와 같이 일반적인 변수와 똑같은 역할을 하지만, 변수의 경우보다 더 높은 수준에서 작용한다. 예를 들어, 대수식$(x+1)^2=x^2+2x+1$는 $(4+1)^2=4^2+2\cdot4+1$, $(10+1)^2=10^2+2\cdot10+1$ 등과 같은 수식의 일반화를 나타내지만, $(x+a)^2=x^2+2\cdot a\cdot x+a^2$은 $(x+1)^2=x^2+2x+1$, $(x+2)^2=x^2+4x+4$와 같이 대수식의 일반화를 이끌어내어 '메타-변수'로서 한 단계 높은 매개변수로 작용한다. 일반적인 변수가 산술적 관계의 변화와 일반화에 적용된다면, 매개변수는 대수적 관계의 변화와 일반화에 적용된다. 이것은 식의 실재화(Reification)를 완성하는 결과를 가져온다.

두 번째 특성은 매개변수의 위계적 위치이다. 매개변수방정식 또는 대수식은 방정식이나 식의 족 또는 류를 나타낸다. 함수$f_a(x)=a\cdot x+3$에서 a의 값은 x를 정의역으로 하는 일차함수 $x\rightarrow a\cdot x+3$을 결정한다. Freudenthal(1983)은 매개변수를 함수 f_a의 a와 같이 필요할 때만 깨워서 고려할 수 있는 잠자는 이차 독립변수로 보았다. 이때 함수 f_a는 매개변수 a에 좌우되므로 그 자체가 종속변수와 같은 역할을 한다. 이때 일차적 수준에서 상수로서의 매개변수와 이차적 수준에서 변수로서의 매개변수의 혼합은 '변하는 상수'의 개념을 반영한다. 이런 의미에서 매개변수 a는 독립변수 x보다 위계적으로 더 높은 위치에 놓여있다고 할 수 있다(Bills, 2001; Bloedy-Vinner, 2001).

세 번째 특성은 '슈퍼-문자'인 매개변수는 관련된 다양한 문자 기호의 역할을 수행한다는 것이다. $a\cdot x+3$ 또는 $y=\sqrt{a^2-x^2}$과 같이 매개변수를 포함한 식이나 매개변수를 포함한 함수는 독립변수, 종속변수도 함께 포함하고 있다. 그래서 적어도 두세 개의 문자 기호를 포함한다. 이들 각 기호의 역할과 의미를 구분하는 것은 하나 이상의 변수를 포함한 상황에서 보다 더 복잡한 양상으로 나타난다. 게다가 그 역할이 고정되지 않고 풀이 과정에서 역할이 바뀌는 경우도 있다. 이 특성은 문자변수의 고정화(Stereotyping)와 관련이 있다(Bills, 2001). 예를 들면, 일반적으로 독립변수와 종속변수는 문자 x, y를 사용하고, 매개변수는 a, b, p, q, m, n을 사용하는 관례를 이르는 말이다. 문자변수의 고정화의 이점은 이것이 학생들에게 문자 기호의 다른 역할을 구별하도록 도와준다는 것이다. 그러나 문자 변수 사용의 고정화는 문자 기호의 역할이 변할 수 있다는 유연성을 방해한다.

지금까지 매개변수의 개념에 대한 분석을 종합하면, 변수의 개념에 대한 논의는 부분적으로 매개변수의 개념에 적용될 수 있다. 변수와 마찬가지로 매개변수는 여러 가지 역할을 하며 여러 가지 의미를 지닌다. 변수의 경우처럼, 매개변수의 역할이 함축적이고 문제해결 과정에서 변할 수 있기 때문에 매개변수의 개념을 다루는 데에는 많은 어려움이 따른다. 이러한 어려움 중의 하나는 문제해결 과정에서 변화하는 매개변수의 개념을 이해하는 것이다. 따라서 본 연구에서는 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해를 좀 더 심층적으로 살펴보기 위하여, 매개변수 개념을 Drijvers(2003)가 구분한 "자리지기로서의 매개변수", "변하는 양으로서의 매개변수", "미지수로서의 매개변수", "일반화로서의 매개변수"로 세분화하여 컴퓨터 대수 환경에서 각 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해의 특징을 살펴보고자 한다.

Ⅲ. 연구방법

1. 참여자

본 연구는 인천시에 소재한 인문계 고등학교 1학년 학생 6명을 대상으로 컴퓨터 대수 환경에서 교수 실험(Teaching Experiment)의 형태로 진행되었다. 본 연구에 참여한 6명의 수학 학습 성취도는 교내 정기고사를 기준으로 중 수준의 학생 3명(중진, 중선, 중미)과 상 수준의 학생 3명(상진, 상선, 상미)으로 이루어졌다. 본 논문에 사용된 학생의 이름은 모두 가명으로 하였다. 사전 설문 결과 6명의 학생 모두 변수에 대한 개념 이미지를 가지고 있는 반면, 매개변수에 대해서는 용어 자체를 생소하게 생각하였다. 직선 $y=a \cdot x+b$에서 a의 값을 기울기로 인식하고 있었으나, 매개변수라고 답한 학생은 중진이 한 명뿐이었다. 방정식을 한 문자에 관하여 정리하는 설문에서는 모든 학생들이 식을 잘 정리하였으나, 변수 x에 관하여 푸는지, 매개변수 a에 관하여 푸는지에 대한 구분은 하지 못하고 x와 a에 차이를 두지 않고 미지수로 생각하는 경향이 있었다. 학생들의 이러한 혼란은 현 교육과정의 교과서에서 '매개변수'라는 표현을 명시적으로 사용하고 있지 않은 데에서도 원인을 찾을 수 있다. 학생들은 CAS 그래핑 계산기에 대한 경험이 전혀 없었으며, 주로 휴대폰에 내장된 사칙연산 계산기를 이용해 본 경험 정도가 전부였다. 학생들은 수학 10학년 과정을 이수한 상태였고, 형식적 대수에 대한 지식은 아주 제한적이었다. 예를 들어, 이차방정식의 일반적인 해법에 대한 경험이 없었으며 이러한 방정식의 풀이는 CAS 그래핑 계산기의 도움을 필요로 하였다.

2. 연구 절차

본 연구는 고등학교 1학년 학생 6명을 대상으로 2009년 12월에서 2010년 2월까지 3개월 동안 수행되었다. 우선 사전검사를 통해 매개변수에 대한 학생들의 이해 수준을 파악하였고, 3차시의 CAS 그래핑 계산기(TI Voyage200)의 기능 수업을 실시하였다. 그 후 매개변수 개념의 이해에 초점을 둔 6차시의 교수실험을 실시하였다. 교수실험은 일주일에 한 번씩 방과 후와 겨울방학 기간에 50분 동안 교사의 진행 하에 모둠별 토론 수업으로 진행되었다. 교수실험의 각 차시는 먼저 컴퓨터 대수 환경에서 문제를 해결하면서 대수적 이해와 통찰력을 얻도록 하였으며, 필요한 경우 지필환경에서 문제를 해결하는 것도 허용하였다. 6차시 교수실험은 컴퓨터 대수 환경에서 일차함수, 방정식, 이차함수에 나타난 매개변수 개념의 이해에 초점을 맞추었다. 교수실험 과정에서 나타나는 기능상의 문제가 발생할 경우 학생들은 교사에게 물어보고 교사가 그 자리에서 직접 답변하거나 같이 연구하여 해결하는 방식으로 진행하였다. 교수실험과 학생 면담 내용은 모두 비디오로 녹화하여 전사하였다. 연구자는 교수실험의 녹화 자료와 교사 관찰지, 학생 면담 자료, 학생 활동지 등을 바탕으로 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 수준을 알아보고, 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 학생들의

이해의 특징들을 살펴보았다. 그리고 컴퓨터 대수 환경이 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해를 어떻게 돕는지 살펴보았다. 다음은 본 연구에서 실시한 교수 실험의 차시별 주제이다.

<표 1> 교수 실험의 차시별 주제와 매개변수 개념에 따른 문항의 분류

차시	주 제	문항	자리지기	변하는 양	미지수	일반화
1차시	일차함수의 매개변수	1. a	o			
		1. b		o		o
		1. c		o		o
2차시	이원일차연립방정식의 매개변수	2. a			o	
		2. b	o			o
3차시	이원이차연립방정식의 매개변수	3. a			o	
		3. b	o			o
4차시	원뿔 부피의 매개변수	4. a	o		o	
		4. b		o		
		4. c				o
5차시	일차함수의 매개변수의 활용	5. a	o		o	
		5. b		o		
		5. c				o
6차시	이차함수의 매개변수	6. a		o	o	o
		6. b		o		o
		6. c			o	

교수실험에 사용한 대수 문항들은 Dijvers(2003)에서 제시된 문항을 연구자가 우리나라 교육과정에 맞게 수정하여 고안하였다. 사전 설문 문항과 교수 실험에 사용된 문항들은 부록에 첨부하였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는 컴퓨터 대수 환경에서 네 가지 매개변수의 개념에 대한 학생들의 이해의 특징을 분석하기 위하여 교수실험이 녹화된 비디오테이프, 학생이 작성한 활동지와 면담지, 연구자가 학생 관찰을 통해 적은 기록물과 녹음 내용 등의 자료를 수집하였고, 일정 비교 분석법(Constant Comparative Method)을 사용하여 자료를 분석하였다.

1) 교수 실험 분석을 통한 매개변수 개념의 이해

교수실험에 있어 하나의 주제 문항은 하나의 매개변수 개념만 포함하고 있는 것이 아니라 여러 매개변수의 위계적 개념을 포함하고 있으며, 학생들의 활동도 이러한 이해 수준의 위계에 따라 학습되도록 경로를 구조화하였다.

<문항1> 다음 직선에 대하여 답하시오.

a. 직선 $y=a\cdot x+b$에 $a=2$, $b=3$을 대입하는 경우, x의 값이 변함에 따라 직선은 어떻게 변화하는가?

b. 직선 $y=a\cdot x+3$의 그래프는 a의 값이 변함에 따라 어떻게 변화하는가?

c. 직선 $y=2\cdot x+b$의 그래프는 b의 값이 변함에 따라 어떻게 변화하는가?

<그림 1> 교수실험에서 사용한 문항1의 내용

<표 2>는 1차시에 행한 일차함수의 매개변수 개념에 관한 학습 경로이다. <문항1>의 경우 "미지수로서의 매개변수" 개념보다는 나머지 세 가지 개념으로 학습이 이루어졌다. "자리지기로서의 매개변수"에서 "변하는 양으로서의 매개변수"로 이해의 수준을 높이는 과정에서 학생들에게 매개변수의 값을 체계적으로 변화시키는 활동을 하게 하였다. 즉, 컴퓨터 대수 환경에서 방정식을 풀거나 대입을 하거나 그래프를 따라 움직여 보게 하였다. 또 "변하는 양으로서의 매개변수"에서 "일반화로서의 매개변수"로 이해의 수준을 높이는 과정에서 학생들은 그래프를 그리거나 매개변수 방정식을 풀었다. 다른 차시의 주제들에 대해서도 매개변수의 학습의 위계를 사용하였다.

<표 2> 문항 1의 학습 경로

매개변수 개념	$y=ax+b$에서 a의 의미	그래픽 모델
자리지기	a는 하나씩 대입될 특정 수치값을 나타낸다.	다른 그래프로 대치될 수 있는 하나의 그래프
변하는 양	a는 역동적으로 하나의 집합을 움직인다.	역동적 그래프의 움직임 변화
일반화	a는 하나의 집합을 나타내고 상황들을 일반화한다.	그래프들의 묶음

본 연구에서는 컴퓨터 대수 환경에서 학생들이 매개변수의 네 가지 개념을 어떻게 이해하는지 살펴보고, 어떤 특징들이 나타났는지 분석하였다.

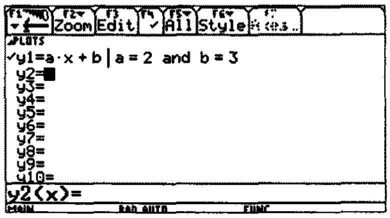
Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 자리지기로서의 매개변수

매개변수의 자리지기 관점은 매개변수를 '빈 자리' 또는 '빈 상자'로 이해하는 것으로 정의할 수 있

다. 그 결과, 매개변수의 체계적인 변화는 고려되지 않고, 다양한 매개변수의 값들이 서로 관련성을 갖지 않는 일반적인 이미지로 통합된다. 대부분의 학생들은 자리지기로서 매개변수 개념을 자연스럽게 받아들였다. 다음은 자리지기로서의 매개변수에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징이다.

첫째, 학생들은 매개변수에 수치값을 대입해 계산하려는 경향을 보였다. 컴퓨터 대수 환경은 위에서 말한 바와 같이 숫자의 대입을 지원하기 때문에 학생들은 숫자에 대한 참조로 매개변수를 이해했는데, 특정 숫자 또는 하나 이상의 숫자를 대입하는 경우도 있었다. 수업 관찰 결과, 학생들은 완전성 결여의 장애를 구체적인 매개변수의 값을 선택함으로써 간단히 해결하려는 경향을 보이면서, 매개변수에 숫자를 대입하는 모습이 관찰되었다.



<그림 2> 상진이의 함수 입력창

<문항1.a>에서 상선, 상미, 중미는 $y=a\cdot x+b|a=2$ and $b=3$이라고 함수 입력창에 입력하지 않고, 바로 $y=2x+3$이라고 입력하였다. 이는 학생들이 매개변수의 사용을 불편하게 여기고, 숫자가 상황을 좀 더 구체적이고 조작하기 쉽게 만든다고 생각하기 때문인 것으로 추측된다. 또한 학생들은 매개변수의 값을 알지 못하면 더 이상 진행을 할 수 없다고 생각하였다. 다음은 학생 상선이와 중미가 <문항2.b>의 합-차 문제에서 $x+y=a$, $x-y=b$의 일반적인 해를 구하면서 이루어진 대화 내용의 일부분이다.

00 상선 : x는 $\frac{1}{2}a$ 더하기 $\frac{1}{2}b$야. a

01 중미 : 그 다음은 어떻게 계산하지?

02 상선 : 뭘 말이지?

03 중미 : 아버지 나이 말이야. 나이가 몇 살인지 알아야 하잖아. 숫자를 넣어야 계산이 끝나지... x가 $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$이니까 $\frac{a+b}{2}$라고 써도 되겠네. 그런데 x와 $\frac{a+b}{2}$에 어떤 수를 넣어야 할지 모르겠어.

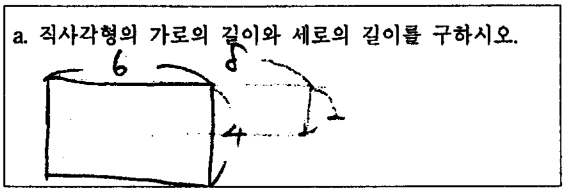
04 상선 : 아니지! 아버지의 나이 x는 두 사람의 나이의 합 a와 차 b로 나타나는 거지. 더 이상 계산할 수 없잖아.

이 대화 관찰에서 학생 중미는 $\frac{a+b}{2}$를 완전한 결과로 인식하지 못하였다(프로토콜 03). 연구자

와의 면담 과정에서 중미는 덧셈 연산자가 덧셈을 수행할 수 있도록 매개변수에 숫자를 입력해야 한다고 생각하였다. 그러나 컴퓨터 대수 환경은 수의 계산뿐만 아니라 대수적 계산이 가능하기 때문에 이런 일이 초래되지 않는다. 이러한 완전성 결여의 장애는 일반화로서의 매개변수 또는 변하는 양으로서의 매개변수의 이해를 방해하게 된다(Dijvers, 2003).

둘째, 특정 매개변수의 값과 일반적인 매개변수 사이를 왔다 갔다 하는 경향을 보였다. 학생 상미는 <문항3.b>를 설명하는 과정에서, 구체적인 수를 말하지만 의미에서는 일반적인 용어로 형식화하였다. 둘레의 길이가 20cm이고 대각선의 길이가 8cm인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 구하는 과제에서 상미는 일반적인 추론을 설명하기 위해 구체적인 값을 사용하였다.

05 교사 : (평가지의 문항3.b를 가리키며) 이 문제는 어떻게 풀었어요?
06 상미 : 직사각형은 가로 길이가 같고, 세로 길이가 같잖아요. 그래서 가로, 세로의 합은 둘레의 길이의 절반인 10이 돼요. 가로와 세로의 길이는 합이 10이니까 6cm, 4cm라고 잡으면 될 거예요. 8cm, 2cm라고 해도 될 것 같아요. 음... 이차방정식으로 푸는 것이 나을 것 같아요.



<그림 3> 상미의 <문항3.b> 풀이

본 연구에서는 학생들이 CAS 그래핑 계산기를 이용하여 문제를 해결하는 과정을 관찰한 결과 컴퓨터 대수 환경이 매개변수 자리에 수치값을 대입하는 것을 허락함으로써 매개변수의 자리지기 관점을 지원한다는 것을 알 수 있었다. 이것은 조건삽입기호 "|"를 사용하여 수치를 대입하는 대입의 개념으로 생각할 수 있다. 예를 들어, $(x-a)^3 \mid a=5$는 $(x-5)^3$이다. <문항1>에서 a와 b에 수치값이 대입되지 않는다면 그래프는 그려지지 않고 에러 메시지가 뜨게 된다. 조건삽입기호(bar)를 이용하여 매개변수의 값을 쉽게 변화시키는 컴퓨터 대수 옵션은 변하는 양으로서의 매개변수를 위한 준비 작업이기도 하다. 상미가 매개변수에 여러 가지 값을 대입하는 설명(프로토콜 06)은 자리지기로서의 매개변수의 관점을 일반화의 수단으로 생각하게 되는 민감한 발돋움이라고 할 수 있다.

2. 변하는 양으로서의 매개변수

변하는 양으로서의 매개변수의 관점은 매개변수의 체계적인 변화와 관련되며, 매개변수가 '변하는 상수' 또는 '슬라이딩 매개변수'로 불리는 이유이기도 하다. 다음은 변하는 양으로서의 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해의 특징이다.

첫째, 학생들은 매개변수의 '메타-변수'적 변화를 이미지로 바르게 인식하지 못하였다. <문항1>의 일차함수 $y=ax+b$에서 매개변수 a, b는 함수의 그래프를 변화시키는 반면, 독립변수 x와 종속변수 y는 함수의 그래프를 변화시키지 못한다는 점에서 매개변수는 독립변수, 종속변수보다 높은 수준에 있다고 한다(Dijvers, 2003). 학생들은 $y=2\cdot x+3$에서 x의 값의 변화가 y의 값의 변화를 이끈다는 사실은 바로 감지하였다. 면담과정에서 학생들은 'x의 값이 커지면 y의 값도 커진다' 또는 'x의 값이 작아지면 y의 값이 작아진다' 등의 말을 하였다. <문항1.a>에 대한 학생 면담 과정에서 상진이는 "직선 $y=a\cdot x+b$에 $a=2$, $b=3$을 대입하는 경우, x의 값이 변함에 따라 직선은 어떻게 변하나요?"라는 질문에 다음과 같이 답하였다.

07 교사 : 직선 $y=a\cdot\ x+b$에 $a=2$, $b=3$을 대입하는 경우, x의 값이 변함에 따라 직선은 어떻게 변하나요?

08 상진 : 직선은 변하지 않아요. x의 값이 변해도 직선은 아까 직선이랑 똑같아요. x의 값이 변함에 따라 y의 값이 변하는 거죠.

(중략)

09 교사 : 그럼, a, b의 값을 변화시키면 직선의 그래프는 어떻게 될까요?

10 상진 : 기울기와 y절편이 달라지니깐 그래프가 다양하게 변하겠죠.

참여 학생 중 오직 상진이만이 매개변수의 자리에 수치값이 대입되는 경우 전체 그래프에는 변화가 없음을 분명히 하였고, a는 직선의 기울기이고, b는 y절편이므로 a, b가 변하면 직선의 그래프 전체가 변한다고 하였다(프로토콜 07-10). <문항1.b>에서 학생 중진이와 중미는 $y=a\cdot x+3$에서 a의 변화에 대해 충분히 이해하고 있지 못하였다. 학생 상선이 역시 좌표평면에 직선들을 그렸는데 y절편을 고정시키지 않고 기울기가 증가하는 직선들을 생각하여 말하였다. 이에 대해 상선이는 '직선이 좌표평면에서 올라가요.'라고 표현하였다. 다음은 <문항1.b>에 대해 중진이와 면담한 내용의 일부분이다.

11 교사 : $y=a\cdot\ x+3$에서 a의 값이 변하면 그래프는 어떻게 될까?

12 중진 : 다른 그래프가 돼요.

13 교사 : 그게 무슨 말이지? 다른 그래프가 되다니?

14 중진 : 그냥 다른 그래프인 거요.

중진이의 경우도 a의 값이 바뀌면 다른 그래프가 나타난다는 것을 인식했지만, a의 값의 변화가 국소적으로 하나의 점에 영향을 미치는 것이 아니라 그래프 전체에 영향을 미치면서 전체 함수의 모양을 바꾼다는 사실을 정확히 인식하는 것은 아니었다.

둘째, 변하는 양으로서의 매개변수 개념은 매개변수의 개념 전체를 지배하는 경향이 있었다. 학생들은 매개변수의 이미지를 컴퓨터 대수 환경에서 {1, 2, 3, 4}를 입력하는 형태로 인식하였다. 이러한

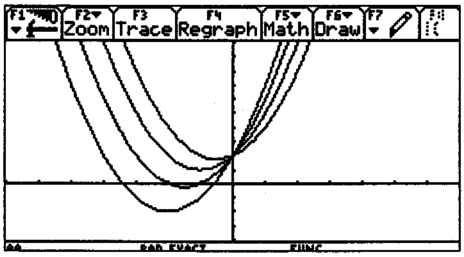
지배 경향은 일반화의 수단 또는 미지수로서의 매개변수를 향한 통찰력의 발달을 방해할 뿐만 아니라, 매개변수를 연속적으로 변하는 양이 아니라 정수라고 생각하는 경향을 보였다. 학생들은 모두 매개변수의 값으로 1, 2, 3, 4라는 값을 선택하고, 분수나 음수의 값은 거의 사용하지 않았다. 다음은 학생들에게 매개변수의 간격을 1보다 작은 간격으로 변화시켰을 때 그래프의 변화를 탐구하게 한 수업의 일부분이다.

15 교사 : <문항6.b>에서 매개변수의 간격을 1로 했는데, 간격을 $\frac{1}{2}$로 하면 어떻게 될까?

16 중진 : $\frac{1}{2}$은 안되지 않나요? 1, 2, 3으로 변해야 할 것 같아요.

17 교사 : 잘 생각해봐. 매개변수를 $\frac{1}{2}$ 간격으로 변화시키면 왜 안 되는 거니? $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ 이렇게 말이야. 또는 2의 간격으로 띄우는 것은 어떨까? {2, 4, 6, 8} 이렇게 말이야.

18 상미 : 아! 될 수 있을 것 같아요. c의 값이 촘촘해지니까 그래프끼리 간격이 가까워질 것 같아요. 2로 해도 되고요. 그래프 간격이 더 넓어져서 나타날 것 같아요.



<그림 4> 학생 중진이의 <문항6.b> 풀이

학생들은 컴퓨터 대수 환경에서 좀 더 쉽게 1보다 작은 간격으로 변하는 매개변수의 역동성을 조사하는 기회를 가질 수 있었다.

셋째, 학생들은 매개변수의 변화의 역동성을 피상적으로 관찰하고, 자연언어로 이를 표현하는 경향이 있었다. <문항1>과 <문항6>에서 학생들은 그래프의 역동성이 어떻게 일어나는지 의심하지 않았고, x축 또는 y축과 만나는 점이나 꼭짓점과 같은 그래프의 특징적인 모양을 조사하려고 하지 않았다. 학생들은 단지 그래프가 나타내는 역동성에 놀라워하였고, "매개변수가 커지면 그래프는 올라간다'와 같이 다소 현상적인 결과를 발견하고 자연언어로 이를 표현하였다. 학생들은 역동성을 형식화하기 위해 '더 넓어진다', '더 좁아진다', '더 커진다', '더 작아진다', '증가한다', '감소한다', '올라간다', '내려간다', '간격이 넓다', '간격이 좁다' 등의 용어를 사용하였다.

이상에서 변하는 양으로서의 매개변수는 변수의 변화보다 높은 수준에서 문제의 상황에 영향을 미친다는 사실에 대한 학생들의 개념 이해가 쉽지 않았음을 알 수 있다. 변하는 양으로서의 매개변수는 식을 전체적으로 바꾸며, 그래프를 전체적으로 움직인다. 컴퓨터 대수 환경은 매개변수의 값 바

꾸기, 매개변수에 여러 가지 값을 가진 집합 대입하기, 슬라이더 도구를 이용해 매개변수에 역동적인 변화 허용하기 등을 가능하게 함으로써 자리지기 관점에서 변하는 양의 매개변수 관점으로의 변환을 지원한다는 것을 알 수 있었다.

3. 미지수로서의 매개변수

미지수로서의 매개변수의 관점은 학생들이 문자 기호의 역할의 상대성을 인식하게 하였고, 'Solve 함수'를 사용하면 방정식이 항상 미지수에 관해 풀린다는 경험으로 인해 미지수로서의 매개변수의 접근이 쉽다는 것을 느끼게 하였다. 학생들이 보여준 미지수로서의 매개변수에 대한 이해의 특징은 다음과 같다.

첫째, 컴퓨터 대수 환경에서 문자 기호의 역할의 유연성은 변수와 매개변수에 새 이름을 명명하는 행동에서 발견되었다. 학습하는 동안 학생들은 맥락 또는 과제에서 제시된 문자와 다른 문자를 사용해야 하는 경우가 자주 발생하였다. 다른 문자를 사용하는 주요 원인은 CAS 그래핑 계산기(Voyage 200)에서 지원하는 함수와 함수의 그래프가 독립변수로 x문자를, 종속변수로 y문자를 고정하여 사용하고 있기 때문이다. <문항4>의 원뿔의 밑넓이를 구하는 관계 맥락에서 $S=\pi\cdot r^2$이라는 식을 표현할 수 있다. 이때 S는 밑넓이이고, r은 반지름이다. 이 관계를 그래프로 나타내는 과정에서 학생 상미는 반지름과 밑넓이의 관계를 그래프로 나타내기 위해 $y_1(x)=\pi\cdot r^2|r=x$라고 재명명하여 입력했고, 상진이는 $y_1(x)=\pi\cdot x^2$이라고 입력해 문자의 재명명 활동을 머릿속으로 생각하고 바로 실행하였다. 재명명 활동은 학생들의 문자 기호에 대한 유연성과 문자의 역할 이동에 대한 인식을 촉진하게 하였다.

둘째, 방정식을 푸는 미지수로서의 매개변수의 인식은 변수와 매개변수 사이의 관계에 영향을 미치면서 정신적 이동을 요구하였다. 지금까지 변수는 대개 미지수로 인식되었기 때문에 이 감각에서 변수와 매개변수의 관계가 역전된다. 특히, 방정식이 매개변수에 관하여 풀릴 수 있다는 것에 주목할 필요가 있다. 그리고 대부분의 경우, 풀이의 결과는 매개변수를 나타내는 수의 집합 즉, 대상으로 나타나는 하나의 식이 된다. 이 과정에서 실재화가 한 번 이상 일어나게 된다.

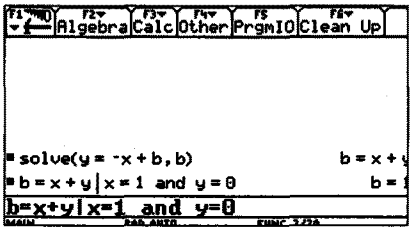
다음은 직선 $y=-x+b$ 위에 A 깃발을 꽂는 <문항5>에 대해 학생 중선이와 면담한 내용의 일부분이다.

19 교사 : 깃발 A의 위치를 구하기 위해 어떻게 해야 할까?
20 중선 : 점이 정확하지 않잖아요. b의 값도 모르고요.
21 교사 : 깃발의 위치를 무엇으로 나타내기로 했지?
22 중선 : b의 값이요. 아! 그러면 b의 값만 구하면 그것이 깃발의 위치가 되나요?
23 교사 : 문제에서 그렇게 하기로 약속을 했잖아.
24 중선 : 그러면 알 것 같아요. 깃발 A가 있는 직선이 점(1, 0)을 지나잖아요. 그러면 $y=-x+b$이니

까 x에 1을, y에 0을 대입한 후 이항하면 b의 값이 나오잖아요. 1이요.

25 교사 : 꼭 $(1,\ 0)$이라는 점을 대입해야 하니?

26 중선 : 아니오. 직선 위의 다른 점을 넣어도 돼요. 직선 위의 점이 $(x,\ y)$일 때 두 좌표를 더하면 될 것 같아요. $b=x+y$이잖아요.



<그림 5> 중선이의 <문항5> 풀이

중선이는 미지수로서의 매개변수 개념의 이해 정도가 상 수준으로 잘 이해하고 있었으며, 미지수로서의 매개변수에서 일반화로서의 매개변수 개념으로 나아가는 수준의 상승을 자연스럽게 도약하고 있는 모습을 보여주었다(프로토콜 19-26).

학생들이 CAS 그래핑 계산기를 이용하여 대수 문제를 해결하는 과정을 살펴본 결과, 컴퓨터 대수 환경은 문자 기호의 유연한 사용을 허용하기 때문에 미지수로서의 매개변수의 관점의 발달을 지원한다는 것을 알 수 있었다. 컴퓨터 대수 환경에서 모든 변수는 같다. 이것은 문자 기호의 역할의 상대성이 학생들에게 인식 가능하게 됨을 의미한다. 또한 컴퓨터 대수 환경은 'Solve 함수'를 사용하여 매개변수에 관한 방정식 풀이를 허용함으로써 미지수로서의 매개변수의 발달을 지원한다는 것을 확인하였다.

4. 일반화로서의 매개변수

미지수로서의 매개변수가 집합의 특정 경우를 실행하는데 반해, 일반화로서의 매개변수는 상황이나 해의 집합을 통합한다. 일반화로서의 매개변수는 상황, 구체적인 경우, 식, 공식, 해의 류를 일반화시키는데 사용된다. '족의 매개변수(Family Parameter)'는 류를 표현하고, 류를 하나로 묶는다(Giessen, 2002). 매개변수는 더 이상 특정 숫자가 아니라 수의 집합 또는 전형적인 대표 숫자를 나타낸다. 포괄적인 표상은 문제의 범주를 구하고 일반적인 수준에서 해를 구하기 위해 특정 상황에서 일반화를 이해하도록 한다. 일반화로서의 매개변수 개념에 대한 특징은 다음과 같다.

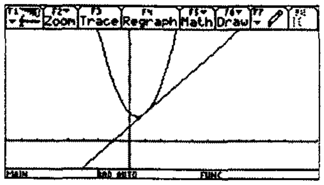
첫째, 컴퓨터 대수 환경은 일반화를 위한 기초와 규칙성, 패턴의 탐구를 위한 예를 생성함으로써 일반화의 발달을 촉진하였다. 그러나 규칙성과 패턴의 탐구활동은 때로 의미 있는 일반화보다는 피상적인 패턴 인식을 이끄는 경우가 더 많이 관찰되었다. 컴퓨터 대수의 블랙박스는 패턴의 이해를 강화하지 못하고 반영적 추상화보다는 경험적 추상화를 이끌어내는 경향이 있는 것으로 나타났다.

<문항6.a>에서 상진이는 이차함수의 꼭짓점 $\left(\frac{c}{2},\ 2-\frac{c^2}{4}\right)$를 지필로 계산하였고, 다음과 같이 일반화로서의 매개변수 개념에 대해 적절하게 설명하였다.

27 교사 : 이 이차함수의 꼭짓점의 좌표는 무엇일까요?

28 상진 : 꼭짓점의 x좌표와 y좌표는 $\left(\frac{c}{2},\ 2-\frac{c^2}{4}\right)$로 나타나요. c의 값이 2이면 꼭짓점은 (1, 1)이면 1이 되요.

6. 이차함수 $y=x^2+c\cdot x+2$과 직선 $y=x+1$에 대하여 답하시오.



a. 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

$y = x^2 + cx + 2$

$= \left(x+\frac{c}{2}\right)^2 + 2 - \frac{c^2}{4}$

꼭짓점 : $\left(-\frac{c}{2},\ 2-\frac{c^2}{4}\right)$

<그림 6> 상진이의 <문항6.a> 풀이

상진이의 설명은 꼭짓점의 좌표를 일반화시키고 다시 c의 값에 2를 지정함으로써 자리지기로서의 매개변수로 환원하는 모습을 보여준다(프로토콜 28). 예의 생성자로서 컴퓨터 대수의 성공적인 사용을 위해 학생들은 문제의 상황을 식으로 유도하고, 예의 생성자로서 컴퓨터 대수를 가치 있게 사용하여 예에 근거하여 바르게 추론하는 일련의 과정들이 행해져야 한다.

둘째, 컴퓨터 대수 환경은 매개변수 방정식의 일반적인 해를 구하는 것을 가능하게 함으로써 매개변수의 일반화 관점의 발달을 촉진하였다. 이것은 학생들이 식을 실체로 인식하도록 하며, 식과 공식의 실재화를 가능하게 하였다. 한편, 학생들에게 다소 하향식 특성(Top-Down Character)을 지닌 컴퓨터 대수의 사용은 식의 실재화를 자극하고 자리지기 개념과 완전성 결여의 장애를 극복하는 것을 도와주었다.

셋째, 컴퓨터 대수의 그래픽 모드는 앞의 <그림 4>와 같이 함수족을 표현하는 그래프들을 그리는 것이 가능하다. 이러한 표상은 변하는 매개변수로부터 나온 슬라이딩 그래프로 자연스럽게 나타난다. 손으로 그리는 것보다 '빠른' 그래프가 나타나지만, PC 환경보다는 느리다. 학생 중진이는 <문항6.b>의 주어진 식에서 매개변수의 값을 $y1(x)=x^2-c\cdot x+2|c=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$와 같이 변화시켰으며,

상선이는 $y1(x)=\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+2-\frac{c^2}{4}|c=\{1, 2, 3, 4\}$와 같이 표현하였다. 두 경우 모두 학생들이 매개변수가 하나의 개별 숫자가 아닌 숫자들의 집합을 표상한다는 것을 깨닫고 행한 실행임을 보여준다.

넷째, 일반화 과정의 본질적인 단계라고 볼 수 있는 일반적인 관계 또는 포괄적인 문제를 표상하는 식의 집합 구성하기는 컴퓨터 대수 환경에서 지원받기가 어려웠다. 컴퓨터 대수의 위력은 일반적인 해를 푸는 것에 있으며, 이 집합을 설정하는데 있는 것은 아니다.

이상에서 컴퓨터 대수 환경은 매개변수를 포함한 방정식의 일반적인 해를 구하는 능력을 통해 포괄적인 문제해결 과정으로 식과 공식의 실재화를 구현한다는 것을 알 수 있다. 일반화로서의 매개변수 개념은 다소 애매한 측면이 있긴 하지만 부정소의 역할에 가까우며, 수학적 현상을 조직하고 하나로 묶는 것을 나타낸다.

본 연구에서는 컴퓨터 대수 환경에서 매개 변수 개념에 대한 학생들의 이해의 특징들을 조사한 결과, 학생들이 매개변수의 개념을 학습하는 과정에서 네 가지 매개변수의 개념들 사이에 위계성이 나타났다. 대부분의 학생들은 자리지기로서의 매개변수를 숫자의 대입 개념으로 어렵지 않게 이해를 하였고, 자리지기의 값에 여러 가지의 값을 대입하면서 값의 체계적인 변화를 생각하였다. 그리고 자연스럽게 변하는 양으로서의 매개변수의 개념을 받아들였다. 이어서 변하는 양으로서의 매개변수의 개념은 이 변하는 양을 모두 표현할 수 있는 하나의 족으로 묶으려는 요구로 이어졌고, 일반화로서의 매개변수 개념을 안정적으로 이해하게 하였다. 다음은 중선가 <문항1>의 활동을 마치고 나서 전체 활동을 정리하여 설명한 내용이다.

29 상선: a 기울기가 변하면 직선이 달라지지 않나요? $a=2$일 때는 이 직선이다가 .... a의 값을 작은 값에서 큰 값으로 대입해 보는 거예요. 그러면 직선이 올라가잖아요. a의 값 하나에 직선 하나가 나오게 되요. 그리고 이런 변화를 한꺼번에 적을 수 있는 방법은 ... (잠시 5초간 생각하다가) 아! 그게 $y=ax+b$인 것 같아요.

중선이가 매개변수의 개념의 상승을 나타내는 활동에서 보여준 컴퓨터 대수 활동을 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 3> 중선이의 컴퓨터 대수 활동

<table>
<tr><th>매개변수의 개념</th><th>$y=ax+b$의 a</th><th>그래픽 모델</th><th>컴퓨터 대수 활동</th></tr>
<tr><td>자리지기</td><td>a는 하나씩 대입될 특정 수치값을 나타낸다.</td><td>다른 그래프로 대치될 수 있는 하나의 그래프</td><td rowspan="2">· a의 값에 숫자를 대입하다.
· 대입하는 숫자를 바꾸어 본다.
· 대입하는 숫자를 -3에서 3까지 1씩 증가시켜본다.
· 대입하는 숫자를 묶음으로 설정한다.
· 각 경우를 그래프로 그려본다.</td></tr>
<tr><td>변하는 양</td><td>a는 역동적으로 하나의 집합을 움직인다.</td><td>역동적 그래프의 움직임 변화</td></tr>
<tr><td>일반화</td><td>a는 하나의 집합을 나타내고 상황들을 일반화한다.</td><td>그래프들의 묶음</td><td>· 이전의 그래프 활동을 비교한다.
· 묶음으로 대입한 함수의 그래프를 모두 표현할 수 있는 방법을 생각한다.
·일반화로서의 매개변수의 필요성을 인식한다.</td></tr>
</table>

상미의 경우는 자리지기로서 매개변수 개념, 변하는 양으로서 매개변수의 개념, 일반화로서 매개변수의 개념의 순으로 개념의 상승을 이끌어나갔다.

<표 5> 상미의 컴퓨터 대수 활동

<table>
<tr><th>매개변수의 개념</th><th>$V=\frac{1}{3}S\cdot h$의 r
(단, $S=\pi\cdot r^2$)</th><th>대수 모델</th><th>컴퓨터 대수 활동</th></tr>
<tr><td>자리지기</td><td>r은 하나씩 대입될 특정 수치값을 나타낸다.</td><td>조건삽입기호 "|"를 사용</td><td rowspan="2">· r과 h의 값에 숫자를 대입하다.
· 컴퓨터 대수에서 그래프를 그린다는 생각을 구체화하여 독립변수와 종속변수를 찾는다.
· 미지수 x를 대입하여 $y_1(x)=\pi\cdot r^2|r=x$ 또는 $y_1(x)=\pi\cdot x^2$라고 매개변수 r을 재명명한다.
·S와 r에 관한 함수의 그래프를 그린다</td></tr>
<tr><td>미지수</td><td>r은 미지수 x의 역할을 한다.</td><td>r과 S에 관한 함수로 인식</td></tr>
<tr><td>일반화</td><td>a는 하나의 집합을 나타내고 상황들을 일반화한다.</td><td>그래프들의 묶음</td><td>· r과 h의 관계식을 유도한다.
· r과 h의 관계식을 대입한다.
·V와 r에 관한 함수의 그래프를 그린다.</td></tr>
</table>

V. 결론 및 제언

본 연구는 인문계 고등학교 1학년 학생 6명을 대상으로 교수실험을 통해 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징들을 알아보았다. 연구 결과 '자리지기로서의 매개변수' 개념의 이해 과정에서 학생들은 매개변수에 수치값을 대입해 계산하려는 경향을 보

였고, 몇몇 학생들은 매개변수와 매개변수의 수치값을 혼용하여 사용하였다. 그리고 컴퓨터 대수 환경에서는 조건삽입기호 "|"를 사용하여 수치를 대입할 수 있기 때문에 매개변수의 자리지기로서의 개념에 대한 학생들의 이해를 돕는 것으로 보였다. '변하는 양으로서의 매개변수' 개념의 이해 과정에서 나타난 학생들의 특징은 상진이를 제외한 모든 학생들이 매개변수의 메타-변수적 변화를 이미지로 바르게 인식하지 못하였다. 독립변수, 종속변수와 매개변수의 차이를 인식하지 못하였고, 매개변수가 변화하면 하나의 점에 영향을 미치는 것이 아니라 그래프 전체에 영향을 미치면서 전체 함수의 모양이 변한다는 사실을 정확하게 인식하지 못하였다. 또한 학생들은 매개변수가 연속적으로 변하는 양이 아니라 이산량(예를 들어, 1, 2, 3, 4)으로 생각하는 경향이 있었다. 그러나 컴퓨터 대수 환경에서 쉽게 1보다 작은 간격으로 변하는 매개변수의 역동성을 조사한 후에는 매개변수를 연속적으로 변하는 양으로 인식하기 시작하였다. 몇 몇 학생들은 컴퓨터 대수 환경에서 이루어진 수업에 참여했음에도 불구하고 매개변수의 변화의 역동성을 피상적으로 관찰하거나 자연언어로 이를 표현하는 경향이 있었다. 따라서 컴퓨터 대수 환경이 변하는 양으로서의 매개변수 개념의 이해를 도왔다고 단정할 수는 없다. 그러나 학생들이 지필환경보다는 좀 더 쉽고 빠르게 그래프 개형의 변화를 탐구하는 것으로 보였다. '미지수로서의 매개변수' 개념의 이해 과정에서 나타난 특징은 컴퓨터 대수 환경에서 문자 기호의 역할의 유연성이 독립, 종속변수와 매개변수에 새 이름을 명명하는 활동을 통해 문자 기호에 대한 유연성과 문자의 역할 이동에 대한 인식을 촉진시킨 것으로 나타났다. 그리고 몇몇 학생들은 방정식을 푸는 과정에서 미지수로서의 매개변수 개념에서 일반화로서의 매개변수 개념으로 나아가는 수준의 상승을 보여주었다(프로토콜 19-26). 마지막으로 '일반화로서의 매개변수' 개념의 이해 과정에서 나타난 특징은 컴퓨터 대수 환경이 일반화를 위한 기초와 규칙성, 패턴의 탐구를 위한 예를 생성함으로써 일반화의 발달을 촉진하며, 방정식의 일반해를 구하는 것을 가능하게 함으로써 일반화로서의 매개변수 개념의 이해를 도왔다. 또한 컴퓨터 대수의 그래픽 모드는 여러 개의 함수족을 표현하는 그래프들을 그리는 것이 가능한대 이것은 지필 환경보다 학생들이 좀 더 쉽게 매개변수의 역할을 탐구하도록 하였다. 그러나 일반화 과정의 본질적인 단계라고 할 수 있는 일반적인 관계 또는 포괄적인 문제를 표상하는 식의 집합 구성하기는 컴퓨터 대수 환경에서 지원받기가 어려웠다.

본 연구에서는 학생들이 매개변수의 개념을 학습하는 과정에서 네 가지 매개변수의 개념들 사이에 위계성이 나타났다. 대부분의 학생들은 자리지기로서의 매개변수 개념을 숫자의 대입 개념으로 어렵지 않게 이해하였고, 매개변수에 여러 가지 값을 대입하면서 값의 체계적인 변화를 탐구하면서 자연스럽게 변하는 양으로서의 매개변수 개념을 이해하기 시작하였다. 이어서 변하는 양으로서의 매개변수 개념은 변하는 양을 모두 표현할 수 있는 하나의 족으로 묶으려는 요구로 이어졌고, 이는 일반화로서의 매개변수 개념과 연결되었다. 매개변수의 네 가지 개념은 임의의 순서로 제시되지 않는다. 자리지기로서의 매개변수 개념은 마치 상수인 것처럼 취급되며, 학습의 출발 수준이 된다. 그것의 상위 단계라고 할 수 있는 변하는 양, 미지수, 일반화로서의 매개변수 개념은 보다 높은 수준에서

대상에 영향을 미친다고 할 수 있다(Drijvers, 2000; 2003).

매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 교수학적 특징들을 통해 컴퓨터 대수 환경이 매개변수의 각 개념 이해에 어떤 역할을 하는지 살펴본 결과 첫째, 컴퓨터 대수 환경은 조건삽입기호의 사용을 통해 자리지기로서의 매개변수 관점의 발달을 지원하였다. 둘째, 컴퓨터 대수 환경은 매개변수의 값 바꾸기, 매개변수의 집합 대입하기, 슬라이더 도구의 사용을 통해 매개변수에 역동적인 변화를 허용하고 변하는 양으로서의 매개변수 관점의 발달을 지원하였다. 셋째, 컴퓨터 대수 환경은 문자 기호의 유연한 사용과 매개변수에 관한 방정식 풀이를 허용함으로써 식과 공식의 실재화를 구현하고 미지수로서의 매개변수 관점의 발달을 지원하였다. 넷째, 컴퓨터 대수 환경은 매개변수 방정식의 일반적인 해를 구하는 것을 가능하게 함으로써 매개변수의 일반화로서의 매개변수 관점의 발달을 지원하였다. 이와 같이 컴퓨터 대수 환경이 학생들의 매개변수 개념의 이해 발달을 지원하는 대수 활동의 기회를 제공하지만 컴퓨터 대수 환경을 사용하는 것 자체만으로 수학 학습과 개념 이해가 이루어졌다고는 볼 수 없다. 그리고 본 연구 결과는 소수의 학생을 대상으로 이루어진 사례 연구로 이 결과를 일반화하는 데는 한계가 있다. 또한 이종영(1999)이 프로그래밍 환경에서 변수 개념의 지도에서 지적한 바와 같이 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수의 개념이 학교 수학과 관련성을 가지면서 유의미한 수학적 개념으로 구성되기 위해서는 교사의 적절한 교수학적 처방이 반드시 필요하다. 학교 대수에서 매개변수 개념에 대해 지속적인 연구가 이루어지고 있으나, 교과서에서 매개변수의 개념을 명확히 하지 못하고 있는 형편을 감안한다면 앞으로 개선되어야 할 여지가 많다.

본 연구 결과를 토대로 매개변수 개념에 대한 지필 환경에서의 지도 방안을 모색해 보면, 우선적으로 수학과 교육과정에 매개변수 개념이 도입되어 학생들이 체계적으로 다양한 변수의 개념을 습득할 수 있도록 해야 한다. 그리고 본 연구에서 학생들이 가장 쉽게 인식한 자리지기로서의 매개변수 개념에서 출발하여 가장 수준 높은 일반화로서의 매개변수 개념까지 순차적으로 개념 지도를 할 필요가 있다. 매개변수 개념의 도입 시기와 구체적인 내용 체계 및 조직에 대해서는 추후 연구를 통해서 많은 논의가 필요할 것으로 보인다.

본 연구에서 제시한 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 나타난 특징들은 지필 환경에서도 나타날 수 있는 특징들도 포함하고 있다. 따라서 향후 미래 연구에서는 지필 환경과 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해의 특징을 비교 분석하여 매개변수 개념에 대한 학생들의 이해 과정에서 컴퓨터 대수 환경의 역할을 좀 더 명확히 할 필요가 있다. 마지막으로 추후 매개변수에 대한 연구가 더욱 활발히 진행되어 학생들이 다양한 매개변수 개념을 충분히 이해할 수 있길 바란다.

참 고 문 헌

김남희 (2004). 매개변수 개념의 교수-학습에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>

14(3), 305-325.

김성준 (2002). 학교수학에서의 매개변수의 역할 고찰. 대한수학교육학회지 <학교수학> **4(3)**, 495-511.

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이종희 (2003). 중학생들의 매개변수개념 분석과 교수-학습방안 탐색. 대한수학교육학회지 <학교수학> **5(4)**, 477-506.

황우형 (1993). 한국과 미국학생의 대수 문장제 풀이 비교 연구. 대한수학교육학회 논문집 **3(2)**, 105-109.

Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, Vol 2 (pp.161-168). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Institute.

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp.177-189). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York: Wiley.

Drijvers P. (2003) *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-β Press.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 5, 189-209.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: A little difference? In J. P. Da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference for the psychology of mathematics education*, Vol2 (pp.368-375). Lisbon: University of Lisbon.

Giessen, van de (2002). The visualisation of parameters. In M. Borovcnik & H. Kautschitsch (Eds.), *Technology in mathematics teaching. Proceedings of ICTMT5* (pp.97-100). Mienna: Oebv&hpt Verlagsgesellschaft.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.515-556). New York: Macmillan.

Kindt, M. (1980). Als een kat om de hete algebrij. [As a cat around the algebra.] *De Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* **5(21)**, 155-157.

Malle, G. (1993). *Didactical problems of elementary algebra*. Wiesbaden, Germany: Vieweg.

Parkhurst, S. (1979). Hand-held Calculators in the classroom : A review of the research. *ERIC Document Reproduction Service No. ED200416.*

Rojano, T. (1996) The role of problems and problem solving in the development of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching* (pp.55-62). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publisgers.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp.361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification-the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* **26**, 191-228.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Jaournal of Mathematical Behavior* **18**, 223-241.

Waerden, B. L. (1983). *Geometry and algebra in ancient civilisation.* Berlin: Springer Verlag.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *The Mathematics Teacher* **76**, 474-479.

The Case Study of High School Students' Understanding of the Concept of Parameter In A Computer Algebra Environment

Cho, Yeong Ju
Kyesan Girl's High School, Kyesan-dong, Kyeyang-gu, Incheon, Korea, 136-701
E-mail : cho0ju2000@naver.com

Kim, Kyung Mi†
Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong,
Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : kyungmi@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate how students' understanding was formed for solving the algebra problems involving parameters in a computer algebra environment. The teaching experiment has been conducted with 6 high school students. As a result, students studied the parameter in different roles such as placeholder, changing quantity, unknown and generalizer. The results indicate that a computer algebra environment offers opportunities for algebra activities that may support the development of understanding of the concept of parameter.

* ZDM classification : U74
* 2000 Mathematics Classification : 97U70
* Key words : Parameter, Computer Algebra System, Understanding
† Corresponding Author

<부록1> 사전 설문 문항

1. 다음 물음에 답하시오.
   a. 변수란 무엇인가? 변수의 예를 들어 보시오.
   b. 매개변수란 무엇인가? 매개변수의 예를 들어 보시오.

2. 방정식 $a \cdot x + b = c$를 생각해 보자.
   a. x를 a, b, c에 관하여 나타내시오.
   b. b를 a, c, x에 관하여 나타내시오.

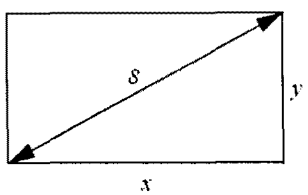
3. 직선 $y = a \cdot x + b$ 에 대하여 답하시오.
   a. a의 값을 무엇이라고 하는가? a의 값을 구하는 방법을 설명하시오.
   b. b의 값을 무엇이라고 하는가? b의 값이 나타내는 것은 무엇인가?

<부록2> 교수실험 문항

1. 다음 직선에 대하여 답하시오.
   a. $y = 2 \cdot x + 3$의 그래프는 x의 값이 변함에 따라 직선에 어떤 변화가 일어나는가?
   b. $y = a \cdot x + 3$의 그래프는 a의 값이 변함에 따라 직선에 어떤 변화가 일어나는가?
   c. $y = 2 \cdot x + b$의 그래프는 b의 값이 변함에 따라 직선에 어떤 변화가 일어나는가?

2. 내 나이에 아버지의 나이를 더하면 120이고 아버지의 나이에서 내 나이를 빼면 38이다.
   a. 내 나이는 얼마인가?
   b. 두 사람의 나이의 합과 차가 얼마인지 알고 있지만 구체적인 값을 말하지 않았다고 가정하자. 두 사람의 나이는 어떻게 구할 수 있는가?

3. 둘레의 길이가 20cm이고, 대각선의 길이가 8cm인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라고 할 때, $x + y = 10$이고 $\sqrt{x^2 + y^2} = 8$이다.



   a. 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 구하시오.
   b. 직사각형의 대각선의 길이를 모른다고 가정하고 그 길이를 d라 할 때, 가로의 길이와 세로의 길이를 구하는 일반적인 해를 구하시오.

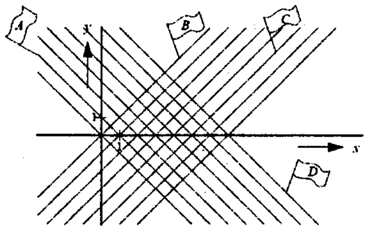
4. 원뿔의 부피 $V=\frac{1}{3}S\cdot h$이다(단, S는 밑넓이, h는 높이). 이 때, 밑넓이 $S=\pi\cdot r^2$이다(단, r은 반지름).

a. 반지름의 길이가 5이고, 높이가 9일 때 원뿔의 부피를 계산하시오.

b. 반지름의 길이과 밑넓이의 관계를 그래프로 나타내시오.

c. 높이와 반지름의 길이을 모르지만, 높이가 반지름의 길이의 두 배라는 사실을 알고 있다고 한다. 이 경우에 부피에 관한 식을 추론하여라.

5. 아래 그림은 두 함수 $y=-x+b$, $y=x-c$에서 b와 c에 몇 개의 값을 대입한 그래프이다. 깃발의 위치는 주어진 직선에 대응하는 b 또는 c의 값으로 나타내기로 한다.

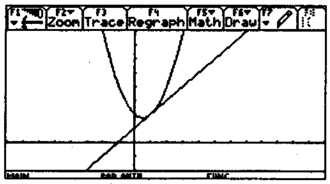


a. 네 개의 깃발 A, B, C, D가 그림과 같이 꽂혀있을 때, 깃발 A, B, C, D의 위치를 구하시오.

b. c의 값이 커질 때 방정식 $y=x-c$인 직선은 어떻게 되는가?

c. 먼저 'b의 값을 구하는 그래프'와 'c의 값을 구하는 그래프'의 한 교점을 선택하고,b와 c의 값을 모두 1만큼씩 크게 하면 교점은 어떻게 변화하는가?

6. 이차함수 $y=x^2+c\cdot x+2$과 직선 $y=x+1$에 대하여 답하시오.



a. 이차함수의 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

b. c의 값이 , $c=1$, $c=2$, $c=3$, $c=4$로 변화할 때 포물선의 그래프를 그리시오.

c. 직선과 포물선이 오직 한 점에서 만나는 c의 값을 구하시오.