韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 11. 제 49권, 제 4호, 437-462.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2010, Vol. 49, No. 4, 437-462.

초등학교 교육과정에 제시된 자연수 개념의 지도 내용 분석

이 명 희 (서울봉은초등학교)
황 우 형 (고려대학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교수학은 자연수 개념에 대한 학습을 시작으로 십여년간의 수학 학습이 진행된다. 즉 학교수학 학습의 초기에 수란 무엇인가에 대하여 어떻게 학습하느냐는 향후 이루어질 십여년간의 수학 학습에 대한 첫 발걸음이 되는 것이다. 따라서 수개념에 대한 학습이 어떻게 이루어지고 있느냐에 대한 연구는 수학교육에서 매우 중요한 연구가 될 것이다.

실제로 수개념에 대한 연구는 역사적으로 수에 관한 철학을 처음으로 구성한 기원전 200~500년의 그리스인들로부터 시작(Brainerd, 1979)하여 이루어져 왔으며, 19세기에 이르러 수의 학습이 어린이에게로 적용되면서 수개념에 대한 심리학적, 교육학적 논의가 이루어지기 시작하였다(Brainerd, 1979). 수에 대하여 수리철학적 입장에서 그 개념을 '집합'과 '대응'이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 완벽하게 구성할 수 있음을 보여준 최초의 이론은 1887년 Dedekind의 수에 관한 연구이다(Russell, 1903, p. 125; Brainerd, 1979). 이 후 수리철학적 입장에서 수개념에 대한 연구가 이루어져 왔다.

19세기에 이르러 수개념을 추구하던 단계에서 수개념을 지도하는 방향으로 관심의 눈을 돌리면서 수개념에 대한 인식론적, 심리학적, 교육학적 논의가 본격화되었고 보다 다양한 관점에서 활발히 논의되기 시작하였다(Clason, 1968). 수개념을 이렇게 여러 관점에서 규명해 보고자 하는 노력의 결과 수개념은 매우 다양한 측면을 가지며, 특히나 어느 한 개념이 다른 개념을 대신할 수 없는 복합적인 의미를 갖고 있으며 수개념 지도에서 어느 한 개념도 간과할 수 없는 부분임이 받아들여지고 있다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 자연수 개념에 대한 연구가 역사적, 수리철학적으로 어떻게 이루어져 왔으며, 학교 수학의 입장에서 교수학적 이론으로서는 어떠한 측면들을 갖고 있는지를 살펴보겠다. 그리고 이를 바탕으로 우리나라 교육과정에서 자연수 개념의 지도 내용은 어떠하며 이는 교수학적 이론으로서 자연수 개념의 여러 측면들에 비추어 볼 때 어떠한 특징을 갖는지를 살펴보겠다. 본 연구에서의 우리나라 수학과 교육과정은 제7차 교육과정 및 2007 개정 교육과정을 중심으로 살펴보겠다. 연구문제는 다음과 같다.

1. 우리나라 교육과정에서 자연수 개념의 지도 내용과 그 특징은 어떠한가.
2. 우리나라 교육과정에서 자연수 개념의 지도 내용에 대한 대안은 무엇인가.

II장에서는 자연수 개념에 대한 자연수 개념에 대한 역사적, 수리철학적 연구들을 분석해 보겠다. 이를 바탕으로 교수학적 이론으로서의 자연수 개념에 대한 내용을 추출할 것이다. III장에서는 연구문제 1, 2에 대하여 자연수 개념에 대한 학습이 처음 이루어지는 초등학교 단계에서 그 지도 내용에 대한 특징 분석 및 대안을 살펴보겠다.

* 접수일(2010년 9월 11일), 수정일(1차 : 2010년 10월 28일, 2차 : 2010년 11월 8일), 게재확정일(2010년 11월 8일)
* ZDM분류 : F21
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 자연수 개념, 셈수, 기수, 순서수, 측정수

II. 자연수 개념에 대한 고찰

1. 자연수 개념에 대한 역사적·수리철학적 고찰

자연수 개념에 대한 연구는 역사적으로 그리고 수리 철학적으로 어떻게 이루어져 왔는지 살펴보겠다.

가. 자연수 개념에 대한 역사적 고찰

우선 자연수 개념에 대하여 역사적으로 어떻게 연구되어 왔는지를 살펴보겠다. 먼저 고대시대부터 살펴보자. 인간은 Pythagoras 시대(B.C. 500년경) 이후나 B.C. 2500년 경의 바빌로니아 수학의 출현 이후에 혹은 그보다 더 일찍부터 “수는 무엇인가?”라고 자문해 왔다. 수에 관한 철학을 처음으로 구성한 것은 기원전 200~500년의 그리스인이다. 그들은 “수는 무엇인가?”라는 질문에 대답하기 위해, 2500년 동안에 실제로 도전을 받지 않는 이론을 발전시켰다(Brainerd, 1979). 그리스 수 철학에 가장 중요한 두 철학자는 Pythagoras와 Plato이며, 이 외에 수개념과 관련하여 고대 그리스를 대표하는 학자로는 Aristotle, Euclid 등을 들 수 있다(Heath, 1956).

Pythagoras는 이 질문에 대하여 수는 있는 그대로의 모든 것이라고 정의 내렸다. 그리스 철학의 일반 원리로 “만물은 물이다”와 “만물은 불이다”가 있는데, Pythagoras는 이와 같은 방식으로 “만물은 수이다”로 수에 대하여 접근하였다. “만물은 수이다” 이론에는 나무와 돌의 존재성과 같은 의미에서 수가 존재하며 단지 상상의 산물만을 의미하지는 않는다. Pythagoras가 수학자이자 철학자인 반면 Plato은 전적으로 철학자였다(Brainerd, 1979). Plato은 고대 세계의 수 지식에 관한 최후의 인물이다. 그는 수의 성질은 냄새, 빛깔, 그리고 맛과 같은 성질과는 달리 매우 추상적이라고 하였다. Aristotle은 개념이나 지식은 물질적인 세계에 기원하며 감각의 작용을 통해 얻어진다고 보았다. 그는 수와 크기 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다는 입장이었다(Moreno-Armella & Waldegg, 2000).

우리에게 알려져 있는 자연수에 관한 첫 번째 논리적 취급은 Euclid의 《원론》 7, 8, 9권에 나와 있다. 특히 원론 7권에서 단위와 수개념을 정의의 형식으로 제시하고 있는데 구체적으로 수개념이 정의되기는 원론이 처음으로 다음과 같다.

정의 1 : 단위는 존재하는 사물들 각각을 하나라고 부르게 하는 것이다.

정의 2 : 수는 단위들로 이루어진 다수이다.

Euclid는, 존재하는 사물의 각각을 하나라 부를 수 있는 단위(unit)와, 단위가 몇 개 결합된 크기로서의 수(number)와 같은 정의를 도입하였다(Klein, 1980). 위의 정의에 따르면, 수는 단위의 모임이며, 단위는 수를 발생시키는 원리로서 개별적이고 구체적이며 불가분인 사물의 단수성(singularity)과 관련된 특징이 추상적으로 나온 개념이다. 그러므로 수는 이산적인 집합에만 적용되며, 단위의 불가분성은 이산적인 양의 본질이다(Clason, 1968). Euclid에게 수는 그 자체로 추상화된 형식이라기보다는 물리적 세계를 설명하기 위한 수단이었던 것으로 보인다. 이렇게 수에 대한 고대 그리스 학자들의 관심은 주로 철학적인 부분에 대한 것으로, 수를 이산량과 관련된 것으로 보고 연속량과 관련된 크기 개념과는 분명하게 구분하여 사용하였다.

중세기는 과학적 및 수리적 발견이 매우 드문 시기로 수 지식을 수 점술에 비하시키는 등 수 지식에 긍정적으로 공헌한 바가 거의 없다. 물론 이 시기 이슬람에서는 그리스 선조들이 했던 방식으로 그리스의 자연수와 유리수에 0(영)을 포함시키고, 오늘날의 수 기호를 만드는 등의 몇 가지 독창적인 공헌을 하기도 하였다(Clason, 1968).

Newton의 산술에 관한 연구는 그가 한 다른 많은 수학적 연구에 비해 적은 편이었으나, 그가 제시한 수개념은 매우 널리 수용되었다. 그는 수를 ‘어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양에 의해 추상화된 비’라고 정의한다(Newton, 1769; Clason, 1968). Newton의 이러한 정의에 의하면, 수는 사물들을 비교함으로써 유도되는 추상물이다. 이산양에서는 개개의 사물 중에서의 하나가 비교의 단위가 되며, 연속양에서는 특정 양의 한정된 부분이 단위가 된다. 수에 대한 Newton의 정의는 주로 연속양의 경우에 초점을 둔 것이다. 연속양의 경우 자연스러운 단위가 존재하지 않고, 특정 양의 한정된 부분이 단위가 되며, 양은 이러한 단위와 비교함으로써 평가된다(Brooks, 1904). Kant는 수의 수학적 존재는 인간의 정신적 창조물로 보며 인간의 정신을 떠나서는 실재하지

않는 추상적인 존재로 본다(임정대, 1996). 고대 그리스에서 수개념을 주로 철학적 관점에서 보았다면, 이와는 달리 중세 이후에는 수학자들이 수개념을 다양한 관점에서 탐구하였다. 그들은 주로 수학으로 자연 현상을 설명하였으며, 수를 물리적 양과 관련하여 설명하고자 하였다. 이 과정에서 수는 확장되어 이산량에서 연속량까지 나아가게 되었다. 수개념에 있어 이산량과 연속량의 구분이 파기된 것이다.

근대 시대인 19세기에 이르러 수의 학습이 어린이에게로 적용되면서 수개념에 대한 심리학적, 교육학적 논의가 이루어지기 시작하였다. 19세기 이후의 자연수 개념에 대한 논의는 II장의 2절 교수학적 이론으로서의 자연수 개념에 대한 고찰에서 살펴보겠다.

나. 자연수 개념에 대한 수리철학적 고찰

수리철학은 수학 교수·학습 이론을 구축하는 데 사상적 방향과 근본 원리를 제공하며, 수학 교수·학습에 관련된 여러 개념은 수리철학적 관점에 의존한다. 자연수 개념에 대한 연구도 수리철학적 고찰이 선행되어야 할 것이다. 수리철학적 연구는 수학적 지식을 확실한 진리라고 보는 절대주의적 관점에서 수학적 지식은 상대적 관점으로 구성된다는 상대주의적 관점으로 흘러가고 있다.

절대주의적 관점에서 수학적 지식은 확실한 진리로 존재함을 인정하고 그에 대하여 논하게 되는 반면, 상대주의적 관점에서 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 타당성이 있는 것도 아니라는 입장을 취한다(Ernest, 1991). 본 연구는 자연수 개념에 대하여 알아보는 것이므로 자연수 개념의 존재 자체를 인정하고 그 존재에 대한 이해가 선행되어야 한다. 이를 위하여 자연수 개념에 대한 역사적 연구를 살펴보고, 이어 관련된 수리철학적 연구를 살펴보고자 한다. 따라서 자연수 개념이 수리철학적 입장에서 어떻게 받아들여지고 있는지에 대하여는 절대주의적 관점에서 살펴보는 것이 보다 적절할 것으로 생각된다.

수리철학의 절대주의적 흐름은 고대 그리스 시대부터 19세기 초반까지 이어져 온 플라톤 주의와 19세기 말부터 20세기 초반까지의 현대수리철학으로 나눌 수 있다. 후자는 논리주의적 사조에서 직관주의, 그리고 형식주의로 흘러왔다. 이러한 수리철학의 흐름 속에서 자연수 개념은 어떻게 연구되어 왔는지 살펴보겠다(Ernest, 1991).

먼저 고대 그리스 시대부터 19세기 초반까지 이어 온 플라톤주의의 경향에서 보자. 수학적인 입장에서 수에 관한 가장 창의적이고 성공적인 최초의 이론은 1887년에 발표된 Dedekind의 수에 관한 연구업적이다. 그는 자연수의 개념을 '집합'과 '대응'이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 완벽하게 구성할 수 있음을 보여주었다. 그 후 1891년, 그의 이론을 바탕으로 자연수가 갖는 측정의 의미를 찾아내어 공리로 제시한 것이 Peano의 이론이다. Dedekind의 이론에서 자연수 전체의 집합은 하나의 기본 원소와 하나의 사상(대응)에 의해 차례로 얻어지는 상(image) 전체로 구해진다(Clason, 1968). Peano는 그 중에서 자연수 계열만이 만족하는 특성을 찾아내고 이것을 공리로 정하였는데, 바로 Peano 공리이다. 이 공리계에서는 0, 자연수, 후자를 무정의 용어로 하고 있으며, 다음과 같다.

1 1은 자연수이다.
2 x가 어떠한 자연수라면, x의 직후 후속항은 또한 자연수이다.
3 x와 y가 두 개의 자연수이고 x와 y가 직후 후속항으로서 동일한 자연수를 갖는다면, x와y는 동일한 자연수이다. 즉, 두 개의 다른 자연수는 동일한 직후 후속항을 갖지 않는다.
4 1은 어떠한 자연수에라도 그 직후 후속항이 되지 않는다.
5 한 항이 속하고 모든 자연수의 직후 후속항이 속한 어떤 집합이 있다면, 자연수는 이 집합에 속한다.(수학적 귀납법의 원리)

Peano는 이 다섯 개의 공리를 참으로 만드는 일반적인 개념("1", "1, 2, 3, ……", "~보다 1이 큰")과 다른 정의되지 않는 개념에 대한 해석이 있다고 인정했다. 사실, ① 첫항이 있고, ② 마지막항이 없고, ③ 반복되는 항이 없고, ④ 그래서 첫항에서 유한한 단계의 수로 어떤 항에 도달할 수 있는 항의 어떠한 집합도 모든 공리를 참으로 만든다. 이러한 속성을 가진 항의 집합은 소위 단순 무한수열이다. Peano는 수개념에 대하여, 자연수 체계는 앞의 네 가지 조건을 만족시키는 어떠한 집합도 공유하는 속성으로 생각될 수 있다고 주장하였다. 즉

"수는 추상화에 의해 이 모든 체계에서 나온 것이다. 다시 말해서 수는 원초적 명제에서 선언된 모든 속성을 가진 체계이며 이것만을 가진 체계이다."(Russell, 1903, p. 125; Brainerd, 1979).

이후 현대수리철학의 한 흐름으로 논리주의 수리철학을 대표하는 Frege의 자연수에 대한 입장은 다음과 같다. 일반적으로 수학은 수나 또는 어떤 대상의 개개의 성질보다는 같은 종류의 수 또는 대상을 하나의 집합으로 해서 다루는 것을 특성으로 하고 있다. 집합론은 어떤 수나 수학의 대상이 항상 하나의 성질에 의해 규정된다고 보고 그러한 성질을 갖는 대상 전체가 하나의 집합을 정의할 수 있다고 본다는 정신이 기초가 된다. 가령, 12개의 원소를 갖는 집합은 일반적으로 무한히 많이 존재할 수 있다. 그러한 집합마다 원소의 수는 12라는 공통된 성질 하나가 있다고 볼 수 있다. 따라서 12개의 원소를 갖는 집합 전체의 집합을 생각하면 그 집합의 집합은 '12'라는 수에 관한 어떤 공통된 성질을 갖는 집합으로 생각할 수 있다. 그러한 경우 수 12를 이 집합의 집합으로 정의하는 것이 Frege의 방법이다(임정대, 1996).

자연수에 대한 Frege의 이해에 대하여 Russell은 다음과 같이 말하면서 수란 무엇인가에 대한 답을 제시한다. 수에 관한 정의를 구하려 할 때, 가장 먼저 밝혀야만 하는 일은 지금 구하고자 하는 의문의 진정한 뜻을 먼저 밝히는 것이다. 많은 철학자들이 수의 엄밀한 정의를 구하려고 노력하면서도 실은 '수' 그 자체와는 달리 어떤 사물의 개수에 대한 정의를 주고 있다. 마치 '사람'의 개념이 개개인이 갖는 특성의 공통된 특질을 의미하는 것과 같이, '수'란 각 수마다 갖는 성질의 어떤 공통된 특질을 의미한다(임정대, 1996).

따라서 어떤 사물의 개수는 수의 한 예가 아니고 어떤 특정한 수의 예에 불과하다. 가령, 세 사람은 '수' 3의 한 예고, 수 3은 수의 한 예이다. 그러나 세 개의 사물이 수의 한 예는 아니니다. 어떤 하나의 '수'가 그 수만큼의 어떤 사물을 모은 것(집합)은 아니다. 가령, 수 '3'이 김상용, 이복동, 박이쁜 세 사람을 모은 것(집합)은 아니며, 단지 그것은 세 개의 사물을 모은 것에 공통인 어떤 무엇이다. 따라서, 세 개의 사물을 모은 것은 이와 다른 개수의 사물을 모은 것과 구별지어지는 것이다. 다시 말하면, '수'란 어떤 사물을 모은 것 즉 그 수 만큼인 개수의 사물을 모은 것에 특징 지워지는 어떤 무엇이라고나 할 수 있다(임정대, 1996).

수학을 기호화하려는 노력은 오래전부터 있어왔으나, 이를 오늘날 현대 논리학의 수준으로까지 끌어올리게 한 것은 Frege와 Peano의 공로가 크다고 할 수 있다. Russell은 이들의 연구를 종합 정리하고 수학을 논리학위에 건설할 수 있다는 논리주의적 입장에서 연구하였다. Cantor는 자연수를 집합에 기초하여 정의하였지만 직관이나 사고와 같은 심리적 요소와 분리하여 생각하지 않았다. 그의 증명은 우리 인간으로서 낱낱이 확인할 수 없는 무한소수로 표시된 실수에 대해서도 그 존재성을 인정하고 있다. 이렇게 논리주의 입장은 자연수 및 자연수와 관련된 정리에서 주장하는 어떤 존재로 그 자체로 존재한다고 본다는 점에서 실재론에 가깝다(임정대, 1996).

직관주의를 주장하는 Brouwer에 따르면 수학적 개념이나 대상은 수학에 관해 생각하는 정신과 독립해서 존재하는 것이 아니고 정신 활동에 의해 얻어지는 것이라고 주장한다. Brouwer에 의하면 자연수 전체는 차례차례로 만들어지는 과정으로 파악되는 것이며 결코 완성된 어떤 무엇도 아니라고 보았다. 다시 말하면 자연수란 그 전체가 생성되어지는 것이지 존재하는 것이 아니라는 뜻이다. Kant가 시간에 대한 직관이라는 선험성에 비추어 수개념을 설명하였다면, 직관주의자들은 직관이라는 인간의 정신능력을 신장하고, 그 직관에 의해 자연수 전체를 인식한다고 볼 수 있다.

수리 철학으로서의 형식주의는 수학이 아무런 의미가 없는 기호에 의해 형식화된 체계에 불과하다고 보는 입장이다. 즉, Cantor의 집합론에 수반된 역설을 해결하기 위해 Hilbert가 수학을 기호에 의한 형식적 체계로 파악하려고 한 것을 그 중심으로 볼 수 있다. 형식주의 입장에서는 수학의 체계를 형식화하면 모든 다 불필요한 다의적인 해석을 극복할 수 있다고 본다. 즉, 수학의 법칙의 의미는 무엇이며, 참을 알기 위해서는 어떻게 해야하며 수가 존재하느냐와 같은 문제는 그 자체가 뜻이 없게 된다. 왜냐하면 형식화한 수학은 의미나 내용이 없는 기호의 게임에 불과하기 때문이다. 즉, 형식주의에서는 수학적 존재의 진리성, 의미, 존재성 등에 대한 문제는 아무런 의문의 여지가 없다고 본다. 자연수 개념에 대한

수리철학적 고찰을 사조에 따라 정리해 보면 다음과 같다.

<표 1> 자연수 개념에 대한 수리철학적 연구의 흐름

플라톤주의	논리주의	직관주의	형식주의
ㅇ Dedekind : '집합'과 '대응'의 두 원시 개념으로부터 자연수 개념을 완벽하게 구성할 수 있음 ㅇ Peano : 자연수 체계는 피아노 공리 체계에서 나온 것	ㅇ Frege : 같은 성질을 갖는 집합 ㅇ Russel : '수'란 각 수마다 갖는 성질의 어떤 공통된 특질	ㅇ Brouwer : 자연수는 그 전체가 차례차례 생성되어 지고 있는 것, 존재하는 것은 아님	ㅇ Hilbert : 수학은 의미 없는 기호에 의해 형식화된 체계

자연수 개념이 역사적·수리철학적으로 어떻게 연구되어 왔는지에 대하여 살펴보았다. 본 연구가 자연수 개념의 지도에 대하여 우리나라 교육과정에 어떻게 제시되고 있는가에 대한 연구이므로 다음 절에서는 교수학적 관점에서 자연수 개념의 연구에 대하여 살펴보도록 하겠다.

2. 교수학적 관점에서 자연수 개념에 대한 고찰

자연수 개념에 대하여 역사적 입장과 수리철학적 입장에서 어떻게 연구되어 왔는지를 살펴본 바에 의하면 자연수 개념은 여러 입장으로 설명될 수 있는 복잡한 개념이다. 본 절에서는 수학교육에 보다 초점을 두어 자연수의 의미에 대하여 여러 측면에서 논한 것들을 살펴보겠다.

가. 교수학적 이론으로서 자연수 개념에 대한 제연구

교수학적 이론으로서 자연수 개념에 대한 연구로는 수를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미로 본 Thornkike(1922), 심리학적 수 발달 이론과 그것을 지지하는 Piaget(1969), . 수를 측정 활동의 산물로 보는 Dewey(1985), 수개념은 단일하거나 불변하는 것이 아니라 변화하는 것이라는 입장의 Confrey(1980), 수개념의 다양한 측면에 대한 교수현상학적 분석을 한 Freudenthal(1973, 1983)의 논의를 살펴보면서 자연수 개념에 대한 제연구에 대하여 살펴보겠다..

20세기에 이르러 1920년대에는 Thorndike를 비롯한 연결주의 심리학자들의 주장이 받아들여지게 되었다. 연결주의 심리학에서는 수개념에 관심을 두기보다는 기본적인 계산 기능을 훈련하는데 관심을 두었다. 그러나 Thorndike는 자연수가 갖는 의미 자체를 부정한 것은 아니다. 실제로 그는 자연수의 의미를 계열, 집합, 비, 관계의 네 가지 의미로 설명하였다. 이 네 가지 의미는 초등학교에서 특히 중요하다. 사(4, 넷)은 수 계열에서 3(삼, 셋)과 5(오, 다섯) 사이에 있다. 이것은 이산수로 특정 크기의 집합의 이름이기도 하며, 양에 대한 지칭이기도 하다. 또한 1 더하기 3의 결과이기도 하고, 10에서 6을 뺀 수, 또는 2 곱하기 2, 8의 반이기도 하다. 수의 의미를 안다는 것은 이러한 제반 사항들에 대해서 어느 정도 안다는 것을 의미한다(Thorndike, 1922, p. 6). 즉 4명일 때 4는 집합수로서 이산량이고, 4kg일 때 4는 측정수로서 연속량의 의미가 있다.

Piaget(1965)는 수개념의 근거를 수 세기나 이미지에 두지 않고 행동 및 조작과 관련된 심적 구성에 두었다. 그는 자연수를 기수와 순서수로 구분하는 것은 자연수를 단일 개념으로 정의하고 있지 못한 것이며, 수를 개별적으로 정의하는 결과가 되어 1로부터 차례로 생성되는 자연수열의 기본적인 특성을 소홀히 다루게 된다고 비판한다. 이에 집합과 순서 관계의 구성이 수의 구성에 선행한다고 보고 있지 않고, 자연수는 집합과 순서 관계의 종합이라 가정한다. 따라서 집합, 순서 관계, 1대 1 대응을 서로 관련시키면서 그 조정을 증진시키는 지도 방법을 지지하였다.

또한 Piaget(1969)는 심리학적 수 발달 이론과 그것을 지지한다고 생각되는 실증적 연구결과를 제시했다. 그는 수개념이 선천적일 수 없다고 결론을 내리면서, 일반적으로 수학을 그리고 특정하게는 수를 논리적 개념에 환원시킬 수 있는 것으로 보는 것이 옳다고 결론지었다. Piaget는 일대일대응 개념이 두 유목의 항이 똑같이 많다는 사실뿐만 아니라 또한 한 유목의 각 항에 대해 다른 유목의 특정한 항이 대응되며, 그 역이 성립한다는 사실을 수반한다고 믿는다(Brainerd, 1979). Piaget의 수학적 인식론에 비추어 보면 그가 수개념의 근거를 수 세

기나 이미지에 두지 않고 행동 및 조작과 관련된 심적 구성에 둔 것은 당연하다. 그는 논리적 조작과 관련된 수의 구성 문제를 연구하였는데 수의 구성은 논리적 조작의 발달과 병행하며 수 이전 시기는 논리적 조작 이전 수준에 대응한다는 것이 그의 가설이다.

Dewey는 수를 객관적인 지식으로 생각하지 않고 측정을 인간 활동의 소산으로 간주하였다 (Dewey&McLellan, 1985). 측정 활동을 통해서 수의 발생의 과정을 아동에게 경험시키는 형태로 수 교육을 시도하고 있어, 구성주의 수학 교육론의 구체적인 모습을 제시하고 있다. Dewey에게 수는 구체물의 성질이 아니라 측정 활동의 결과이므로 수개념을 지도할 때는 구체물을 다루는 활동을 중시하였다(Brainerd, 1979).

Confrey(1980)는 하나의 개념은 단 한 가지의 변하지 않는 영원한 것이 아니라, 변하고, 변함으로써 몇몇 현상을 잘 설명할 수 있게 된다고 하면서 수개념을 정의한다. 수개념은 변하지 않는 것도 아니고 절대적인 것도 아니다. 여러 가지 서로 다른 수개념은 서로 다른 문제들을 해결할 수 있으며 서로 다른 딜레마를 나타내기도 한다. 그는 수개념을 집합 또는 류(class)로서의 수개념, 순서수로서의 수개념, 비로서의 수개념, 무한소수로서의 수개념, 점-수 대응으로서의 수개념, 조작적 수개념의 여섯 가지로 설명한다.

집합 또는 류로서의 수개념은 집합수적인 측면이며, 순서수로서의 수개념은 그 용어 그대로 순서수적 속성을 갖는 수개념이다. 비로서의 수개념은 유리수적 측면까지를 포함하는데, 산술과 기하를 서로 연관지어서 알아보는 가운데 생겨난 것으로 길이나 넓이, 부피와 같은 크기들 간의 관계에서 발생하는 수를 의미한다. 무한소수로서의 수개념은 실수까지 포함되는 수개념으로, 실수 전체를 포함하지는 못하며, 점-수 대응으로서의 수개념에서 드디어 수와 수직선의 일대일 대응이 가능하게 된다. 마지막으로 조작적 수 개념은 산술 법칙을 근거로 한 대수적인 수개념이다. 따라서 Confrey가 생각한 수개념 중 자연수가 갖는 속성은 집합 또는 류(class)로서의 수개념과 순서수로서의 수개념, 그리고 약간의 비로서의 수개념이 해당할 것이다.

Freudenthal(1991)은 수학은 상식적인 것이며, 수나 기하의 발달에서 보듯이 상식에서 출발해서 점진적으로 체계화·조직화되는 순환적 과정에 의해 발달해 간다고 본다. 개인에게 수학이 어떻게 발달하는가를 자연수 개념의 발달을 통해 살펴보면 다음과 같다. 아동은 초등학교 1학년 정도만 되어도 계속해서 제한 없이 셀 수 있다는 것을 파악하며 이것은 중요한 사건이다. 아동들에게 숫자를 쓰도록 하면 1, 2, 3, …, 19, …, 29, …, 99와 같은 식으로 계속 써 내려가다가 '그렇게 그렇게 계속된다'는 것을 알게 된다. 사실상 '그렇게 계속된다'라고 하는 것이 수학이고, 이것이 바로 인류가 생각해 낸 최초의 수학이며 현대적인 수학인 것이다.

아동들이 써 내려간 것은 수의 열이라기보다는 수의 기호이고 그 원리를 형식화할 수는 없지만, 그런 원리를 다루고 무한을 파악했다는 것만으로도 훌륭한 성취이다. 아동들은 마음속에 실타래처럼 풀려 나오는 무한을 발견한 것이고, 이것이 수학의 알파요 오메가인 것이다. 수세기→기본적인 산술→체계적인 수세기→무한소수→수열→무한급수와 그 극한의 수렴에 이르기까지 '그렇게 그렇게 계속된다'고 하는 원리는 계속되며, 이런 모든 무한 과정들이 마음 속에서 시간에 따라 풀려 나오는 것으로 상상된다.

이것이 바로 Brouwer가 자연수는 시간에 따라 마음 속에 구성된다고 표현했던 의미이고 기본 직관이다. 이런 전체적인 과정에 대해 Freudenthal은 '아직은 무한 개념을 포함하지 않은 가장 원시적인 수개념인 소박한 셈수로부터 완전 귀납법의 소박한 실행 그리고 그것을 의식적으로 인식하게 되고 형식화하고 마지막으로 집합론으로 공리화하기까지 점점 더 세련된 수개념이 출현해 왔다.'(Freudenthal, 1973)고 한다.

자연수는 가장 상식적인 구어로 수를 세는 것에서 시작해서 여러 수준을 거쳐 완전 귀납법으로 형식화되고 공리화에 이르는 것으로, 수학의 가장 특징적인 측면을 나타낸다. 이와 같이 수학은 상식에서 출발해서 여러 수준을 거쳐 고도의 추상적이고 형식적인 수학으로 성장해 가는 것으로 볼 수 있으며, 이것은 개인이나 인류나 동일하다는 것이다. 이와 같이 Freudenthal이 셈수를 수학의 초석으로 보고 있는 것은 직관주의의 영향을 받은 것이라 볼 수 있다(정영옥, 1997). 이상으로 살펴본 자연수 개념을 정리해 보면 다음과 같다.

<표 2> 자연수 개념에 대한 제연구

Thor-ndike	Piaget	Dewey	Confrey	Freude-nthal
ㅇ집합 ㅇ계열 ㅇ비 ㅇ관계	ㅇ수는 행동 및 조작과 관련된 심적 구성 ㅇ기수와 순서수를 통합하여 봄	ㅇ측정 활동을 통해 수의 발생 과정을 아동이 경험하도록 함	ㅇ집합 또는 류(class)로서의 수개념 ㅇ순서수로서의 수개념	ㅇ 셈 수가 자연수 및 수 학 의 초석

이상과 같이 자연수 개념에 대한 다양한 논의들을 통해 보건데 수개념은 한 가지로 규정하기 어려운 복합적인 것이라는 사실을 보여주는 것이다. 그리고 그러한 수개념의 다양한 측면이 어떻게 설명되고 있는지 보여주고 있다. 수개념의 어떠한 측면도 다른 입장을 대신하기에는 부족하다.

수를 있는 그대로의 모든 것이라고 정의내린 Pythagoras, 수의 성질은 매우 추상적이라고 한 Plato, 수의 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다는 Aristotle의 입장, 그리고 Euclid는 존재하는 사물의 각각을 하나라 부를 수 있는 단위와 단위가 몇 개 결합된 크기로서의 수를 바라보았다. 중세기 Newton은 수를 어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양에 의해 추상화된 비라고 정의하였고, Kant는 선천적인 형식으로 주어진 직관, 즉 정신 능력의 산물로 보았다.

19세기에 이르러 Dedekind는 자연수의 개념을 '집합'과 '대응'이라는 두 원시 개념으로부터 논리적으로 구성하였고, Peano는 그의 이론을 바탕으로 자연수가 갖는 셈수적 측면을 찾아내어 공리로 제시하였다. Dewey는 수는 구체물의 성질이 아니라 측정 활동의 결과이므로 수개념은 구체물을 다루는 활동으로 지도해야 한다고 보았고, Thorndike는 자연수의 의미를 계열, 집합, 비, 관계의 의미로 보았다. Piaget는 수개념의 근거를 수세기나 이미지에 두지 않고 행동 및 조작과 관련된 심적 구성에 두었다

Brouwer는 자연수 전체가 차례차례로 만들어지는 과정으로 보았으며, Frege는 집합으로서 수개념을 생각하였다. 또한 심리학적 수 발달 이론과 그것을 지지하는 Piaget, 수개념의 다양한 측면에 대한 교수현상학적 분석을 한 Freudenthal, 수개념은 단일하거나 불변하는 것이 아니라 변화하는 것이라는 입장의 Confrey에 대하여 고찰해 보았다. 그렇다면 학교 수학에 보다 근접하여 자연수 개념을 살펴보자면 교수학적 이론으로서의 자연수 개념이 될 것이다.

위와 같이 자연수 개념은 여러 입장으로 설명될 수 있는 복잡한 개념이다. 자연수 개념에 대하여 역사적 고찰 및 수리철학적 고찰을 한 후에 본 절에서는 수학 교수학적 입장에서 자연수 개념에 대한 제 연구에 대하여 살펴보았다. 자연수 개념에 대한 연구들을 정리하면 다음과 같다.

<표 3> 자연수 개념에 대한 연구들

학자	견 해
Aristotle	수의 개념은 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어짐
Euclid	단위와 단위 몇 개의 결합된 크기로서의 수
Newton	어떤 양에 대하여 다른 종류의 양에 의해 추상화된 비
Dedekind	'집합'과 '대응'의 두 원시 개념으로부터 자연수 개념을 완벽하게 구성할 수 있음
Peano	자연수가 갖는 셈수적 측면을 찾아내어 공리로 제시
Dewey	수는 측정 활동의 결과
Thorndi-ke	자연수의 의미는 집합, 계열, 비, 관계의 의미
Piaget	수개념의 근거는 행동 및 조작과 관련된 심적 구성
Bruower	자연수 전체는 차례차례로 만들어지는 과정
Frege	집합으로서의 수개념
Confrey	자연수가 갖는 속성은 집합 또는 류(class)로서의 수개념과 순서수로서의 수개념, 비로서의 수개념
Freudent-hal	가장 원시적인 수개념인 소박한 셈수로부터 수개념 출발

자연수 개념에 대한 연구는 살펴본 바와 같이 다양한 입장이 있다. 이러한 입장들을 학교 수학에서 자연수 개념을 처음으로 학습하는 초등 수준에서 정리해 보면 다음과 같다. 첫째는 Freudenthal, Bruower, Peano, Piaget 등과 같이 자연수 개념은 가장 원시적인 수개념인 소박

한 세기라는 조작 활동에서 출발한다고 생각하는 입장이다. 둘째는 Throndike, Frege, Dedekind, Congrey, Piano 등과 같이 자연수 개념을 집합으로서의 수개념으로 보는 입장이다. 셋째는 Thorndike, Congrey와 같이 수열이나 계열과 같이 순서 속에서 순서수로서 수는 보는 입장이다. 넷째는 Euclid, Newton, Dewey, Thorndike, Piaget 등과 같이 단위와 다른 단위와의 관계를 특정이라는 조작적 활동의 결과를 수로 생각한다는 입장이다.

자연수 개념에 대한 학자들의 이러한 연구 결과 외에도 학교 수학에서, 특히 자연수 개념을 처음으로 학습하게 되는 초등학교 수준에서 학생들이 사용하게 되는 자연수 개념에는 이름수(명목수)적 측면도 있다. 이름수는 수학적인 대상이 아니므로 크기를 비교하거나 순서를 짓는 일은 무의미하다. 운동 선수의 등번호나 출석 번호, 아파트의 동이나 호수 등은 수학적인 대상이 아니므로 크기를 비교하거나 순서를 짓는 일은 무의미하다. 예를 들어, 운동 선수의 등번호 4번은 반드시 3번 선수의 다음 번 선수를 의미하는 것이 아니며 마찬가지로 305호는 306호보다 작다든가 310동 다음에는 311동이라는 순서는 의미가 없다. 311동이 있을 수도 있지만 없을 수도 있는 것이다. 이름수는 대상을 분류할 때 의미있게 사용된다.

본 연구에서는 순서나 크기, 관계의 의미를 갖고 있는 수학적인 대상을 지칭할 수 있는 자연수 개념에 연구의 초점을 두겠다. 이렇게 본다면 자연수 개념을 학교 수학에서 처음 학습하는 초등학교 수준에서는 자연수 개념을 다음의 네 가지 측면, 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면으로 볼 수 있을 것이다. 이 네 측면 각각에 집중하여 보다 상세히 알아보겠다.

나. 학교 수학에서 자연수 개념의 네 측면

자연수 개념에 대한 학자들의 견해가 다양하지만 어느 한 견해가 다른 견해를 대신할 수는 없다. 그만큼 자연수 개념은 발생 과정이나 그 성격을 여러 측면에서 볼 수 있는 것이다. 학교 수학에서 처음으로 학습하는 내용이 자연수 개념이라면 초기 수학 학습에서 이루어지는 자연수 개념의 속성은 위의 연구만큼 다양한 개념들을 모두 학생들에게 가르칠 수는 없을 것이다. 학교 수학 특히 자연수 개념을 처음으로 학습하는 초등학교에서는 앞 절에서 언급하였다시피 세기를 중심으로 자연수 개념을 구성하는 셈수적 측면과, 자연수 개념을 집합의 농도로 생각하는 기수적 측면, 집합 내에서의 관계적 수로 보는 순서수적 측면, 그리고 측정 활동의 결과로 보는 측정수적 측면의 네 측면으로 볼 수 있을 것이다. 학교 수학에서 생각할 수 있는 자연수 개념의 네 측면에 대하여 살펴보겠다.

(1) 셈수적 측면

세기는 아동이 최초로 언어화하는 수학이다. 말로 수를 세는 것이 사물을 세는 것에 앞서기도 한다. 아동의 세계에는 세어야 할 아주 많은 종류의 사물이 존재하며, 세어지기를 기다리고 있는 많은 사물들이 존재하고, 세는 것을 위해 제공될 수 있는 많은 새로운 사물들이 존재한다. 탁자에 둘러앉은 사람의 수, 코의 수, 눈의 수, 귀의 수, 심지어는 탁자 아래에 보이지 않는 발까지도 그 수를 셀 수 있다. 그런 집합에 수 계열을 적용하는 것은 수평적 수학화이다. 이런 수 중 일부가 서로 일치하는지에 대해 의문을 가지는 것은 수직적 수학화에 관한 문제이며, 이는 한 사람의 신체에서 어떤 그룹 내의 여러 신체로 '…만큼 많다'라는 관계를 추이하는 것에 의해서 그 대답이 분명해질 수 있다. 비록 기본이 되는 일대일관계를 명확히 제시하지는 않았지만, 이것은 타당한 답변이 된다. 수계열에서 '더 앞에'와 '더 뒤에'를 세었거나 센 것으로 간주된 집합이 '더 적은'과 '더 많은'으로 수평적으로 추이된다면 같은 것이 성립한다. 추이성은 수평적 수학화 경험에서 수직적 수학화 활동으로 발전시킬 수 있으며, 결국 현실 자체의 부분이 된다 (Freudenthal, 1983, pp. 86~89).

Klein에 의하면 센다는 것은 세는 대상을 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해서 각각에 다른 명칭을 부여한다는 것이다. 다른 명칭으로 세는 데는 단위가 필요하며, 셀 때는 단위 앞에 '일one'을 붙이게 된다. 이렇게 셈을 한 결과를 수라고 한다. 같은 류가 존재하기 때문에 단위 및 '일one'에 비추어 볼 때, (셈)수에서 순서는 중요하지 않다(Freudenthal, 1983, p. 75). 셈수란 자연수의 수열이며 수세기와 계산 활동에 필수 불가결한 것이다. 전통적으로 초등학교 수학에서는 수 세기를 학습한 후, 덧셈은 잇달은 수 세기로, 뺄셈은 거꾸로 세기로, 곱셈은 둘씩 셋씩 세기 등으로 지도하였다.

자연수열 1, 2, 3, …에서 무엇보다도 중요한 기본적인 성질은 1로부터 차례로 1을 더해 생성된다는 것으로 이를 형식화한 것이 수학적 귀납법의 원리이다. 이러한 자연수열의 기본 성질에 주목하여 이를 바탕으로 무한집합인 자연수 전체와 관련된 전칭명제를 증명하는 방법인 수학적 귀납법을 수학에 처음으로 도입한 사람은 Pascal이다. 셈수는 수학적으로 Peano의 공리 체계로 형식화된다. 그러나 괴델의 정리가 보여주듯이 어떤 공리체계도 원칙적으로는 불완전하다. 셈수에 대한 이해는 가장 기초적인 소박한 수세기로부터, 자연수의 무한수열에 대한 직관적 인식, 귀납적 정의의 암묵적 사용, 수학적 귀납법의 의식과 그 형식화, 셈수의 공리체계화에 이르기까지 다양한 수준으로 이루어질 수 있다.

(2) 기수적 측면

Russell은 자연수 계열을 기수와 같은 뜻으로 생각해야 한다고 하였다.

> 수는 본질적으로 유목에 적용할 수 있다. 그래서 어떤 유목개념(내포)이 주어질 때 이 유목개념이 적용 가능한 개체의 어떤 수가 있으며 따라서 그 수는 그 유목의 속성으로 간주될 수 있다(Russell, 1903, pp. 112-113; Brainerd, 1979에서 재인용).

다시 말해서 두 유목 R_x와 R_y가 주어질 때, R_x를 충족시키는 모든 속성 x에 대해 R_y를 충족시키는 y의 한 속성가가 대응되고, 그 역으로도 대응되면 "같은 수"라고 한다(Brainerd, 1979). 아동은 일찍 수세기를 익혀 개수를 알아보는데 이용하지만, 말뿐인 수세기(verbal counting)에 그치는 경우도 있다. 어린 아동은 비교적 일찍 수세기를 할 수 있다. 그러나 수를 세기는 하지만 셈수와 기수 사이의 관련성을 인식하지 못하는 경우가 많다. 심상으로서 수가 구성되기 전에 수세기를 할 수 있는 아동들이 많이 있는 것이다. Piaget는 이를 기수 개념의 결여로 보고 수의 보존을 기수 개념 구성의 준거로 택하고 있다. 보존 곧 어떤 자연수에 대한 불변성은 수학적으로 중요한 특성이나, Piaget는 자연수를 언급하고 있지 않으므로 보존이란 용어는 혼란을 야기한다.

집합에서 기수의 불변성은 수세기에서의 시간 경과, 시점 변화, 섞기 변형, 흩뜨리고 모으는 자연수 등 여러 가지 자연수 아래에서의 불변성을 생각할 수 있다. 1대 1 대응 아래에서의 불변성을 강조하고 서로 대등한 집합의 집합을 의식적으로 생각하게 하려는 것은 집합론의 영향을 받은 것으로 볼 수 있다(Piaget, 1969). Cantor의 집합론에 영향을 받아 이러한 측면에서 아동의 수개념 발달을 생각한 Piaget의 연구 결과를 바탕으로 한 학습-지도 이론은 '새수학'의 일반적 배경이 되었다.

자연수 개념을 기수 측면에 한정하는 것은 불가능하며, 기수 측면만을 너무 강조하는 것은 바람직하다고 할 수는 없다. 학생들은 1대 1 사상 아래에서 기수의 불변성과 기수 연산의 집합 모델을 이해하고 이용할 수 있어야 하며 보다 높은 수준에 이르면 이를 집합론식으로 형식화할 수 있어야 한다. 기수 개념은 무한 집합에 적용될 때 의미심장해지는 것이며 초등학교 수학에서의 자연수 개념의 근거로서는 효과적이지 못하다(우정호, 2001, pp. 186~187)는 견해도 있다.

그러나 자연수의 개념을 학습함에 있어 기수적 측면은 매우 중요한 입장이며, 초등학교 수학에서 자연수 개념의 지도를 할 때 기수적 측면에 관한 언급을 피할 수는 없다. 이에 초등학교에서 자연수를 다룰 때 기수적 측면에서는 유한 집합의 수는 얼마인가를 설명하는 측면으로 생각하면 될 것이다.

(3) 순서수적 측면

기수 개념과 대비될 수 있는 것이 순서수 개념이다. 순서수적 입장에는 자연수가 0, 1, 2, 3, …이라는 수열을 형성한다는 사실을 자연수의 본질적인 구성 원리로 파악하고 있는데, 최초의 자연수인 0과 후자에 대한 개념, 그리고 수학적 귀납법의 원리 등을 포함하는 Peano의 공리계로 자연수를 정의한다. 순서수 개념을 중심으로 한 이같은 정의는 개별적인 수의 의미에 관심을 기울이지 않으며, 전체로서의 자연수 체계를 생성하는 속성인 1씩 더해 나가는 규칙, 또는 순서 구조를 강조한다고 할 수 있다. 이때 개별 자연수의 의미는 비대칭적이고 추이적인 '순서 관계' 속에서 찾아야 한다(김남희 외, 2006, p. 28).

자연수 체계의 가장 현저한 특징은 그 고유한 순서짓기라는 관찰결과는 수의 관계론에서 나온다. 이러한 체계에서의 항은 단순 무한수열을 이루며, 그 항의 유한

부분집합은 유한수열을 이룬다. 우리는 1, 2, 3, ……을 말하거나 쓰거나 읽을 때, 그것은 동일한 불변의 순서로 우리의 앎 속에서 진행된다. 마찬가지로, 수를 물체에 배정할 때, 그 수는 언제나 같은 고정된 순서로 배정된다. 직관적으로, 이것은 순서의 성질이, 더 정확하게는 자연수를 특징지우는 특별한 순서짓기가 수개념의 의미를 알아내는 열쇠임을 시사한다. 이 추측은 자연수를 유한서수로서 밝혀본다는 이론에 대한 역사적 기원의 역할을 한다(Brainerd, 1979). 순서수적 측면의 이러한 특징은 셈수적 측면과 유사하다고 볼 수 있다.

그러나 셈수적 측면에서 진일보 하여 순서수적 측면에서 보면, 수는 순수하게 관계의 개념이다. 관계수란, 갖가지 관계의 관계수, 즉 모든 서로 상사인 관계의 집합을 원소로 하는 집합이다. 혹은 달리 말해서 하나의 관계수란, 그 속의 하나의 원소와 상사인 모든 관계의 집합이라고도 정의된다(Russell, 1919). 순서수로서의 자연수를 알아보려고 한 사람은 Dedekind이다. 자연수는 보통 산수에 수열을 형성한다. 서수는 모든 수열의 항이 공통적으로 가진 수이기 때문에, Dedekind는 자연수를 순서수적 측면에서 고찰하였다. "이 요소는 자연수 혹은 서수 혹은 단순히 수라고 불린다"(Dedekind, 1887, p. 68; Brainerd, 1979).

관계론적 견해는 자연수를 어떤 유형의 관계 영역에 있는 속성가에 환원시키는 것이다. 그러므로 개별 자연수는 관계에서 의미를 취한다. 수는 어떤 관계의 계통이다. 이런 의미에서 수에 대한 관계론적 접근방식은 총체적이라 할 수 있다.

Piaget는 수개념에 관해서, 관계론적 입장과 분류론적 입장을 동시에 취하였다(Brainerd, 1979). Brouwer는 유아라도 자연수의 무한계열에 대한 선천적 "직관"을 가지고 있다고 주장했는데, 수학에서 Brouwer의 직관주의적 입장은 Piaget의 철학으로부터 나온 것이라 볼 수 있다. 수학이란 정신에서 시작하여 정신에 자리 잡은 인간 활동이다. 수학은 인간의 정신의 외부에는 존재할 수 없다. 그러므로 수학은 실세계와 독립되어 있다. 정신은 기본적이고 분명한 직관을 인식한다. 이런 것들은 감각적이나 경험적인 것이 아니라 수학의 어떤 개념에 대한 즉각적인 확신들이다. 정수가 이런 것에 속한다. 기본적인 직관은 시간의 연속에서 일어나는 서로 다른 사건의 인식이다. "수학이란 시간의 경과에서 생긴 둘임의 주제(subject of twoness)가 모든 특별한 사건들로부터 추상화될 때 일어난다. 모든 이런 둘임의 공통 내용의 나머지 빈 형식이 수학의 원초적인 직관이 되고 새로운 수학의 주제를 반복하여 제한 없이 창조한다." 제한 없는 반복이란 Brouwer에게 있어서는 자연수를 차례로 구성하는 것을 의미한다(Klein, 1980).

(4) 측정수적 측면

Piaget에 의하면 길이 측정의 개념은 자연수 개념보다 조금 늦게 구성되지만 동일한 조작 활동이다. 길이를 측정하기 위해서 구간을 분할하는 것은 전체 내에 부분을 끼워 넣는 것과 대응되며, 단위의 전사(轉寫)는 계열화에 대응된다. 이 두 조작이 하나로 융합된 것이 바로 측정이라고 본다(Piaget, 1969). Piaget의 이러한 해석은 자연수가 측정수적 측면을 갖고 있다는 것으로 간주되며, 이는 측정을 통해서 수개념이 발생된다고 생각한 Dewey의 주장과 연결되는 것이다.

측정 활동은 측정하고자 하는 전체 양을 단위로 분해한 다음, 그 단위의 반복을 통하여 전체 양을 다시 재구성하는 활동이다. 측정을 통해 알게 되는 수는 전체량과 단위량 사이의 상대적인 관계, 즉 비(ratio)이다. 수는 측정 단위와 함께 나타내면 측정된 양의 절대적인 크기를 나타내지만, 수 그 자체는 전체량과 단위량이라는 두 양 사이의 상대적인 관계를 나타내는 것이다. 5개의 사탕 중 빨간색 사탕은 2개, 노란색 사탕은 3개가 있는 상황이 있다. 이 상황에서 노란색 사탕은 '3개'라고 하는 것은 측정된 양의 절대적 크기이다. 그러나 여기서의 '3'은 전체 사탕의 수(5)를 세기 위해 사탕 하나를 '개'라는 단위로 하여 측정할 때, 셋에 대응되는 관계인 것이다.

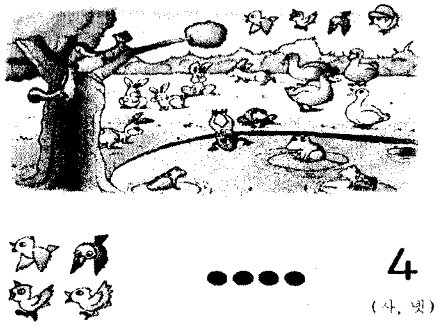
수 그 자체는 측정 단위인 양을 몇 배하면 측정될 크기가 되는 양을 만들게 되는지를 나타낸 것이다. 즉 Dewey가 말하는 변별과 관계짓기인 것이다. 이렇게 Dewey에게 있어서 수개념은 측정 활동을 통해 파악되는 전체량과 단위량 사이의 비인 측정수인 것이다(Dewey, 1972; 고정화, 2005).

살펴본 교수학적 측면에서의 자연수 개념을 정리하면 다음과 같다.

<표 4> 교수학적 측면에서 보는 자연수 개념

셈수적 측면	기수적 측면	순서수적 측면	측정수적 측면
ㅇ소박한 수세기 ㅇ1부터 차례로 1씩 더하여 생성되는 것	ㅇ집합의 농도 ㅇ수의 보존성	ㅇ수열 ㅇ자연수 집합의 순서 관계 강조 ㅇ관계수	ㅇ전체량과 단위량 사이의 상대적인 관계 ㅇ상대적인 수

자연수의 의미가 이 네 가지 측면만 있는 것은 아니나, 자연수의 초기 학습 시기에 이루어지는 수개념 형성을 위한 학습에서는 이 네 가지 측면이 주를 이룬다고 할 수 있다. 수가 사용되는 상황에 따라 자연수가 이 네 가지 측면에서 각각 한 가지 의미만을 갖는 것은 아니다. 예를 들어, 수 '4'을 알아보는 상황에서 수 '4'는 여러 측면에서 해석할 수 있다.



<그림 1> 수 알아보기(교육인적자원부, 2006a, p.10)

위의 그림에서 새가 모두 몇 마리인지는 새를 하나, 둘, 셋, 넷으로 세어 봄으로써 수 4를 알게 된다. 이때의 수 '4'는 셈수적 측면이다. 아래 그림에서 동그라미(집합) 안에 있는 새는 모두 네 마리라고 라면 이때의 '넷(4)'은 기수적 측면이다. 동시에 새라는 집합의 속성가, 즉 <그림 3>에서 '나무를 향하여 날아가는 새들 중 모자를 쓴 수는 넷째 번 새이다'라고 할 때의 '넷(4)'은 순서수적 측면이다. 또한 새(대상)는 마리(단위)를 요소로 보면 '네 마리'이다라고 하면, 대상, 단위, 수의 상호관계적 측면에서 분석한 것으로 측정수적 측면이 된다. 이렇게 자연수는 상황에 따라 한 가지 측면만을 갖고 있을 수도 있고, 여러 측면을 동시에 가질 수도 있다. 지금까지 자연수가 갖는 속성을 셈수, 기수, 순서수, 측정수적 측면에서 고찰해 보았다.

III. 우리나라 교육과정에 제시된 자연수 개념의 지도 방향 고찰

수개념을 처음으로 학습하는 초등 단계에서 접할 수 있는 자연수 개념을 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면의 네 가지로 볼 때, 각 측면에 대하여 우리나라 교육과정에서는 그 지도 방향이 어떠하며 또한 그 대안은 어떠한지에 대하여 살펴보겠다. 여기서는 특히 제7차 교육과정과 2007 개정 교육과정을 중심으로 초등학교 수학과 교육과정, 해당 교육과정 해설서, 그리고 자연수 개념에 대한 내용이 나오는 초등 1학년~4학년 수학 교과서 및 수학 익힘책을 중심으로 분석해 보았다(부록 참고).

1. 우리나라 교육과정에 제시된 자연수 개념의 지도 내용 분석

본 절에서는 II절에서 살펴본 교수학적 이론으로서의 자연수 개념의 네 측면이 갖는 속성을 기준으로 제7차 및 2007 개정 교육과정을 중심으로 자연수 개념의 지도 내용에 대한 분석을 하겠다. 그리고 다음 절에서 분석 내용에 따른 대안을 제시해 보겠다.

가. 셈수적 측면

셈수에 대한 이해는 가장 기초적인 소박한 수세기로부터, 자연수의 무한수열에 대한 직관적 인식, 귀납적 정의의 암묵적 사용, 수학적 귀납법의 의식과 그 형식화, 셈수의 공리 체계화에 이르기까지 다양한 수준으로 이루어질 수 있다. 수세기와 관련하여 제7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 교육과정 해설(IV)(1998)의 <1-가> 단계의 지도 내용에서 다음과 같이 언급하고 있다.

<1-가>
(가)수세기
자연수는 1, 2, 3, 4, 5,…처럼 1부터 차례로 하나씩 증가시켜 얻어지는 수이다(교육부, 1998, p. 40).

또한 2007년 개정 교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 같은 내용에 대하여 다음과 같이 제시하고 있다.

> <1학년>
> ①0과 100까지의 수 개념을 이해하여 수를 세고 읽고 쓸 수 있다.
> ∘수 세기 활동을 통하여 자연수의 여러 가지 의미를 이해하게 한다.
> 1학년에서 다루는 수의 범위는 0과 100까지의 자연수이다. 학생들은 학교에 입학하기 전부터 실생활에서 수를 접하고 수 세기 활동을 경험한다. 자연수를 지도할 때는 학생들의 이러한 경험을 바탕으로 수를 형식화하고 확장할 수 있게 한다.

이는 자연수열이 갖는 속성을 의미하는 것으로 볼 수 있다. 자연수열 1, 2, 3, …이 갖는 무엇보다도 중요한 성질은 이처럼 1부터 차례로 1을 더해 생성된다는 것이다. 셈수에 대한 이해는 가장 기초적인 소박한 수세기로부터, 자연수의 무한수열에 대한 직관적 인식까지를 교육과정에서 언급하고 있다. 세기는 아동이 최초로 언어화하는 수학이다(Freudenthal, 1991). 말로 수를 세는 것이 사물을 세는 것에 앞서기도 한다. 또한 교육과정에서 수세기와 관련된 내용은 다음과 같다.

> <1-가>
> (차)심화과정
> 수세기가 필요한 실제 장면에서 차례로 세기(하나, 둘, 셋,…또는, 스물다섯, 스물여섯, 스물일곱,…), 거꾸로 세기(쉰, 마흔아홉, 마흔여덟,…), 번갈아 세기(2사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 갑-셋, 을-넷,…,3사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 병-셋, 갑-넷, 을-다섯, 병-여섯,…등) 등 여러 가지 방법으로 수를 세게 한다(교육부, 1998, p. 41).
> <1-나>
> (가)수세기
> 50까지의 수세기 활동으로 바탕으로 100까지 수를 차례로 세어 보는 활동을 한다. 100까지 10씩 묶어 세기 활동에서 경우에 따라 '열, 스물, 서른, …'으로 세는 방법과 '십, 이십, 삼십, …'으로 세는 방법으로 능숙하게 차례로 셀 수 있도록 지도한다(교육부, 1998, p. 43).

나아가 여러 가지 수세기 방법을 활용해 보겠다는 측면에서

> <1-나>
> (바)여러 가지 수 세기 방법의 활용
> 수 세기가 필요한 생활의 장면에서 사물의 개수를 하나씩 세는 것뿐만 아니라 2씩, 5씩, 10씩 묶어 세거나 수직선을 이용하여 뛰어 세는 활동을 통하여 사물의 개수를 능률적으로 빠르게 헤아릴 수 있게 하고, 앞으로 배울 곱셈의 기초가 되는 동수누가의 경험을 가지게 한다. 아울러 전체의 수를 같은 개수로 묶고 묶음의 수를 알아보는 활동도 하게 하여 나눗셈의 기초가 되는 등분할의 경험도 가지게 한다(교육부, 1998, pp. 44-45).

산술 연산은 세는 활동에 새로운 의미를 부여할 수도 있다. 사람들 몇 명이 함께 모여 있는 집합에서, 이 집합에 눈은 몇 개 있는지를 집합으로 구조화하려고 한다. 같은 방법으로 다리는 몇 개 있는지, 손가락은 몇 개 있는지, 코는 몇 개 있는지 등등도 가능할 것이다. 이러한 집합은 낱개로 구조화할 수도 있고, 쌍의 집합으로 구조화할 수도 있고, 또 다른 방법도 가능할 것이다.

이 모든 상황에서 우리는 하나씩 차례로 셀 수도 있고, 각각의 구조를 만들어 봄으로써 보다 지혜롭게 셀 수도 있다. 기본적인 산술 연산을 세기에 적용할 수도 있다. 즉 구구단, 곱셈, 나눗셈까지 확장하여 이해할 수 있는 수학화가 가능할 것이며, 나아가 수평적 수학화(Freudenthal, 1991)를 예측할 수 있을 것이다.

교수학적 이론으로서의 셈수적 측면으로는 역사적, 언어학적, 심리발생적, 이론적으로 수학의 초석으로 소박한 수세기로 간주하는 입장이다. 세는 대상은 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해 각각에 다른 명칭을 부여하여 세는 것을 의미하며, 이것은 자연수의 수열, 무한수열, Peano 공리체계로 형식화된다. 0과 자연수는 수를 세는 과정에서 생겨나며, 세기는 아동이 최초로 언어화하는 수학(Freudenthal, 1991)라고 보기도 한다. 교육과정에 제시된 셈수적 측면을 표로 간략히 제시하면 다음의 <표 5>와 같다.

<표 5> 셈수적 측면이 교육과정에 반영된 양상

교수학적 이론으로서 자연수의 셈수적 측면	교육과정에 제시된 자연수의 셈수적 측면
◦역사적, 언어학적, 심리발생적, 이론적으로 수학의 초석(Freudenthal, 1991) ◦소박한 수세기(Freudenthal, 1991) ◦0과 자연수는 수를 세는 과정에서 생겨남, 세기는 아동이 최초로 언어화하는 수학(Freudenthal, 1991). ◦세는 대상은 같은 류의 것으로 간주하고, 그것들을 함께 취해 각각에 다른 명칭을 부여하여 세는 것(Freudenthal, 1991). ◦자연수의 수열, 무한수열, Peano 공리체계로 형식화됨. ◦수세기는 계산활동에 필수 : 자연수는 덧셈과 곱셈 연산이 있는 셈수의 집합(Skemp, 1987)	[제7차 교육과정] (가)수세기 자연수는 1, 2, 3, 4, 5,…처럼 1부터 차례로 하나씩 증가시켜 얻어지는 수이다. (차)심화과정 수세기가 필요한 실제 장면에서 차례로 세기(하나, 둘, 셋,…또는, 스물다섯, 스물여섯, 스물일곱,…), 거꾸로 세기(쉰, 마흔아홉, 마흔여덟,…), 번갈아 세기(2사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 갑-셋, 을-넷,…,3사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 병-셋, 갑-넷, 을-다섯, 병-여섯,…등)등 여러 가지 방법으로 수를 세게 한다. <1-나> (가)수세기 50까지의 수세기 활동으로 바탕으로 100까지 수를 차례로 세어보는 활동을 한다. 100까지 10씩 묶어 세기 활동에서 경우에 따라 '열, 스물, 서른, …'으로 세는 방법과 '십, 이십, 삼십, …'으로 세는 방법으로 능숙하게 차례로 셀 수 있도록 지도한다. (바)여러 가지 수 세기 방법의 활용 수 세기가 필요한 생활의 장면에서 사물의 개수를 하나씩 세는 것뿐만 아니라 2씩, 5씩, 10씩 묶어 세거나 수직선을 이용하여 뛰어 세는 활동을 통하여 사물의 개수를 능률적으로 빠르게 헤아릴 수 있게 한다. [2007년 개정 교육과정] <1학년> ◦수 세기 활동을 통하여 자연수의 여러 가지 의미를 이해하게 한다. -1학년에서 다루는 수의 범위는 0과 100까지의 자연수이다. 학생들은 학교에 입학하기 전부터 실생활에서 수를 접하고 수 세기 활동을 경험한다. 자연수를 지도할 때는 학생들의 이러한 경험을 바탕으로 수를 형식화하고 확장할 수 있게 한다.

교수학적 이론으로서의 셈수적 측면이 갖는 속성을 기준으로 교육과정에는 이것이 어떻게 반영되어 있는지를 분석해 보았다. 그 중 특징적인 사항은 셈수적 측면이 갖는 무한 수열의 의미 즉, 무한히 계속된다는 의미가 간과되어 있음을 알게 되었다. 셈수는 교수학적 이론으로서 여러 견해를 갖지만, Freudenthal(1991)은 0과 자연수의 속성 중 아동은 1, 2, 3, …19, …29, …99, …와 같이 써 내려 가다가 '그렇게 그렇게 계속된다'라는 것을 알게 된다는 셈수적 측면의 견해를 밝히고 있다. 즉 0과 자연수의 개념에는 무한의 의미가 포함되는 것이다. 그러나 교육과정에는 '그렇게 계속된다'라는 의미를 교과서에 실을 수 있을 만한 내용이 포함되어 있지 않다.

초등 수준에서 무한의 개념을 지도하는 것이 무리가 있다는 견해도 가능하겠지만, 지도 방법을 초등에 적절하게 변형한다면 가능할 것이다. 즉 초등의 성격상 무한의 개념을 형식화하여 지도하는 것과는 다른 방법을 사용하면 될 것이다. 0과 자연수 개념 중 셈수적 측면이 갖는 무한의 초보적 의미는 '그렇게 계속된다'는 것인데, '그렇게 그렇게 계속된다'는 것을 아동들이 초등 저학년부터 0과 자연수를 세어보는 과정에서 경험해 보게 하는 것이다. 이러한 경험을 통하여 수학의 추상적인 의미를 알게 되는 것만으로도 0과 자연수 개념 중 셈수적 측면이 갖는 무한의 의미를 잠재적으로 인지하는 초석이 되리라는데 의의를 둘 수 있다.

2학년 단계로 넘어가게 되면 수세기는 1학년 수준에서 진일보하여 십진기수법의 원리 이해에 중점을 두게 된다. 0과 자연수 개념의 셈수적 측면이 기수적 측면으로 전환되는 과정으로 볼 수 있다. 즉 구체물을 세는 활동을 통하여 낱개가 10개 모이면 10개씩 묶고, 10개씩 묶음이 10묶음이면 100개씩 묶음으로 묶는 활동을 통하

여 자리잡기의 원리를 이해하고, 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리 등의 자리값의 의미를 알게 하는 것이다.

이러한 지도 단계는 Wittmann(1929)이 수개념 지도 단계를 원소의 성질 및 배열 형태와 무관한 집합 곧, 비개성적인 집합의 이해→부정확한 집합의 비교→1대 1 대응에 의한 명확한 농도의 비교와 수개념 및 수사, 숫자에 의한 개념의 고정화→계산 및 십진기수법 등으로 제시한 것과 같은 흐름이라 볼 수 있다. 자연수 개념의 기수적 측면은 교육과정에 어떻게 제시되어 있는지 살펴보겠다.

나. 기수적 측면

0과 자연수가 갖는 속성으로 셈수적 측면에 대하여 언급할 때 자연수열에 대한 언급을 피할 수 없는 것은 기수적 측면을 언급할 때도 마찬가지이다. 이는 자연수 계열을 기수와 같은 뜻으로 생각해야 한다는 Russell의 견해(Russell, 1903; Brainerd, 1979)와 같은 입장이다. 수학 교육 연구에서 개수에 대한 연구는 셈수에 대한 연구보다 먼저 이루어졌으며, 집합론에서 개수는 기수로 형식화되며 초한기수로 확장된다. 수세기에서는 사물 하나하나를 같은 종류의 것인 단위로 간주하고 각 단위에 1을 할당하며 이러한 수세기의 결과는 사물의 개수가 되는 것이다. 집합의 농도 측면에서 생각해 보면, 원소가 보존되는 집합 간의 비교가 확실할 때의 농도 개념이 바로 기수이다. 이러한 기수 개념은 수사, 숫자를 통해 고정화된다. 기수적 측면의 이러한 성격과 관련하여 제7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 교육과정 해설(IV)(1998)에는 그 내용이 다음과 같이 제시되어 있다.

<1-가>
(가)수세기
여러 가지 사물의 낱낱을 하나, 둘, 셋, …세어 마지막으로 대응된 수사로 사물의 수를 나타내게 하여 집합수를 익힌다.
(나)수와 숫자
구체물을 세는 활동을 바탕으로 개수가 같은 것끼리 모아 보게 하고, 개수를 추상화하여 하나, 둘, 셋,…은 수 1, 2, 3,…로 나타내고, 읽을 때에는 일(하나),이(둘), 삼(셋),…으로 읽는다는 것을 이해하게 한다. 물건의 개수를 나타내는 집합수는 …… 자연수로 나타낸다는 것을 알게 한다(교육부, 1998, p. 40).
<1-나>
(가)두 자리 수의 이해
제시된 구체물을 10 개씩 묶음과 낱개로 구분하여 두 자리 수로 나타내고 50까지의 수와 마찬가지로 67에서 10개씩 묶음의 수 6은 60을 나타내므로 '예순' 또는 '육십'으로 읽고, 낱개 7은 '일곱' 또는 '칠'로 읽어 '예순일곱', '육십칠'로 읽을 수 있도록 지도한다. 이러한 두 자리 수의 이해를 바탕으로 10개씩 묶음, 낱개로 나타내었던 것을 십의 자리, 일의 자리로 나타내어 보게 한다(교육부, 1998, p. 43).
<2-가>
(가)1000까지의 수
10개씩 10 묶음으로 100을 도입하고, 일, 십, 백의 자리값의 의미와 자리잡기에 의한 십진기수법의 원리를 이해하게 한다. 구체물을 세는 활동을 통하여 낱개가 10 개 모이면 10 개씩 묶고, 10 개씩 묶음이 10 묶음이면 100 개씩 묶음으로 묶는 활동을 통하여 자리잡기의 원리를 이해시키고, 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리 등의 자리값의 의미를 알게 한다. 숫자 3이 놓은 자리값에 따라 3, 30, 300을 나타내므로 숫자는 높은 자리에 위치할수록 그 값이 큰 수가 된다는 점을 깨닫게 하여 자리잡기에 의한 십진기수법을 이해하도록 한다. 이를 바탕으로 세 자리 수의 기수법, 명수법을 익히도록 하고, 1000은 999다음의 수로서 단순하게 취급한다.
(나)수 계열, 대소 비교
세 자리 수의 계열은 차례로 세어보기, 10씩 뛰어세기, 100씩 뛰어세기를 통하여 지도하고, 세 자리 수를 수직선에 나타내어 수의 대소를 비교할 수 있게 한다. 기수법의 자리잡기 원리의 이해를 바탕으로 백의 자리의 숫자부터 차례로 비교하여 수의 대소를 판단하고, 이를 부등호로 나타낼 수 있게 한다(교육부, 1998, p, 47).
<3-가>
(가)10000까지 수
이제까지 학습한 자리잡기에 의한 십진기수법의 원리를 적용하여 수를 10000까지 확장하여 지도한다. 십진기수법의 원리는 10이 되면 묶어서 세는 것이므로 낱개가 10이면 이를 묶어서 10이라 하고, 10씩 묶음이 10이면 이를 다시 묶어서 100이라 하고, 100씩 묶음이 10이면 이를 다시 묶어 1000이라고 하는 것을 깨닫게 하여 네 자리 수로서 1000을 지도한다. 십진기수법의 구조를 정확하게 이해하도록 하여 10000까지의 수를 읽고 쓸 수 있게 지도한다(교육부, 1998, p. 54).
<4-가>
(가)다섯 자리 이상의 수
십진기수법의 원리를 바탕으로 10000 이상의 자연수를 이해하고, 십진기수법의 전개식으로 나타낼 수 있도록 한다. 10000 이상의 자연수에서 큰 수의 읽기,

쓰기, 각 자리의 수, 자리값, 수 계열, 대소 비교를 지도하여 큰 수의 개념을 확실히 이해하게 한다. 십진기수법의 원리와 명수법을 중점적으로 학습할 억, 조까지의 수도 나타내고 쓸 수 있도록 한다. 이 단계에서는 자리잡기에 의한 십진기수법의 원리를 충분히 이해하여 어떤 자연수라도 읽을 수 있고 쓸 수 있으며, 십진기수법의 전개식으로 표현할 수 있도록 한다(교육부, 1998, p. 59).

또한 2007년 개정 교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 같은 내용에 대하여 다음과 같이 제시하고 있다.

<1학년>
자연수에는 집합수, 순서수, 명목수 등의 의미가 포함되어 있는데 이 중 집합수와 순서수는 구체물을 세어 보는 활동을 통해서 발달한다. 집합수의 경우 여러 개의 사물을 하나, 둘, 셋, …과 같이 세어 마지막으로 사물에 대응된 수사가 사물의 개수를 나타낸다는 것을 이해하게 한다.
……
수개념을 이해하기 위해서는 숫자와 수 이름을 동시에 지도해야 한다. 집합수의 경우 실생활에서 접할 수 있는 사물의 개수를 하나, 둘, 셋, …으로 세고 그 수를 숫자로는 1, 2, 3, …로 나타내며 일, 이, 삼, …로 읽을 수 있게 한다.

Piaget에 의하면 어린 아동은 비교적 일찍 수세기를 할 수 있으며 수를 세지만, 셈수와 개수 사이의 관련성을 인식하지 못하는 경우가 많다(우정호, 2001). 아동들은 심상으로서 수가 구성되기 전에 수세기를 할 수는 있지만 여기에는 기수 개념이 결여되어 있다. 나아가 아동들에게 기수 개념이 자리매김하고 있는가를 판단하는 근거는 수의 보존 개념을 갖고 있느냐이다. 보존 곧 어떤 변환에 대한 불변성은 수학적으로 중요한 특성이나, Piaget는 자연수를 언급하고 있지 않아 보존이란 용어에 다소간의 혼란이 있다. 교육과정에서는 기수적 측면이 갖는 수의 보존성, 불변성에 대한 의미를 수의 합성과 분해의 활동으로 제시하고 있다.

<1-가>
(마)수의 합성과 분해
구체물을 사용하여 두 부분을 모아 보기, 두 부분으로 갈라보기 활동을 통하여 10미만의 자연수에 대한 합성과 분해를 이해하게 하고, 이를 바탕으로 덧셈과 뺄셈을 하게 한다(교육부, 1998, p. 40)
<1-나>
(라)10에 대한 보수
9이하인 수의 범위에서 두 수로 가르기와 합이 9이하인 두 수의 모으기 활동을 바탕으로 10을 두 수로 가르기와 합이 10이 되는 두 수의 모으기를 이해하게 한다(교육부, 1998, p. 44).

자연수의 속성을 개수적 측면만으로 설명하기에는 부족함이 있다. 한 편으로는 자연수의 개수적 측면만을 강조하는 것은 바람직하지 않기도 하다. 언급했다시피 자연수 개념은 셈수적인 의미로 받아들여지기도 하고 기수적 의미로 받아들여지기도 하기 때문이다. 교수학적 이론으로서의 기수적 측면은 셈수가 Peano 공리 체계로 형식화 된 것이며, 수세기의 결과인 사물의 개수를 기수로 간주하는 것이다. 또한 수세기에 대하여 시간의 경과, 시점의 변화, 섞기의 변형, 흩뜨리고 모으는 변환 등 여러 변환 하에서도 불변성을 자각하는, 곧 수세기에서 보존성을 갖는 개념이 기수 개념이다. 기수적 의미가 교육과정에 제시된 양상을 간단히 표로 제시하면 다음의 <표 6>와 같다.

<표 6> 자연수 개념의 기수적 측면이 교육과정에 제시된 양상

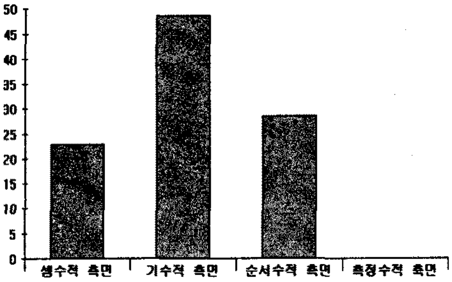
교수학적 이론으로서의 자연수의 기수적 측면	교육과정에 제시된 자연수의 기수적 측면
◦수세기의 결과가 사물의 개수, 즉 기수. ◦수세기에 대하여 시간 경과, 시점 변화, 섞기의 변형, 흩뜨리고 모으는 변환 등 여러 변환 하에서도 불변성을 자각하는, 곧 수세기에서 보존성을 갖는 개념이 기수 개념(Piaget, 1969) ◦Euclid, 원론에서의 기수 : 자연수는 단위가 1인 것들로 이루어진 모임 ◦집합론에서 개수는 기수로 형식화 됨, 집합	[7차 교육과정] <1-가> (가)수세기 여러 가지 사물의 낱낱을 하나, 둘, 셋, …세어 마지막으로 대응된 수사로 사물의 수를 나타내게 하여 집합수를 익힌다. (나)수와 숫자 구체물을 세는 활동을 바탕으로 개수가 같은 것끼리 모아 보게 하고, 개수를 추상화하여 하나, 둘, 셋,…은 수 1, 2, 3,…로 나타내고, 읽을 때에는 일(하나),이(둘), 삼(셋),…으로 읽는다는 것을 이해하게 한다. 물건의 개수를 나타내는 집합수는 …… 자연수

의 수. ∘집합의 농도 : 공집합의 기수는 0, 원소가 1개인 집합 E_0는 기수 1, E_0에 새로운 원소를 첨가하면 기수 2, …… → 일대일 대응이 가능한 두 집합에서, '대등'이라는 동치관계에 대한 동치류로 자연수를 정의(Brainerd, 1979) ∘아무 조건 없이 수라고 할 때 보통 기수를 의미함.	로 나타낸다는 것을 알게 한다. (마)수의 합성과 분해 구체물을 사용하여 두 부분을 모아 보기, 두 부분으로 갈라보기 활동을 통하여 10미만의 자연수에 대한 합성과 분해를 이해하게 하고, 이를 바탕으로 덧셈과 뺄셈을 하게 한다. <1-나> (라)10에 대한 보수 9이하인 수의 범위에서 두 수로 가르기와 합이 9이하인 두 수의 모으기 활동을 바탕으로 10을 두 수로 가르기와 합이 10이 되는 두 수의 모으기를 이해하게 한다. [2007년 개정 교육과정] <1학년> 자연수에는 집합수, 순서수, 명목수 등의 의미가 포함되어 있는데 이 중 집합수와 순서수는 구체물을 세어보는 활동을 통해서 발달한다. 집합수의 경우 여러 개의 사물을 하나, 둘, 셋, …과 같이 세어 마지막으로 사물에 대응된 수사가 사물의 개수를 나타낸다는 것을 이해하게 한다.

교육과정의 자연수개념 관련 지도 내용을 분석해 본 결과, 기수적 측면의 내용이 주류를 이루고 있다. 부록의 교육과정 내용을 분석한 것을 살펴보면(부록 참고) 자연수 개념에서 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면에 대한 내용이 각각 <표 7>과 같은 비율을 차지하고 있는 것으로 알 수 있다.

<표 7> 교육과정에서 자연수 개념에 대한 네 측면의 내용이 나타나는 비율 (단위 %)

셈수적 측면	약 22.9(%)
기수적 측면	약 48.6(%)
순서수적 측면	약 28.5(%)
측정수적 측면	0(%)
합	100(%)



<그림 2> 교육과정에서 자연수 개념에 대한 네 측면의 내용이 나타나는 비율

교육과정에서 0과 자연수 개념에 대한 내용 중 기수가 위와 같이 많은 내용을 차지하고 있는 이유는 다음의 세 가지 정도로 들 수 있을 것이다. 첫째, 보통 수라고 하면 기수적 측면을 의미하는 경우가 많다. 기수는 집합의 농도를 개념을 갖고 있다. 이러한 관점은 '새수학'이래 초등학교의 0과 자연수 개념 지도에 관련하여 큰 영향을 미쳤으며, 이러한 경향은 여전히 유지되고 있다. 이에 대한 입장으로 Cantor의 견해를 들 수 있는데, 그는 원소가 1개인 집합 E_0로부터 시작하여 이에 기수 1을 부여하고, 다른 새로운 원소를 E_0에 첨가하여 기수 2를 부여하는 방식으로 자연수를 차례로 정의하였다.

이러한 과정을 통해 얻어진 모든 기수를 유한기수라고 했는데, 유한기수의 집합 $N-\{0\}$ 은 가산인 무한기수를 갖는다. 그리고 모든 무한집합은 가산인 무한부분집합을 갖는다. 이러한 관점은 자연수와 그 연산을 매우 단순하고 설득력 있게 정의하는 것으로 간주되어, '새수학' 이래 초등학교에서의 자연수와 자연수의 연산 개념 지도에 지대한 영향을 미친(우정호, 1977)결과라 볼 수 있다.

둘째, Piaget의 자연수 개념에 대한 연구 결과가 여전히 영향을 미치고 있다는 점이다. '새수학'에서 자연수의 기수적 측면을 부각시키게 된 것은 무한집합의 농도를 유한집합의 농도와 같이 조작할 수 있게 한, 즉 실무한을 수학에 도입한 집합론에 매료되었거나 자연수의 개수 측면에 대한 연구를 한 Piaget의 영향을 받은 것으로 볼 수 있다. 어린 아동은 비교적 일찍 수세기를 할 수 있다. 그러나 수를 세기는 하지만 셈수와 개수 사이의 관련성

을 인식하지 못하는 경우가 많다. 심상으로서 수가 구성되기 전에 수세기를 할 수 있는 아동들이 많이 있는 것이다. Piaget는 이를 기수 개념의 결여로 보고 수의 보존을 기수 개념 구성의 준거로 택하고 있다.

보존 곧 어떤 변환에 대한 불변성은 수학적으로 중요한 특성이나, Piaget는 변환을 언급하고 있지 않으므로 보존이란 용어는 혼란을 야기한다. 집합에서 기수의 불변성은 수세기에서의 시간 경과, 시점 변화, 섞기 변형, 흩뜨리고 모으는 변환 등 여러 가지 변환 아래에서의 불변성을 생각할 수 있다. 1대 1 대응 아래에서의 불변성을 강조하고 서로 대등한 집합의 집합을 의식적으로 생각하게 하려는 것은 집합론의 영향을 받은 것으로 볼 수 있다. Cantor의 집합론에 영향을 받아 이러한 측면에서 아동의 수개념 발달을 생각한 Piaget의 연구 결과를 바탕으로 한 학습-지도 이론은 '새수학'의 일반적 배경이 되었다.

셋째, 기수적 측면은 주로 이산량에 대한 것으로서 일상 생활에서 쉽게 접할 수 있다. 주변 사물의 낱낱을 하나, 둘, 셋, … 으로 세어 마지막으로 대응된 수사로 사물의 수를 나타내게 하여 집합수를 익히도록 하는 내용을 교육과정에서 채택하고 있는 것이 그 예가 된다.

Piaget(1969)는 자연수를 기수와 순서수로 구분하는 것은 이를 단일 개념으로 정의하고 있지 못한 것이며, 수를 개별적으로 정의하는 결과가 되어 1부터 차례로 생성되는 자연수열의 기본적인 특성을 소홀히 다루는 것이라 하면서, 자연수는 집합과 순서관계의 종합이라고 가정한다. 그렇다면 자연수 개념의 순서수적 측면은 교육과정에 어떻게 반영되고 있는지에 대하여 살펴보겠다.

다. 순서수적 측면

순서수적 측면에서는 자연수가 0, 1, 2, 3, …이라는 수열을 형성한다는 사실을 자연수의 본질적인 구성 원리로 간주한다. 이렇게 0과 자연수를 순서수 개념을 중심으로 보게 되면 개별적인 수의 의미보다는 전체로서의 자연수 체계를 생성하는 속성인 1씩 더해 나가는 규칙, 또는 순서 구조를 중시하게 된다. 이때 개별 자연수는 비대칭적이고 추이적인 '순서 관계' 속에서 의미를 갖게 된다(Brainerd, 1979). 순서수는 순수하게 관계의 개념으로 하나의 관계수란, 그 속의 하나의 원소와 상사인 모든 관계의 집합이라고 정의할 수 있다(Russell, 1919).

자연수 개념의 순서수적 측면은 관계론적 입장이며, 기수적 측면은 분류론적 입장이라 할 수 있다. Piaget(1969)는 자연수 개념은 이 두 측면을 동시에 갖고 있는 것으로 간주하였다. 순서수적 측면에 대한 이상과 같은 교수학적 이론을 제7차 수학과 교육과정에 따른 초등학교 교육과정 해설(IV)(1998)에는 다음과 같이 변환하여 제시한다.

<1-가>
(가)수세기
사물의 위치나 차례를 나타내는 데에도 자연수가 사용된다는 것을 이해하게 한다. 사물의 위치나 속성에 따라 차례대로 첫째, 둘째, 셋째, …라고 세면서 순서수를 자연스럽게 익히도록 한다.
(나)수와 숫자
…차례를 나타내는 순서수도 자연수로 나타낸다는 것을 알게 한다. 첫째, 둘째, 셋째,…를 숫자로는 1, 2, 3…으로 나타낸다는 것을 이해하게 하여 집합수와 순서수를 통합한 개념으로 수를 이해할 수 있도록 지도한다. 0의 지도는 사물을 하나씩 덜어 내는 활동을 통하여 2에서 하나를 덜어 내면 1, 1에서 하나를 덜어 내면 0으로 나타내고 영이라고 읽는다는 것을 지도한다(교육부, 1998, p. 40).
<1-나>
(다)수의 순서, 대소 비교
…아파트의 층수, 호수 등을 소재로 순서수의 번호적 의미도 알게 한다(교육부, 1998, p. 44).

또한 2007년 개정 교육과정(교육과학기술부, 2009)에서는 같은 내용에 대하여 다음과 같이 제시하고 있다.

<1학년>
순서수는 사물의 위치나 차례를 나타내는 수로, 첫째, 둘째, 셋째, …를 숫자로는 1, 2, 3, …로 나타내며 일, 이, 삼, …로 읽을 수 있게 한다. …… 또 집합수뿐만 아니라 순서수도 자연수로 나타낸다는 것을 알게 한다. 첫째, 둘째, 셋째, …도 숫자로는 1, 2, 3, …으로 나타낸다는 것을 이해하게 하여 집합수와 순서수를 통합한 개념으로 자연수를 이해할 수 있도록 한다.

수열이 갖는 관계수를 수열수라고 한다(Russell, 1919). 보통 순서수라고 하는 것은 수열수의 일종이다. 하나의 집합은 몇 가지의 순서로도 나열될 수 있고, 이

때의 순서는 집합의 원소에 대한 앞의 차례를 주는 관계가 만들어 내는 것이다. 자연수 개념의 순서수적 측면은 관계론적 입장이며, 기수적 측면은 분류론적 입장이라 할 수 있다. Piaget(1969)는 자연수 개념은 이 두 측면을 동시에 갖고 있는 것으로 간주하였다. 교육과정에서도 Piaget의 견해와 같은 입장을 취하는 것으로 볼 수 있다.

0과 자연수가 셈수적 측면이나 기수적 측면, 또는 서수적 측면의 어느 한 가지 속성만을 갖는 것으로 간주하지 않고, 수가 사용되는 상황에 따라 이 세 가지 측면을 함께 갖고 있을 수도 있고, 한 가지나 두 가지 측면을 갖고 있기도 하는 것이다.

교수학적 이론으로서의 순서수적 측면은 자연수를 관계의 수로 어떤 유형의 관계 영역에 있는 속성가에 환원시키는 특징을 갖는다. 즉 순서 짓기, 수열의 관계수적 의미를 갖는 것으로 볼 수 있다. 교육과정에 제시된 자연수 개념 중 순서수적 측면을 정리하면 다음 <표 7>과 같다.

<표 8> 순서수적 측면이 교육과정에 제시된 양상

교수학적 이론으로서 자연수의 순서수적 측면	교육과정에 제시된 자연수의 순서수적 측면
◦ 셈수가 Peano의 공리체계로 형식화된 것 (Brainerd, 1979) ◦ 관계의 수 : 자연수를 어떤 유형의 관계 영역에 있는 속성가에 환원시키는 것 (Piaget, 1969) ◦ 순서짓기 (Confrey, 1980) ◦ 수열의 관계수(Confrey, 1980; Russell, 1919)	[7차 교육과정] <1-가> (가)수세기 사물의 위치나 차례를 나타내는 데에도 자연수가 사용된다는 것을 이해하게 한다. 사물의 위치나 속성에 따라 차례대로 첫째, 둘째, 셋째, …라고 세면서 순서수를 자연스럽게 익히도록 한다. (나)수와 숫자 …차례를 나타내는 순서수도 자연수로 나타낸다는 것을 알게 한다. 첫째, 둘째, 셋째,…를 숫자로는 1, 2, 3…으로 나타낸다는 것을 이해하게 하여 집합수와 순서수를 통합한 개념으로 수를 이해할 수 있도록 지도한다. 0의 지도는 사물을 하나씩 덜어 내는 활동을 통하여 2에서 하나를 덜어 내면 1, 1에서 하나를 덜어 내면 0으로 나타내고 영이라고 읽는다는 것을 지도한다. <1-나> (다)수의 순서, 대소 비교 …아파트의 층수, 호수 등을 소재로 순서수의 번호적 의미도 알게 한다. [2007년 개정 교육과정] <1학년> 순서수는 사물의 위치나 차례를 나타내는 수로, 첫째, 둘째, 셋째, …를 숫자로는 1, 2, 3, …로 나타내며 일, 이, 삼, …로 읽을 수 있게 한다. …… 또 집합수뿐만 아니라 순서수도 자연수로 나타낸다는 것을 알게 한다. 첫째, 둘째, 셋째, …도 숫자로는 1, 2, 3, …으로 나타낸다는 것을 이해하게 하여 집합수와 순서수를 통합한 개념으로 자연수를 이해할 수 있도록 한다.

교수학적 이론으로서의 0과 자연수 개념이 갖는 순서수적 측면이 교육과정에 제시된 것을 살펴보았을 때 아쉬운 점은, 순서수적 측면에서 관계에 대한 의미가 약하다는 것이다. 순서수는 순수하게 관계의 개념으로 하나의 관계수란, 그 속의 하나의 원소와 상사인 모든 관계의 집합이라고 정의할 수 있다. 앞에서도 언급하였듯이 순서수라고 하는 것은 수열수의 일종으로, 하나의 집합은 몇 가지의 순서로도 나열될 수 있고, 이때의 순서는 집합의 원소에 대한 앞의 차례를 주는 관계가 만들어 내는 것이다. 하나의 집합의 원소가 여러 가지 순서로 나열되는 것은 그 집합의 원소 사이에 여러 가지 관계가 성립되기 때문이다.

이러한 의미에서 교육과정에서는 순서수적 측면의 내용에 첫째, 둘째, 셋째, …로 순서수를 익히는 과정과 집합수(기수적 측면)와 순서수를 통합한 개념으로 0과 자연수를 이해할 수 있도록 하는 내용만 제시되어 있다. 그러나 0과 자연수 개념이 갖는 순서수적 측면의 관계적 의미를 보다 풍부히 하면 좋을 것이다. 즉 여러 가지 기

준으로 첫째, 둘째, 셋째, …로 세어보게 할 수도 있는 것이다. 예컨대, 교육과정에서 제시하고 있는 순서수적 측면의 지도 내용 중 '…아파트의 층수, 호수 등을 소재로 순서수의 번호적 의미도 알게 한다.'를 활용하면 1층부터 첫째, 둘째, 셋째, …를 셀 수도 있고, 꼭대기층부터 아래로 한층씩 내려가면서 첫째, 둘째, 셋째, …를 셀 수도 있는 것이다. 즉 같은 층이지만 순서 관계에 따라 셋째가 될 수도 있고 다섯째가 될 수도 있는 것이다. 이렇게 하면 순서수가 갖는 관계의 의미를 보다 다양하게 알 수 있게 될 것이다.

Piaget는 일대일대응 개념이 두 유목의 항이 똑같이 많다는 사실뿐만 아니라 또한 한 유목의 각 항에 대해 다른 유목의 독특한 항이 대응되며, 그 역이 성립한다는 사실을 수반한다고 믿는다. 참된 수개념이 획득되었다고 하기 위해서는 단위의 반복에 의해 새로운 수를 계속 발생시키는 가능성을 인식할 수 있어야 한다는 것이다. 전체가 보존된다는 것을 이해한다는 것은, 전체는 부분들로 구성되어 있으며 그 부분들은 임의로 배열될 수 있다는 관념을 갖는다는 것을 이해하는 것이다.

부분과 전체의 관계가 수의 보존을 이해하게 하는 논리적 관계로 작용하는 것이다. 결국, 수가 구성되기 위해서는 보존되는 전체 내에 부분을 겹쳐 끼워 넣는 것과 계열화라는 두 가지 조건이 만족될 필요가 있다. 이와 같은 집합의 포함관계나 계열화 및 보존을 가능하게 하는 요인은 사고의 가역성, 곧 조작의 구성이다(우정호, 1998). 이러한 맥락에서 Piaget는 자연수 개념을 길이의 측정과 관련짓고 있다.

라. 측정수적 측면

자연수 개념 중 우리나라의 교육과정에서 측정수적 측면은 어떻게 제시되어 있으며 이는 교수학적 이론으로서의 측정수적 측면에서 볼때 어떠한 특징이 있는지 살펴보고자 하였지만, 자연수 개념에 대한 지도 내용으로 측정수적 측면을 반영하는 내용은 없다. 그러나 측정의 영역에서 측정수적 측면의 내용을 다소간에 포함하고 있었다. 다음과 같다.

<표 9> 측정수적 측면이 교육과정에 제시된 양상

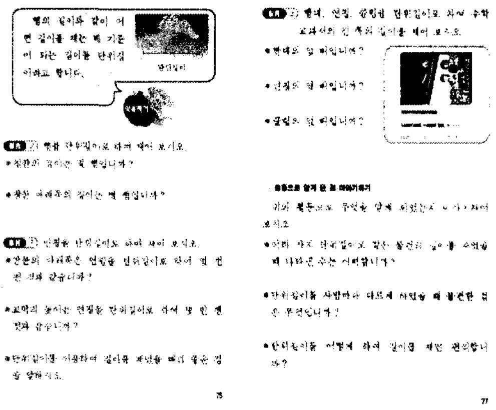
교수학적 이론으로서의 자연수의 측정수적 측면	교육과정에서의 제시된 자연수의 측정수적 측면
◦ 자연수를 양의 조작 활동을 통하여 양 사이의 비라고 보는 관점(Dewey, 1972) ◦ 수는 정확한 측정, 정확한 평가에서부터 생겨나는 것(Dewey, 1972) ◦ 사물을 변별하여 관계짓기를 한 결과 ◦ 수는 전체량과 단위량 간의 상대적인 관계를 나타낸 것(Dewey, 1972)	◦ 임의 단위길이를 이용하여 길이를 수로 나타내기 ◦ 임의 단위길이에 의한 측정값은 그 단위길이에 따라서 달라짐을 알아보기

자연수 개념을 바라보는 입장 중 또 하나의 측면은 측정수적 측면이다. 측정수적 측면은 자연수를 양의 조작 활동을 통하여 양 사이의 비로 보는 관점이며, 수는 정확한 측정, 정확한 평가에서부터 생겨나는 것이라고 보는 관점이다. 이러한 측정수적 측면에 대하여 우리나라 교육과정에는 측정 영역에 다음과 같이 제시되어 있다.

<그림 3> 측정수적 상황1
(교육인적자원부, 2006b, pp. 74, 76)

이 상황은 자연수가 갖는 여러 가지 개념 중 측정수적 측면에 대한 속성을 지도하기 위한 것이다. 생활에서 흔히 볼 수 있는 책상, 칠판을 주어진 단위가 되는 나무 막대로 재었을 때 '몇'이 되는지 알아보는 활동이다. 이 때의 '몇'이 자연수가 되며, 이 자연수가 측정수적 조작 활동의 결과가 되는 것이다.

한 편 측정수적 측면에서의 수란 정확한 측정, 정확한 평가에서 생겨나는 것이며, 사물을 변별하여 관계짓기를 한 결과로 보는 입장이다. 수는 전체량과 단위량 간의 상대적인 관계를 나타내는 것이며, 양의 조작 활동을 통하여 양 사이의 비로 자연수 개념이 형성된다고 본다. 자연수의 측정수적 측면이 갖는 이러한 의미는 교과서에 다음과 같이 제시되어 있다.



<그림 4> 측정수적 상황2
(교육인적자원부, 2006b, pp. 75, 77)

즉 기본 단위가 달라짐에 따라 같은 측정 대상임에도 불구하고 다른 수를 부여하게 되는 것이다. 수개념을 이렇게 측정수적 측면에서 받아들이게 되며, 수개념 학습 초기부터 아동들로 하여금 변인들 사이의 상호 관계를 이해하는 능력을 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라, 복잡한 추상을 형성하고 수학적 사고의 발달을 촉진시킬 수 있다는 이점이 있다(Minskaya, 1975).

그러나 이와 같은 측정수적 측면은 우리나라 교육과정의 수 영역이 아닌 측정의 영역에 제시된 것이다. 수 영역에서 측정수적 활동으로 자연수 수개념을 익히고자 하는 교육과정 내용은 제시되어 있지 않다. 그것은 아마도 측정수적 측면이 다른 자연수 개념보다 추상적이기 때문일 것이다.

2. 우리나라 교육과정에 제시된 자연수 개념의 지도 내용에 대한 대안

앞 절에서의 분석은 교수학적 입장에서 자연수 개념이 갖는 네 측면인 셈수적 측면, 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면을 기준으로 우리나라 교육과정에서 자연수 개념에 대한 지도 내용을 분석해 보았다. 그 결과 네 측면이 갖는 속성들을 우리나라 교육과정에서 수준에 적절하도록 잘 구현하고 있었으나 다소간의 특징적인 양상을 보였으며 그에 대한 대안은 다음과 같다.

첫째, 자연수가 갖는 다양한 개념에서 셈수적 측면이 갖는 속성 중 무한히 계속된다는 의미가 있다. 예를 들자면, Freudenthal(1991)은 자연수의 속성 중 아동은 1, 2, 3, …19, …29, …99, …와 같이 써 내려 가다가 '그렇게 그렇게 계속된다'라는 것을 알게 된다는 셈수적 측면의 견해를 밝히고 있다.

즉 자연수의 개념에는 무한의 의미가 포함되는 것이다. 그러나 교육과정에는 '그렇게 계속된다'라는 의미를 교과서에 실을 수 있을 만한 내용이 포함되어 있지 않다. 초등 수준에서 무한의 개념을 지도하는 것이 무리가 있을 수도 있지만, 무한의 개념을 형식화하여 지도하라는 것이 아니라 자연수가 '그렇게 계속된다'는 것을 아동들이 초등 저학년부터 학교에서 경험하면서 수학의 추상적인 의미를 알게 되는 것만으로도 큰 발전으로 볼 수 있을 것으로 그 의의를 둘 수 있다.

둘째, 교육과정의 수개념 관련 지도 내용을 분석해 본 결과, 기수적 측면의 내용이 약 50%를 차지하고 있다. 그 이유는 다음의 세 가지 정도로 들 수 있을 것이다. 첫째, Cantor가 정의한 자연수는 기수 개념에 중심을 두었는데, 이것은 자연수와 그 연산을 매우 단순하고 설득력 있게 정의하는 것으로 간주되어, '새수학' 이래 초등학교에서의 자연수와 자연수의 연산 개념 지도에 지대한 영향을 미쳤기(우정호, 1977) 때문이다.

둘째, 이렇게 '새수학'에서 자연수의 기수적 측면을 부각시키게 된 것은 무한집합의 농도를 유한집합의 농도와

같이 조작할 수 있게 한, 즉 실무한을 수학에 도입한 집합론에 매료되었거나 자연수의 개수 측면에 대한 연구를 한 Piaget의 영향을 받았기 때문이다. 셋째, 기수적 측면은 주로 이산량에 대한 것으로서 일상 생활에서 쉽게 접할 수 있다. 주변 사물의 낱낱을 하나, 둘, 셋, … 으로 세어 마지막으로 대응된 수사로 사물의 수를 나타내게 하여 집합수를 익히도록 하는 내용을 교육과정에서 채택하고 있기 때문인 것으로 볼 수 있다.

셋째, 교수학적 이론으로서의 자연수 개념이 갖는 순서수적 측면이 교육과정에 제시된 것을 살펴보았을 때 아쉬움이 남는데, 그 이유는 순서수적 측면에서 관계에 대한 의미가 약하다는 것이다. 순서는 집합의 원소에 대한 앞의 차례를 주는 관계가 만들어 내는 것이다. 하나의 집합의 원소가 여러 가지 순서로 나열되는 것은 그 집합의 원소 사이에 여러 가지 관계가 성립되기 때문이다. 교육과정에서는 순서수가 갖는 여러 가지 관계를 알아보는 활동에 대한 내용이 제시되어 있지 않다. 교육과정에서는 순서수 측면의 내용에 첫째, 둘째, 셋째, …로 순서수를 익히는 과정만 제시되어 있으나, 순서수의 관계적 의미를 풍부히 하자면 다른 기준으로 첫째, 둘째, 셋째, …로 세어보게 할 수도 있다

교육과정에서 제시하고 있는 서수적 측면의 지도 내용 '…아파트의 층수, 호수 등을 소재로 순서수의 번호적 의미도 알게 한다.'를 활용하면 1층부터 첫째, 둘째, 셋째, …를 셀 수도 있고, 꼭대기층부터 아래로 한층씩 내려가면서 첫째, 둘째, 셋째, …를 셀 수도 있는 것이다. 이렇게 하면 순서수가 갖는 관계의 의미를 보다 다양하게 알 수 있게 될 것이다.

넷째, 측정수적 측면이 갖는 의미가 교육과정의 자연수 개념의 내용으로 반영된 사항은 거의 미비하다. 오히려 측정 영역에서 측정의 활동을 통한 자연수 부여하기의 상황으로 간단히 소개하고 있을 뿐이다. 측정수적 측면은 수 개념을 주어진 대상을 하나의 측정 단위를 대상으로 측정해 보았을 때 몇이 된다는 입장에서 보는 것이다. 우리나라 교육과정에서 측정수적 측면의 의미가 없는 것은 다음의 추측이 그 이유의 하나가 될 것으로 생각된다. 측정수적 입장에 대한 연구를 보면, 측정수는 연속량을 대상으로 파악하는 경향이 강하다. 주어진 물의 양을 잰다던가, 수직선 상에서 크기를 잰다던가 (Minskaya, 1975) 하는 것이 그것이다.

그러나 초등 저학년 학생들에게 쉽게 받아들일 수 있고, 일상에서 쉽게 접할 수 있는 수는 이산량이다. 낱개 하나 하나를 세어보는 것이다. 낱개가 되는 단위가 개미처럼 작은 것이든 코끼리처럼 큰 것이든, 이산량으로 생각하면 이들은 모두 하나로 생각할 수 있다. 그러나 측정수적 입장에서 보면 같은 길이의 수직선이라도, 기본 단위를 어떻게 선택하느냐에 따라 길이는 달라진다. 측정수적 측면이 갖는 이러한 추상적인 개념을 초등학교 저학년 수준의 학생들이 받아들이기는 쉽지 않을 것이다.

또한 측정수적 측면의 내용이 부족한 이유는 다음의 측면도 있을 것이다. 우리나라 교육과정상 연속량의 단위에 대한 학습은 2학년 이후에 이루어진다. 센다는 것은 대상이 이산량이고, 절대적인 단위를 사용하는 것이다. 즉, 크기나 모양에 상관없이 무조건 1개, 2개이다. 이것을 상대적인 관점에서 비교하려면 비율 개념이 도입되어야 한다. 작은 코끼리는 1이라고 하면 큰 코끼리는 2(배)라고 하는 것처럼 말이다. 상대적인 비교는 자연수를 넘어서 유리수의 도입 과정이 된다. 측정수의 의미로 자연수를 학습하려면 간단하게 '키가 135㎝', '몸무게가 35㎏'과 같이 말하면서 '자연수가 이런 측면에서도 사용되는구나'라는 느낌을 주는 것으로도 좋을 것이다.

Ⅳ. 논의

자연수 개념은 학교에서 처음으로 학습하는 수학으로 이는 십수년간 진행될 학교 수학 학습의 첫걸음이 되기에, 자연수 개념에 대한 이론적 고찰을 하고 우리나라 교육과정에서는 자연수 개념의 지도 내용이 어떻게 제시되어 있는지를 살펴보고자 하였다. 자연수 개념에 대한 역사적, 수리철학적 논의들을 살펴보고 연구함으로써, 그것이 갖는 다양한 의미를 알게 되었다. 자연수 개념에 대하여 의견을 펼친 철학자, 수학자, 수학교육자는 다양하며 연구자의 수 만큼 각자의 견해에 따라 수를 바라보는 입장도 그러하다. 또한 자연수 개념에 대한 어느 한 측면이 다른 측면을 대신할 수 있지도 않다.

본 연구에서 이러한 견해들을 정리해 봄으로써 그것이 수학교육의 현장에서 발생하는 자연수 개념의 교육

현상을 설명하는 기준, 또는 도구가 될 수 있기를 기대한다. 그리고 자연수 개념이 우리나라 교육과정에 제시된 지도 방향에 대한 분석하고 그 대안을 제시 하는데 주안점이 있으므로 여기에서 한 단계 더 나아가 교사는 자연수 개념에 대하여 어떻게 인지하고 있는지, 그리고 학교 현장에서는 자연수 개념의 각 측면들이 어떻게 수업되고 있는지에 대한 현장 연구가 필요할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

강완 (2008). 지식의 본질과 교수학적 변환론. 수학교육학의 전개. 서울: 경문사. 41-47.

강창동 (2003). 지식기반 사회와 학교지식. 서울: 문음사.

강홍규 (2005). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구. 서울: 경문사.

강홍규 · 고정화 (2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의. 대한수학교육학회지 <학교수학> 5(3). 385-399.

고정화 (2005). 학력 초의 활동주의적 수개념 구성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

교육부 (1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한교과서주식회사.

교육부 (1998). 초등학교 교육과정해설(IV). 수학, 과학, 실과. 서울: 대한 교과서 주식회사.

교육과학기술부 (2009). 초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과. 서울 : 미래엔 컬쳐그룹.

교육인적자원부 (2006a). 1-가 수학. 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부 (2006b). 2-가 수학. 서울: (주)천재교육.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김성만 (1994). 분수 계산에서 절차적 지식의 획득을 위한 학습 방법들의 적용 효과 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

김수환 (1993). 수학 교육에서의 효율적인 학습 전략의 모색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 32(4). 452-470.

김응태 · 박승안 (1994). 정수론. 서울: 경문사

김정환 1995). 페스탈로찌의 교육철학. 서울: 고려대학교 출판부.

배종수 (2005). 초등수학교육내용지도법. 서울: 경문사.

서울대학교 교육연구소 (1998). 교육학 대백과 사전 1. 춘천: 하우동설.

엄태동 (1998). 교육적 인식론 탐구. 서울: 교육과학사.

우정호 (1977). Piaget의 자연수 개념 연구의 교육적 해석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 16(1). 1-10.

우정호 (1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

우정호 · 임재훈 (2002). 플라톤의 수학교육 철학에 기초한 수학교육론. 수학교육학의 지평. 서울: 경문사.

유충현 (2008). 칸트의 선험철학과 수학교육. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이경화 (1996a). 교수학적 변환론의 이해. 대한수학교육학회 논문집 6(1), 203-213.

이명희 (2001). 우리나라 초등 수학과 교육과정에 대한 수학교육철학적 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

임정대 (1996). 수학기초론의 이해. 서울: 청문각.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Alt, J. A. (2002). *Das Abenteuer der Erkenntnis.* München : Verlag C.H.Beck Ohg. 박종대 역(2003). 인식의 모험. 서울: 이마고.

Baroody, & Ginsburg (1986). The value of informal approaches to mathematics instruction and remediation, *Arithmetic Teacher.* 33(5). 14-18.

Bell, E. T. (1945). *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill Book Company. Benoit, R. (2006). 수란 무엇인가? : 원리와 개념으로 살펴보는 신비한 수의 세계. 정은비(역). 서울: 민음in.

Brainerd, C. J. (1979). *The Origin of Number Concept.* 유승구(역) (1991). 수개념의 기원. 서울: 성원사.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Clason, R. G. (1968). *Number concepts in arithmetic texts of the United States from 1880 to 1966, with* *related Psychological and mathematical developments.* Unpublished doctoral dissertation. The University of Michigan.

Comenius, J. A. (1953). *The Analytical Didactic.* 이숙종(역). 분석교수학. 서울: 대한교과서주식회사.

Confrey, J. (1980). *Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus. Unpublished Doctoral Dissertation.* The University of Chicago.

Davydov, V. V. (1990). The Empirical Character of Generalization as One of the Sources of Difficulties in Mastering Instructional Material. in J. Kilpatrick (ed.). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Reston,* VA : National Council of Teachers of Mathematics. pp. 102-159.

Dewey, J., & McLeaan, J. A. (1895). The Psychology of Number and its Applications to Methods of Teaching Arithmetic. D. Appleton and Company.

Dewey, J. (1972). Psychology of Number. *John Dewey: The Early Works, 1882-1898.* **Vol. 5**: 1895-1898. Early Essays. Carbondale and Edwardsville : Southern Illinois University Press. 424-429.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational task.* Dordrecht: G. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Hermann, W. (1949). *Philosophy of mathematics and natural science.* 김상문(역).(1987). 수리철학과 과학철학. 서울: 민음사.

Howson, G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kang, W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical knowledge in Textbook,* Doctral Dissertation, Athens: University of Georgia.

Klein, M. (1980). *Mathematics: The Loss of Certainty.* 박세희(역)(1994). 수학의 확실성. 서울 : 민음사.

Minskaya, G. I. (1975). Developing the concept of number by means of the relationship of quantities, In L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. VII. Children's capacity for Learning Mathematics.* pp. 207-269. The University of Chicago.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics.* Reston, VA: Auther: 구광조, 오병승, 류희찬 공역(1994). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

NCTM (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Piaget, J. (1969) *The Child's Conception of Number.* London : Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1978). *Success and understanding.* Cambridge, MA : Harvard University Press.

Russell, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy.* 임정대(역) (1986). 수리철학의 기초. 서울: 연세대학교 출판부.

Shulman, L. S. (1986b). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher* **15(2)**, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* **57(1)**, 1-22.

Skemp, R. R. (1976) *Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics Teaching* **77**. 20-26.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* (황우형 옮김). 2001. 수학학습 심리학. 서울 : (주)사이언스북스.

Thorndike, E. L. (1922). *The Psychology of Arithmetic. The Macmillan Company.*

The Analysis on the textbook Contents about the Natural number Concepts in the Korean National Elementary Mathematics Curriculum

Lee, Myeonghui
Seoul Bongeun Elementary School, Hak-dong-ro 79-2, Kang-Nam-ku, seoul, Korea, 135-866
E-mail : lmh9981@hanmail.net

Whang, Woo Hyung
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, seoul, Korea, 136-701
E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of this research is to analyze the textbook contents about the natural number concepts in the Korean National Elementary Mathematics Curriculum. Understanding a concept of natural number is crucial in school mathematics curriculum planning, since elementary students start their basic learning with natural number system. The concepts of natural number have various meaning from the perspectives of pedagogical research, and the philosophy of mathematics. The natural number concepts in the elementary math curriculum consist of four aspects; counting numbers, cardinal numbers, ordinal numbers, and measuring numbers. *Two research questions are addressed; (1) How are the natural number concepts focusing on counting, cardinal, ordinal , measuring numbers are covered in the national math curriculum? ; (2) What suggestions can be made to enhance the teaching and learning about the natural number concepts?* Findings reveal that (1) the national mathematics curriculum properly reflects four aspects of natural number concepts, as the curriculum covers 50% of the cardinal number system; (2) In the aspect of the counting number, we hope to add the meaning about 'one, two, three, ……, and so on' in the Korean Mathematics curriculum. In the ordinal number, we want to be rich the related meaning in a set. Further suggestions are made for *future research* to include them ensuing number in the curriculum.

* ZDM classification : F21
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : concepts of natural number, counting number, cardinal number, ordinal number, measuring number

<부록> 교육과정 분석

셈수적 측면 : Ct, 기수적 측면 : Cd,
순서수적 측면 : Od, 측정수적 측면 : Ms

단계	내 용	코 드
1-가	자연수는 1, 2, 3, 4, 5,…처럼 1부터 차례로 하나씩 증가시켜 얻어지는 수	Ct, Cd
1-가	여러 가지 사물의 낱낱을 하나, 둘, 셋,…세어 마지막으로 대응된 수사로 사물의 수를 나타내게 하여 집합수를 익힌다	Ct, Cd
1-가	사물의 위치나 차례를 나타내는 데에도 자연수가 사용된다	Od
1-가	구체물을 세는 활동을 바탕으로 개수가 같은 것끼리 모아 보게 하고, 개수를 추상화하여 하나, 둘, 셋,…은 수 1, 2, 3,…으로 나타내고	Ct, Cd
1-가	물건의 개수를 나타내는 집합수	Cd
1-가	차례를 나타내는 순서수	Cd
1-가	첫째, 둘째, 셋째,…를 숫자로는 1, 2, 3…으로 나타낸다	Od
1-가	0의 지도는 사물을 하나씩 덜어 내는 활동을 통하여 2에서 하나를 덜어 내면 1, 1에서 하나를 덜어 내면 0으로 나타내고 영이라고 읽는다는 것을 지도한다.	Cd, Od
1-가	물의 수효를 나타내는 수는 하나, 둘, 스물일곱(예, 27개→스물입곱 개, 35명→서른다섯 명)등으로 읽으며,	Cd
1-가	이름 대신에 사용하는 수는 일, 이, 이십칠(예, 출석 번호1번→일 번, 27호→이십칠호) 등으로 읽도록 한다.	Od
1-가	구체물의 수효를 세어서 같은 것, 많은 것, 적은 것 찾기 등의 활동을 통하여 수의 크기를 비교	Ct, Cd, Od
1-가	1 작은 수와 1 큰 수를 알아보는 활동을 통하여 수의 순서를 이해	Od
1-가	구체물을 사용하여 두 부분을 모아 보기, 두 부분으로 갈라보기 활동을 통하여 10미만의 자연수에 대한 합성과 분해를 이해	Cd
1-가	구체물을 10개씩 묶음과 낱개로 나타내는 활동을 통하여 그 수효를 두 자리 수의 자연수로 나타내게 하여 십진기수법의 자리잡기 원리를 이해	Cd
1-가	수세기가 필요한 실제 장면에서 차례로 세기(하나, 둘, 셋,…또는, 스물다섯, 스물여섯, 스물일곱,…), 거꾸로 세기(쉰, 마흔아홉, 마흔여덟,…), 번갈아 세기(2사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 갑-셋, 을-넷,…,3사람의 경우, 갑-하나, 을-둘, 병-셋, 갑-넷, 을-다섯, 병-여섯,…등)등 여러 가지 방법으로 수를 세게 한다.	Ct
1-나	100까지 수를 차례로 세어 보는 활동	Ct
1-나	수효를 나타내는 수와 연속량 또는 이름을 나타내는 수를 읽을 때에 읽는 방법이 다르다는 것을 익히게 한다. 예를 들면, 67m는 '육십칠 미터' 이라고 읽지만 67명, 67개, 67장 등은 '예순일곱 명(장, 개)으로 읽도록 한다.	Cd
1-나	아파트의 층수, 호수, 출석 번호 등을 소재로 이름을 대신하여 수로 나타낼 수 있으며, 그 의미도 알게 한다.	Od

단계	내 용	코 드
1-나	1 작은 수와 1 큰 수, 10작은 수와 10 큰 수를 찾아보는 활동을 바탕으로 51에서 100까지 수의 순서를 수 배열표를 통하여 이해하게 하여 0에서 100까지 수의 순서를 알게 한다.	Od
1-나	아파트의 층수, 호수 등을 소재로 순서수의 번호적인 의미도 알게 한다.	Od, Cd
1-나	구체물의 10개씩 묶음의 수와 낱개를 비교하는 활동, 수직선에서 수의 위치를 이용하는 활동 등을 통하여 두 수의 크기를 비교하게 하고 '…보다 크다', '…보다 작다' 는 표현을 할 수 있고 부등호(〈, 〉)로 나타낼 수 있게 한다.	Cd
1-나	9이하인 수의 범위에서 두 수로 가르기와 합이 9이하인 두 수의 모으기 활동을 바탕으로 10을 두 수로 가르기와 합이 10이 되는 두 수의 모으기를 이해하게 한다.	Cd
1-나	수 세기가 필요한 생활의 장면에서 사물의 개수를 하나씩 세는 것뿐만 아니라 2씩, 5씩, 10씩 묶어 세거나 수직선을 이용하여 뛰어 세는 활동을 통하여 사물의 개수를 능률적으로 빠르게 헤아릴 수 있게 하고, 앞으로 배울 곱셈의 기초가 되는 동수누가의 경험을 가지게 한다.	Ct
2-가	10개씩 10묶음으로 100을 도입하고, 일, 십, 백의 자리값의 의미와 자리잡기에 의한 십진기수법의 원리를 이해하게 한다.	Ct, Cd
2-가	이름을 나타내는 수이거나 연속량일 경우, 예를 들면 567kg일 경우에는 '오백육십칠킬로그램' 이라고 읽지만 567명과 같이 수효를 나타내는 경우에는 '오백예순일곱명' 으로 읽는 것을 충분히 익히도록 한다.	Od
3-가	십진기수법의 원리는 10이 되면 묶어서 세는 것이므로 낱개가 10이면 이를 묶어서 10이라 하고, 10씩 묶음이 10이면 이를 다시 묶어서 100이라 하고, 100씩 묶음이 10이면 이를 다시 묶어 1000이라고 하는 것을 깨닫게 하여 네 자리 수로서 1000을 지도한다.	Cd
4-가	1000이상의 자연수에서 큰 수의 읽기, 쓰기, 각 자리의 수, 자리값, 수계열, 대소 비교를 지도하여 큰 수의 개념을 확실히 이해하게 한다. 십진기수법의 원리와 명수법을 중점적으로 학습하여 억, 조까지의 수도 나타내고 쓸 수 있도록 한다.	Cd