韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 11. 제 49권, 제 4호, 423-436.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2010, Vol. 49, No. 4, 423-436.

소크라테스 방법의 의의와 실천
- 복소지수함수의 교수·학습에의 적용 -

김 성 아 (동국대학교 경주캠퍼스)
정 문 자 (수원대학교)

I. 서 론

맹자는 양나라 혜왕에게 백성을 이롭게 하기위해서는 의(義)를 가르쳐야한다고 말했다. 이(利)는 가르치지 않아도 누구나 스스로 알 수 있는 것이지만 의는 힘들여서 가르치고 애써서 배우지 않으면 얻을 수 없는 것이므로 의를 가르쳐야 한다는 것이다. 하지만 맹자는 의란 인간이 인간을 초월한 상태에서 나타날 수 있는 것이라고 말하였는데 이는 교육의 가장 중요한 일은 교육이 할 수 없는 일이라고 말한 프랑스 철학자 마르뗑의 말과 상통된다. 이것은 사랑, 봉사, 덕과 같은 가치는 교육이 가르칠 수 있는 일이 아니라 교육을 통하여 길러지는 것이라는 뜻이다. 맹자의 가르침은 교육이 의의 존재를 인정하고 있음을, 즉 의의 존재론적 원천이 바로 교육임을 뜻한다.

의는 인류의 삶에 처음으로 빛을 쪼여준 계몽주의자 소크라테스와 그의 제자 플라톤이 그들의 일생을 통하여 밝히고 실현하고자 한 것이다. 플라톤은 그의 '국가론'에서 "교육이란 개인의 영혼이 정의(正義)에 도달할 수 있도록 인도하는 것"이라고 말하고 있고, 플라톤 이후 많은 철학자와 교육학자들은 교육의 가장 중요한 목적인 의를 달성하기 위하여 어떻게 교육해야 하는가를 숙고해왔다. 개인의 인격은 사회 속에 있는 인격이며 교육은, 나아가 모든 교과교육은 인간의 인격달성에 중요한 부분이 되어야 한다. 칸트는 "인간은 오직 교육을 통하여 인간이 된다"고 언명하면서 "그[=인간]는 교육이 그로부터 만들어 낸 것 이외의 것이 아니다"라고 말하고 있다(김영래, 2003). 김안중(1993, 1995)은 아래 글에서 인간다운 삶을 위한 인류의 정신세계로서의 교과교육의 존재 이유를 들고 있고, 더불어 교과를 가르치는 교사가 있기에 교육이 성립한다고 말하고 있다.

> "영속하는 존재로서의 인류가 매 세대와 그 다음 세대와의 교섭을 통하여 그동안 이룩한 문명의 유산을 보존하고 발전시키는 것을 가리켜 교육이라고 부른다. 인류의 정신문명의 영속성을 믿고 그것을 자신의 것으로 삼아서 인간다운 삶을 살도록 하기 위해서 우리는 학교를 만들고 교과와 학문을 가르치는 것이다. 교과는 단순한 수단이 아니다. 그것은 인류가 역사적으로 가져온 경험들을 새로이 어린 세대가 이해하고, 자신의 것으로 삼고, 그럼으로써 자신도 인류의 일원으로 새롭게 태어나기 위해 힘들여 학습하지 않으면 안되는 매우 소중한 유산과 같은 것이다. 교육을 가리켜 제 2의 탄생이라고 하는 말은 새로이 태어난 아이들이 입문해야할 인류의 정신세계로서의 교과가 있고, 그것을 가르치는 교사가 있기 때문에 성립한다."

교사가 교과교육을 통하여 다루는 것은 지식이지만 학생들이 배워야 하는 것은 지식 그 자체가 아니라 바로 그 지식을 낳은 탐구과정이라는 점을 고려할 때, 우리는 교과교육 속에서도 철학하는 일이 이루어져야함을 주장할 수 있다. 또한, 교육의 가장 어려운 문제는 "볼 수 없는 상태"에 있는 사람을 어떻게 하면 "볼 수 있는 상태"로 나아가게 하는가 하는데 있다(이홍우, 1978)는 주장을 고려할 때, 우리는 플라톤의 '메논'(Boyd, 1996)에 예시되어 있는, 노예 소년의 눈을 뜨게 한 소크라테스의 방법을 논하지 않을 수 없다.

이 논문에서 본 연구자들은 소크라테스 방법의 교과

* 접수일(2010년 6월 9일), 수정일(2010년 9월 29일), 게재확정일(2010년 11월 8일)
* ZDM분류 : C70, D40
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 소크라테스방법, 교수, 학습, 복소지수함수

교육학적 측면을 논하고, 소크라테스 방법을 구현해줄 수 있는 최적의 교과인 수학교육에서의 의의를 살펴보았다. 또한, 소크라테스 방법의 실천으로 수학교과 내용 중 복소지수함수의 교수 · 학습에서 소크라테스 방법을 구현해보고, 그 결과를 분석하여 대학수학의 한 영역인 복소변수론의 교수 · 학습을 개선하는 데 일조하고자 하였다.

Ⅱ. 본 론

1. 교과교육에서의 소크라테스 방법

소크라테스는 "영혼이란 인식의 원천이다"는 정의를 부여한 최초의 사람으로 영혼의 발견이 교육의 목적임을 시사해주었다. 도덕적으로 탁월한 사람이었던 소크라테스와 속인 정도가 아니라 모든 악덕을 대표할 만한 사람인 메논과의 대화를 통하여 우리는 메논이 가지고 있는 지식과 소크라테스가 가지고 있는 지식의 차이를 알 수 있다. "메논의 지식은 누군가 다른 사람이 하는 말을 거의 문귀 그대로 듣고 외워서 기억했다가 재생하는 것인 반면, 소크라테스는 남으로부터 들은 것을 언제나 잊어버리고, 자기 자신의 노력으로, 자기 자신의 생각으로, 그리고 무엇보다도 중요하게, 자기 자신의 언어로 말하고 있다"(김안중, 1982). 이 글을 통하여 추측할 수 있는 것은, 메논의 지식은 그의 지식습득 과정이 말해주듯이 참다운 지혜가 아니라 외양으로서의 지혜가 되고 자신의 영혼을 발견하는 데 이르는 길을 마련해줄 수 없는 비인격적인 것으로 볼 수 있다.

소크라테스가 회상이라고 부른, 소크라테스와 노예 소년과의 대화로 이루어지는 학습과정을 보면, 소년은 자신의 무지를 깨닫고 알고자 하는 동기를 가지고 '볼 수 없는 상태'에서 '볼 수 있는 상태'로 나아가게 된다. 학습자가 자신이 알고 있다고 생각하던 지식에 대하여 무지함을 스스로 깨닫는 것은 계몽의 출발이며, 이것은 소크라테스 방법의 핵심이다. 인간이 자신의 무지를 깨닫게 되는 순간이 가장 인간다운 상태이고 철학하는 일을 시작할 수 있는 단계에 들어선다고 볼 수 있다. 무지를 깨달은 상태란 진정으로 겸허를 체험할 수 있는 상태이고, 이 때 끈기와 용기가 있다면 대화를 통한 끈질긴 탐구에 의해 '자신의 언어로 지식을 말하는 상태'로 나아갈 수 있다고 기대할 수 있다. Mendez(2001)의 주장대로 소크라테스와 노예 소년과의 대화는 단순한 교수방법의 모델이 아니다. 기원전 5세기로 거슬러 올라가면 이러한 교사와 학생의 의사소통은 교육의 일부였다. 그렇다면, 우리가 여기서 질문해야 하는 것은 소크라테스 방법이 교과교육에 불가피한 것인가 하는 것이다. 노예 소년이 소크라테스의 인격과의 만남으로 이루어지는 대화가 이에 대한 답을 마련해주고 있다고 볼 수 있다. 혹자는 유능한 교사의 독단적인 명쾌한 강의도 학생들에게 바른 지식에 이르는 길을 안내할 수 있다고 주장할지도 모른다. 그러나 독단적이고 일방적인 가르침은 학생이 가질 수 있는 자발적인 사고의 기회를 박탈하게 되고, 학생의 수준에서 이해되는 지식의 모습을 그 때 그 때 감지하는 일에 소홀할 수 있다. 이는 아기를 침대에 눕혀 놓고 우유병을 들고 우유를 먹이는 엄마의 모습과 흡사하다고 볼 수 있을 것이다. 가슴에 안고 우유를 먹일 때 느낄 수 있는 아이의 숨소리와 심장박동 소리를 느낄 수 없는 것처럼, 독단적인 가르침은 인격적 만남을 통한 가르침이 결여되어 있어 영혼의 소리를 들을 수 없는 것이다. 학생의 마음을 열게 하여 반대 질문에 대답하게 만들고 매 발언마다 이유를 들게 만들어 '마음의 자유'에 이르는 길을 제공하는 것은 오직 소크라테스의 방법을 통하여 가능하다고 볼 수 있을 것이다. 교사가 무지를 가장해서, 즉 교사가 학생이 느끼는 진리감각으로 돌아가서 이해성 있는 말로 학생의 심정적 불안을 완화해 주며 공동의 과제를 추구하려는 확고한 의지를 보인다면, 학생은 다른 사람들과 머리를 맞대고 숙고하는 것이 혼자서 하는 반성적 사고보다 진리를 아는데 더 용이한 방법임을 깨닫고 이 방법을 선호하게 될 것이라고 기대할 수 있을 것이다.

여기서 소크라테스 방법은 모든 교과교육에 필요할 뿐만 아니라 모든 교과교육에 적용되어야 하는 방법으로 정당화하고자 한다. 교과내용이 원리를 가르치는 것이라면 소크라테스 방법을 적용할 수 있고, 또 이렇게 하는 것이 진정한 인간교육임을 앞서 강조한 바 있다. 그런데 주목할 점은 어떠한 교과교육도 그 목적이 단순한 사실의 전달만은 아니라는 것이다. 언뜻 보기에 단순한 사실을 가르치는 것으로 보이는 교과도 원리를 포함하고 있고 원리를 이해해야 하는 측면을 가지고 있다. 가령, "물

이 섭씨 100도에서 끓는다"는 사실을 단순 사실로 가르치는 것으로 그치지 말고 물이 끓는 원리에 대한 이해를 탐구하도록 이끌 수 있다. 주변의 기압 상태에 따라서 물의 끓는 온도가 변할 수 있으므로, 물이 항상 섭씨 100도에서 끓는지를 반문하면서 대화를 끌어갈 수 있다. 물이 섭씨 100도에서 끓는다는 단순 사실 외에 이 사실을 낳은 탐구과정을 학습하지 않는 교과교육은 참된 이해를 낳을 수 없다. 또한 다른 사람들의 탐구과정을 배우고, 가능한 경우에 재현하는 일은 다른 세대 또는 같은 세대와의 교섭이 이루어지는 인격과 인격의 만남이다. 이전 세대가 이룩한 문명의 유산을 보존하고 발전시키는 일에 동참하는 것이다.

학습이 주변의 일상적인 사실로부터 출발하여 보편적인 것에 이르도록 이루어질 때 학생의 심리적 부담을 덜어줄 수 있고, 이 경우에 우리는 소크라테스의 방법이라는 후행의 방법[1]을 적용할 수 있다. Nelson(1949)[2]은 후행의 방법을 아래와 같이 설명하고 있다.

> "이 추상이라는 후행의 방법은, 사실에 관해서든 법칙에 관해서든, 어떤 새로운 지식을 만들어내는 방법이 아닙니다. 우리의 이성 속에 그 원래의 소유물로 잠자는 상태로 들어있는 것, 그러면서 모든 개별적 판단 속에 불분명하게 나타나 있는 것, 그런 것을 반성을 통해서 명료한 개념들로 변형시키는 방법, 그것이 이 방법입니다."

이 방법은 가장 근본적인 명제나 가장 일반적인 원리들을 찾는 것을 그 과업으로 하는 모든 학문분야에 적용될 수 있는 방법이다. 그런데 모든 교과교육의 내용이 이러한 반성적 사고를 요하는 측면이 있다고 볼 수 있다. "모든 사건에는 원인이 있다"는 종합적 선험적 판단도 사실은 경험에서 완전히 벗어나 있지 않다. 그동안에 이루어진 사건들을 볼 때 원인을 찾을 수 있었다는 후험적 판단이 이 종합적 선험적 판단의 밑바닥에 깔려 있다는 점은 모든 교과교육의 내용이 후행의 방법인 소크라테스의 방법을 적용하여 가르칠 수 있다고 정당화하게 한다. 특수에서 보편으로의 후행의 과정을 학생들 각자가 스스로 해볼 때, 즉 스스로 추상하는 기술을 혼자서 실천해볼 때 지식에 대한 참된 이해를 낳을 수 있을 것이다. 그리하여 학습자 자신의 눈으로 보는 바를 학습자 자신의 언어로 말할 수 있도록 하는 진정한 교육이 이루어지게 된다. 교육의 중요한 목적이 학습자의 안목을 바꾸어 놓는 일인 한 교과교육은 소크라테스의 방법에서 벗어날 수 없다고 본다.

2. 수학교육에서의 소크라테스 방법

Nelson(1949)은 소크라테스 방법이 현재 처해 있는 비참한 상황을 호전해줄 수 있는 교과는 수학으로, 우리는 수학을 선두에 세워 모든 교과교육에서 소크라테스 방법을 구현할 수 있다는 믿음을 가져야한다고 하였다.

> "현재 소크라테스의 방법이 처해있는 비참한 상황을 염두에 둘 때, 그 구원자로 나설 수 있는 것은 오직, 내가 오늘 논의해온 몇 가지 이점들을 가지고 있는 학문뿐입니다. 그런 이점을 가진 학문은 오직 수학뿐이고, 수학은 철학이 혼자의 노력으로는 결코 해낼 수 없는 선도의 역(役)을 확실히 할 수 있습니다. ... 학문으로서의 수학의 특성과 신용은 아직까지도 확고하게 살아있습니다. 길게 바라볼 때, 수학의 연구결과들에 대한 증거는 아무리 형편없는 교수방법이라 해도 흐려버릴 수 없는 것이고, 나머지 모든 것들이 암흑과 혼란 속에 빠져 버린다 해도 수학은 언제나 방향타의 역할을 하게 될 것입니다."

튼튼한 토대 위에 자명한 공리를 바닥에 깔고, 흔들림 없이 진보해온 수학은 온갖 반박에도 끝까지 살아남을 수 있어, 교과교육에 있어 소크라테스 방법을 실험할 수 있는 최적의 교과이다. 또한 수학은 철학과 더불어 모든 교과에 깊숙이 스며있는 토양으로 타 교과에 기본 아이디어를 제공해주기 때문에, 수학교과에서 소크라테스 방법을 구현하는 것이 모든 교과교육에서 소크라테스 방법이 적용될 수 있음을 시사해줄 것이다.

오늘날 교육 개혁에 있어서 주요목표 중 하나인 수학적 의사소통능력 신장은 모든 교과에서 추구하는 것으로 소크라테스와 노예 소년과의 대화가 그 시초라 볼 수 있다. 수학적 의사소통능력 신장은 2007년 개정교육과정에서 강조하고 있는 주요 목표 중 하나로 학습자 중심의

---

1) the regressive method

2) 논문에서 인용되는 Nelson의 글은 김안중 역입(미출판)

교수 · 학습 환경에서 이루어질 수 있다. 사실, 소크라테스 방법은 학습자 중심의 교육에 대한 최초의 시도이며 실현으로 볼 수 있다. 학습자와 대화를 시작한다는 것은 곧 학습자를 존중하는 학습자 중심 학습의 시작이다. 이러한 학습 환경에서 교사에게 요구되는 태도는, 학습의 주체인 학습자가 내면세계를 드러내어 자신의 사고방식으로 지식을 내면화할 수 있도록 대화를 이루어 나가는 것으로 볼 수 있다.

브루너는 각 교과교육에서 교과의 기본적인 아이디어, 곧 구조를 다루어야 한다고 주장하였다(이홍우, 2002). 어떤 내용의 구조를 학습한다는 것은 사물이 어떻게 관련되어 있는가를 학습하는 것이다(김웅태외, 2007). 브루너는 학습한 세세한 사항들이 구조화된 패턴 안에 있을 때 오래 기억될 수 있다고 하였다. 교실에서 교사의 설명식 강의와 몇 번의 질문으로는 지식의 구조를 단번에 학습하기는 어렵다. 반면에 소크라테스 방법에 의한 문답(이후 소크라테스 문답이라 칭함)으로 교사와 학생이 일대일 대면 학습을 한다면, 보다 짧은 시간 내에 학생이 지식의 구조를 파악할 수 있도록 유도할 수 있다. 그 이유는 다음과 같이 설명될 수 있다. 대부분의 설명식 수업에서 교사는 학습자가 수업 중에 이해하지 못한 내용이나 오개념을 학습자가 서술한 시험 답안을 보고서야 파악하게 되는 경향이 있다. 이에 비하여, 소크라테스 문답에서는 세세한 단계별 문답을 통하여 교사가 학습자의 무지와 오개념을 관찰할 수 있고, 학습자가 올바른 개념 이해에 이르도록 적절하게 안내할 수 있다. 이 때, 학습자가 학습하고 있는 지식의 구조를 깨달을 수 있도록 안내할 수 있다. 그리하여 학습자는 자신이 알고 있던 단편 지식들이 서로 어떻게 연결되어 있는지 보기 시작할 것이다.

가령, 학생에게 복소수에는 대소 관계가 정의될 수 없음을 가르칠 때, 교사는 학생에게 i와 0의 대소를 비교해볼 수 있는지 물을 수 있다. 학생이 $i>0$ 또는 $i<0$ 둘 중 어느 쪽으로 답하던지, 교사는 학생이 자신의 답을 정당화 하는 과정에서 양 변에 적당한 복소수를 곱해보도록 유도할 수 있다(결국은 적당한 복소수로 i를 떠오르게 한다). 이 때 학생은 실수의 대소 관계에서 성립하는 부등식의 성질을 자연스럽게 적용할 수 있는데 교사는 이를 허용한다. $i>0$이라고 답한 경우에 양변에 양수 i를 곱하고 부등호의 방향을 그대로 두면 부등식 $-1>0$을 얻게 되어 모순에 이를 것이다. 그래서 $i<0$이라고 생각하여, 양변에 음수인 i를 곱하고 부등호의 방향을 바꾸면 부등식 $-1>0$을 얻게 되어 또 다시 모순에 이르게 될 것이다. 그리하여 복소수에는 대소 관계가 정의될 수 없다는 사실을 깨달은 학생은, 대소 관계 정의가 가능하지 않은 복소수의 성질, $i^2=-1$로 정의되는 허수 i의 성질, 그리고 부등식의 성질 등, 단편적으로 알던 지식을 함께 엮어서 생각하게 되어, i와 관련된 이러한 지식의 구조를 보는데 이르게 될 수 있을 것이다. 그래서 학습자가 i를 떠올릴 때, 이렇게 엮어져 있는 성질들이 한꺼번에 떠오르게 되어 쉽게 잊어버리지 않게 될 것이고, 학습자에게 활용될 수 있는 지식으로 기억될 것이다. 이러한 지식의 구조를 파악하는 학습을 경험할 수 있는 교과로 여러 공리와 정의, 정리들의 내용이 치밀한 논리로 얽혀 결론을 얻을 수 있는 수학교과야말로 최적의 교과라 할 수 있다. 특히, 복소수는 대수, 해석학, 기하, 수론 등의 수학 내의 다양한 영역에서 문제를 해결하는 적절한 환경을 제공하므로(이동환, 2008), 지식의 구조를 학습할 수 있는 좋은 주제이다.

한편, 학습자가 수학적 사고에 참여하여 지식의 구조를 깨달을 수 있도록 안내하는 것은 전적으로 교사에게 달려 있다. Polya(1987)는 학교수학에서의 수학교육의 목적을 "학생이 사고하도록 가르치는 것"이라 주장하였는데, 이 또한 학습자가 수학적 사고에 참여하도록 이끌어 내는 소크라테스 방법의 정신에서 우러나온 것으로 볼 수 있다. 소크라테스 방법이 학습자의 사고활동을 중시하지만 수업의 주도권은 전적으로 교사에게 있음은 소크라테스 방법의 한 특징이다(김웅태외, 2007).

소크라테스 방법이 수학교육에서 성공하기 위하여, 교사는 교과에 대한 지식과 소크라테스 방법에 대한 지식뿐만 아니라, 앞서 언급한 소크라테스 방법의 정신을 올바르게 이해해야 함은 더 말할 필요가 없을 것이다. 소크라테스와 노예 소년과의 대화를 살펴보면, 대화의 중반까지 거의 소년은 예, 아니오로 답하고 있다. Mendez(2001)는 이를, 학습자가 스스로 추론하고, 질문하고, 정당화하는 기회를 제공하지 못하는 소크라테스 방법의 단점이라고 주장하나, 본 연구자들은 다른 관점에서, 수준이 다른 스승과의 대화 초반에서 학습자의 심

리적 부담을 덜어주고 대화의 장으로 마음을 열게 하는 스승의 사려 깊은 태도로 해석하고자 한다. 또한, 문제해결을 위한 문답의 시작에서, 예, 아니오의 답으로 학습자에게 사전 지식을 먼저 회상하게 하는 것은, 단계별 지식들이 논리적으로 연결되어 있는 수학학습에서는 더욱 필요할 것이다.

수학교육에서 소크라테스 문답은 교사의 약간의 암시나 힌트 정도로 학생의 이해가 이전 단계의 수준에서 다음단계의 수준으로 상승할 수 있도록 이루어져야 한다. 학습자가 스스로 발견할 수 있도록 안내하기 위하여서는 논리적 비약으로 구성된 문답으로는 결코 성공할 수 없을 것이다. 그리하여 학생이 교사의 도움으로 현재 속해 있는 발달영역에서 바로 근접해 있는 근접발달영역(황혜정외, 2007)으로 올라갈 수 있는 질문으로 이루어진 문답이어야 할 것이다. 피아제가 우선적으로 강조하는 지식에 대한 학습자의 자주적 구성 못지않게 도움이나 모방으로 구성한 지식에 대한 학습자의 내면화 활동을 강조하는 비고츠키의 교수방법(황혜정, 2007)에서 소크라테스 방법의 정신을 읽을 수 있을 것이다.

3. 복소지수함수의 교수학습에 적용해본 소크라테스 방법

3.1. 연구방법 및 내용

본 연구자들은 대학 수학 교육에서 실지수함수의 정의와 성질들이 어떻게 자연스럽게 복소지수함수로 확장되는지에 대한 학습자의 이해과정을 조사하기 위하여, 복소지수함수에 관한 소크라테스 문답법을 실시하여 학생이 회상하고 발견해나가는 학습과정을 살펴보았다. 이 연구는 소크라테스 방법이 수학교육의 교수학습의 개선에 주요한 위치를 차지하고 있음을 드러내고, 나아가 복소변수론 수업의 교수학습 개선방안을 모색하는 것을 목표로 하였다.

Freudenthal(1993)은 학습 경험 또는 과정으로서 의미를 갖는 수학적 지식의 재발명을 학습자 스스로 하는 것이 가능하고 보다 의미 있는 지도 방법이라 주장하였다. 재발명 방법을 통한 수업지도를 안내하기 위해서는 수업전에 교수자는 미리 수업장면을 연상하고 일어날 학생들의 반응을 생각해보고 가르치는 소위 '사고 실험'이 필요하다(김연식외, 1997). 김응태외(2007)는 소크라테스 방법이 사고실험을 통해 수업과 관련된 모든 사고를 미리 거치는 세련된 학습-지도 방법이라 하였다. 이에 연구자들은 사고실험으로 수업 장면에서 일어날 수 있는 학생들의 반응 및 이해를 미리 구상해 보고 그 내용을 작성하여 문답자료로 준비하였다. 문답 내용은 학생의 현재 수준에서 출발하여 복소지수함수 관련 지식으로 이전에 배운 것들을 회상하도록 유도하고, 그 후 기대할 수 있는 근접해 있는 다음 수준으로 올라갈 수 있도록 안내하도록 구상하여 작성하였다.

라카토스의 오류주의에 바탕을 둔 교육은 추측하고 비판하는 과정을 통해 교과지식의 의미있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하는 것을 중요한 목적으로 삼고 있다(강문봉, 1993). 연구자들은 학생과의 문답에서 지식을 회상하고 발견하게 하는 소크라테스 방법의 정신으로, 교수의 반박과 학생의 수정을 통하여 학습자가 의미있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 오류주의에 바탕을 둔 교육을 실천하고자 하였다.

본 연구의 참여 학생으로 OO도 소재 S대학교 수학과 2학년 학생 중 1명을 2009학년도 1학기 성적을 토대로 다음과 같이 선정하였다. 전체 평점 평균이 수학과 2학년 학생 중 상위 20% 이내의 성적을 유지하고, 2009학년도에 2학년 1학기 전공 선택 과목인 상미분방정식 강좌에서 동일한 범위의 평점을 받은 학생 중에서 2학년 2학기 전공 선택 과목인 복소변수론을 수강하지 않은 학생을 선발하였다.

연구자들이 사고실험을 통하여 문답지를 작성할 때, 문답의 한 단계에서 다음 단계로의 전환에서 학생의 소박한 개념전개가 자연스레 이루어질 수 있도록 각 단계를 설정하였다. 학생과의 문답에 직접 참여한 연구자는 복소해석학 전공으로 다년간 복소해석학을 가르쳐왔으며, 이 연구에 참여한 다른 연구자 역시 복소해석학 전공자이며 수학교과교육론 관련 강의를 다년간 해왔다. 기초 자료조사를 포함하여 이 연구는 여러 해를 걸쳐 구상되었고, 학생과의 문답은 2010년 1월 7일 교수연구실에서 2시간 동안 이루어졌다.

연구자는 학생과의 문답을 진행하면서 학생에게 떠오르는 생각을 미리 준비된 용지에 기록하게 하였고 그래프도 직접 그리도록 하였으며, 학생과의 모든 문답 내용

은 녹음하였다. 연구자들은 녹음한 대화내용의 녹취록을 작성하여 학생이 작성한 수식과 그래프를 토대로 학생의 학습과정을 분석하였다. 연구자들이 작성한 녹취록에서, 괄호 속의 내용은 학생의 활동을 나타낸다.

문답으로 시행한 전체 내용은, 연구에 참여하는 학생의 사전지식을 파악하기 위하여 복소수에 대한 이해로 복소수를 평면 위에 표시하기, 복소수의 크기 구하기, 복소수를 극좌표로 표시하기, 그리고 실지수함수에 대한 성질 등을 먼저 문답으로 시행 한 후에, 본 논문에서 소개하는 e^{iy}의 정의와 그래프를 찾는 문답, 복소지수함수 e^{z}의 정의와 주기성을 찾는 문답을 시행하였다. 복소수에 대한 학생의 사전 지식을 파악하는 문답에서 학생은 실수에서처럼 복소수에서도 대소가 있다는 생각을 당연한 것으로 받아들였는데, 문답에 참여한 연구자는 학생에게 크기가 같은 서로 다른 두 복소수를 비교해보게 함으로써 복소수 집합에서 대소가 정의될 수 없음을 깨닫게 할 수 있었다.

3.2. e^{iy}의 정의와 그래프를 찾는 문답

복소지수함수 e^{z}의 이해에 대한 문답 전에 e^{iy}에 대한 학생의 이해 정도를 알아보기 위하여 e^{iy}의 정의와 그래프를 찾는 문답을 먼저 실시해보았다. 학생에게 $z=x+iy\,(x, y$는 실수) 일 때, 함수 $f(z)=e^{z}$에 대하여 $y=0$ 또는 $x=0$인 특수한 경우에 대한 식을 찾아보게 한 후에, 아래 문답을 통하여 e^{iy}의 정의에 대하여 회상해보도록 하고 주어진 y의 범위에서 e^{iy}의 그래프를 그려보게 하였다.

(1) 문답 1 : e^{iy}의 정의

T: e^{iy}에 대하여 이전에 어디서 본 적이 있니? $e^{i\theta}$에 대해서 말이야.
S: 상미분방정식에서 본 것 같아요.
T: $e^{i\theta}$를 봤나?
S: 네. 했어요. 봤는데 기억이 안 나요.
T: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$라고 정의돼 (김용인, 2007). 그러니까 e^{iy}도.
S: $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ 라고 써야 하네요.
T: 그렇지. e^{iy}는 복소평면에서 y값 변화에 따라 어떻게 되는가? 우선 $y=\frac{\pi}{3}$인 경우에 e^{iy} 위치를 찾아보면?
S: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이예요. 여기는 평면을 다르게 표시해야 할 텐데.
T: 그렇지. 보통 실수, 허수축에 u, v란 기호를 사용하고 w평면이라고 해. $y=\frac{\pi}{6}$인 경우에 위치를 찾아보면?
S: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 이예요.

<분석 1> 학생은 2009년 1학기에 수강한 상미분방정식에서 $e^{i\theta}$를 배웠음을 기억하였지만 $e^{i\theta}$의 정의를 정확히 기억하지는 못하였다. 그러나, 연구자가 정의를 간단히 소개하자 학생은 e^{iy}에 바로 적용하여 y값 변화에 따른 함수값을 즉시 계산하였다. 연구자는 학생이 이러한 기계적 적용에 대한 이해에는 문제가 없음을 파악할 수 있었고, 선행학습이 비교적 잘 되어 있음을 알 수 있었다. 결과적으로, 학생은 e^{iy}의 정의를 어렵지 않게 회상할 수 있었다. 주미경 · 권오남(2003)은 함수의 기계적인 역할에 대하여 다음과 같이 서술하고 있다.

> "수학적 대화에서 흔히 찾아볼 수 있는 '기계 은유' 관점에서 함수란 투입 가능한 대상으로부터 조작을 통하여 어떤 결과물을 만들어내는 '기계'와 같다."

위 대화에서, 학생은 정의역이 속한 평면과는 다른 복소평면에 함수값을 표시해야 함을 말하고 있다. 그러나, 문답 2에서는 대화 초반에 이 사실에 대하여 여전히 혼동하고 있음을 알 수 있다.

(2) 문답 2 : e^{iy}의 그래프

T: 그럼 y가 변화하면 e^{iy}은 그래프가 어떻게 될까?
S: (<그림 1>을 그린다.)
T: 그러면 $0\le y\le 2\pi$ 범위에서 e^{iy} 그래프가 어떻게 될까?
S: (z평면에 구간 $0\le y\le 2\pi$ 를 표시하고 w평면에 <그림 2>를 그린다.)
T: 상이 직선으로 표시될 것 같다고?

S: 네.

T: 다시 생각해 봐.

T: $0 \leq y \leq 2\pi$범위에서 e^{iy} 그래프가 과연 그렇게 될까?

S: (z평면에 구간 $0 \leq y \leq 2\pi$를 나타내고, $\cos 2\pi = 1$이므로 1을 포함하여 w평면에 <그림 3>을 그린다.)
이렇게 되나요? 잠시만요. 조금 더 생각해볼께요. 정말 이상하네. ($y=\pi \Rightarrow \cos\pi = -1$ 이므로 -1을 포함시켜 두 개의 반원 모양으로 <그림 4>를 다시 그린다.)

T: 아까 일사분면만 나온다고 했는데, 여기 이사분면까지 나오잖아.

S: 네.

T: 그러니까 아까 것이 뭐가 좀 안 맞는다고 생각하지? 일사분면의 꺾은선 그래프 그건 절대 아니지?

S: 네.

T: 그럼 이 점 -1도 포함시켜야 하는데 어떻게 이미지가 나타내어지는지를 어떻게 알 수 있을까?

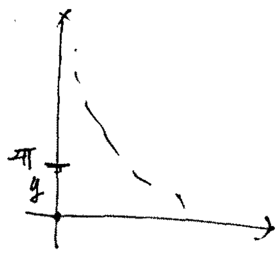
S: -1을 포함하고 y축을 중심으로 양쪽 대칭이 될 것 같아요.

T: 왜?

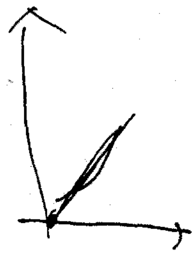
S: 코사인과 사인이 주기함수가 되니까 같은 값을 갖는 게 있어서 양쪽 대칭이 될 것 같아요.

T: 그래서 어떻게 나올 것 같아?

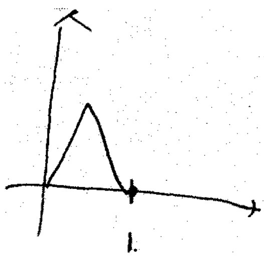
S: 반원?



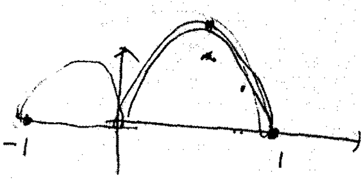
<그림 1> e^{iy}의 그래프 (1)



<그림 2> e^{iy}의 그래프 (2)



<그림 3> e^{iy}의 그래프 (3)



<그림 4> e^{iy}의 그래프 (4)

T: $\cos y + i\sin y$가 주기함수라 했는데 여기서 y 주기가 얼마야?

S: 2π요.

T: 그럼 y가 2π를 넘어가야 반복이 되지.

S: 아 ~.

T: 여기서 범위는 $0 \leq y \leq 2\pi$지?

S: 네.

T: 가장 쉬운 방법은 뭐야? 아까도 했듯이 네가 아는 y값을 더 넣어 봐.

S: 몇 개 더 해요? ($y=\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$, $y=\pi$, $y=\frac{\pi}{2}$일 때 값을 구해보고 점으로 반원 <그림 5>를 그린다.)

T: $0 \le y \le 2\pi$ 니까 y값을 더 넣어보면 어떻겠니? 아는 값이 얼마나 많은데 왜 몇 개만 넣었지?

S: 몇 개까지 찍어요?

T: 그림이 나올 때까지. 반원은 아니야.

S; 반원밖에 안 나와요.

T: 몇 개 찍어봤어?

S: $y=0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $y=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ 일 때요. 배운 건 아니죠?

T: 아직 안 배운 거지. 아직 안 배운 거니까 걱정하지마. 아직 안 배운 것을 어떻게 알 수 있을까, 어느 부분을 어려워하나 미리 알고 교수방법을 연구하고 개선하려고 그래. 모든 학생들이 거의 비슷한 부분에서 어려워하더라고.

S: 왜 반원이 아닐까?

T: 왜 반원이라고 생각해?

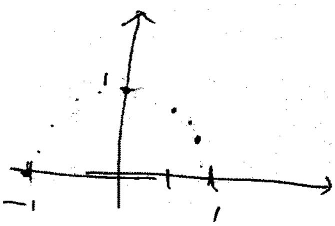
S: 나오는 값의 크기는 1이고 일사분면에 사분의 일 원이 나오는데 y축에 대칭이라 반원이 된다고 생각했어요.

T: 좀 더 범위를 넓혀 보지.

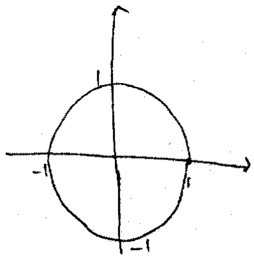
S: 아, 원이다.

T: 이제 알겠어?

S: 네. 코사인 함수가 음수가 되는 것만 생각하고, 사인함수가 음수가 되는 것을 생각 못했었어요. 저는 $\sin y$가 0보다 크다고만 생각했는데 아래 부분도 포함이 되네요. (반지름이 1인 원 <그림 6>을 그린다.)



<그림 5> e^{iy}의 그래프 (5)



<그림 6> e^{iy}의 그래프 (6)

<분석 2> 학생이 e^{iy}에 대하여 기계은유 관점에서는 제대로 계산하였지만, e^{iy}의 그래프 표현에는 올바른 아이디어 없이 출발하고 있음을 알 수 있다. 처음에는 <그림 1>에서 볼 수 있듯이 실함수와 복소함수의 그래프의 차이점을 인식하지 못하여 e^{iy}의 그래프를 그릴 때에도 실함수처럼 정의역과 치역을 동일 평면에 나타내었다. 그리고 감소하는 지수함수 e^{-x}의 그래프와 유사하게 그래프를 그렸다. <그림 2>에서는 정의역과 달리 치역만을 w평면에 그리긴 했지만, 이번에는 지수함수 e^{x}의 그래프와 비슷하게 그리려다 직선으로 그래프를 그렸다. 여기서 우리는 학생이 e^{x}의 그래프에 관해 기억하고 있는 단편적인 지식을 e^{iy}의 그래프에도 적용하려고 함을 알 수 있다.

<그림 3>에서는, w평면에서 그래프가 점 $w=1$을 지남을 상기하면서 <그림 2>의 증가하는 직선 그래프를 감소하도록 꺾어서 점 $w=1$과 연결되도록 그렸다. <그림 4>에서는 <그림 3>을 토대로 몇 개의 점의 상을 구하여 조금 더 자연스러운 곡선으로 나타낸 다음, e^{iy}가 코사인함수를 포함한다는 것을 상기하여, 점 1과 -1을 찍고 연결하면서 일사분면과 이사분면의 모습이 유사한 그래프를 그렸다. 마치 그래프가 y축에 대하여 대칭이 될 것이라 생각한 듯하다.

<그림 5>에서는, 일곱 개의 y값에 대하여 함수 e^{iy}의 상을 구하여 그래프를 그렸는데, 이 때 코사인함수가 음수 값을 가질 수 있음을 생각하여 좌우 대칭인 반원을 그렸다고 하였다. 구간 $\frac{\pi}{2}<y<\pi$에서는 $y=\frac{2\pi}{3}$의 값만 택하여 실제 함수값을 찾았는데, <그림 5>에서 보면 직접 계산하지 않고, 구하고자 하는 그래프가 허수축

에 대칭일 것이라고 생각하여 몇 개의 점을 찍어 반원을 그렸다. 여기서 $\pi < y < 2\pi$인 경우를 생각하지 못하고 있다. 학생의 표현 "코사인 함수가 음수가 되는 것만 생각하고, ... "에서, 연구자들은 학생이 어렴풋이 알고 있어 자신의 언어로 정확하게 표현하지 못하는 상태를 읽을 수 있었다.

<그림 6>에서는 e^{iy}의 일부인 사인함수까지 고려하여 좌우뿐만 아니라 상하가 대칭인 그래프로 반지름이 1인 원을 그렸다. 위 문답의 마지막 부분의 대화에서, 학생의 한 마디 외침 "아, 원이다"에서 본 연구자들은 학생이 발견의 기쁨을 맛보는 것을 감지할 수 있었고, 한편으로 소크라테스가 말하였듯이 학생이 이미 알고 있던 내용을 드디어 올바르게 회상해내는 것처럼 느껴졌다.

위 문답에서, 뚜렷이 나타나는 학생의 오류에 대한 교수의 반박 가운데서 자신의 오개념을 수정해나가는 학생의 사고과정을 엿볼 수 있었다.

3.3. 복소지수함수의 정의와 주기성을 찾는 문답

e^{iy}에 대한 이해를 토대로 아래 문답을 통하여 학생이 복소지수함수 e^z의 정의를 자연스럽게 추측하게 하고, 이 함수가 일대일 함수가 아님을 파악하도록 한 후에 주기함수임을 이해하는데 이르도록 안내하였다.

(1) 문답 3 : 복소지수함수 e^z의 정의

T: 일반적인 복소지수함수 e^z를 정의하기 위하여 우선 $z=1+iy$일 때 값이 어떻게 표현되겠니? 한 번 상상해봐.

S: $f(z)=e^{1+iy}=ee^{iy}=e(\cos y+i\sin y)$.

T: 복소 지수에서도 실수 지수에서와 유사하게 지수법칙이 성립된단다. 잘 사용했어. 그럼 $0\le y\le 2\pi$ 범위일 때 그 그래프와 크기를 찾아보자.

S: $y=0$일 때 e. (반지름이 e인 원을 그린다).

T: 금방 잘 하네. 그럼 이제, $z=x+iy$일 때 $f(z)=e^z=e^{x+iy}$ 를 정의해보자.

S: $f(z)=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 로 정의하면 되겠네요.

T: e^z 의 크기는?

S: e^x.

T: $z=3+i\frac{\pi}{4}$ 일 때, e^z 의 함수값을 찾고 그 위치를 찾아보아라.

S: $f(z)$

$$=e^{3+i\frac{\pi}{4}}=e^3e^{i\frac{\pi}{4}}=e^3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$=e^3(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i).$$

(점의 위치를 바르게 그린다.)

T: 이와 같은 함수값을 갖는 점이 $z=3+i\frac{\pi}{4}$ 외에 또 있을까?

S: 아니오. 한 점 밖에 없어요.

T: 이게 좀 복잡해서 그렇게 보이나 보다.

<분석 3> 실함수에 대하여 성립하는 지수법칙을 자연스럽게 복소함수에 적용시키면서 복소지수함수의 정의를 찾았으며, 복소지수함수의 함수값도 올바르게 계산하였다. 실지수함수와는 달리 복소지수함수에서 일어날 수 있는 다른 성질을 예측하지 않고 복소지수함수도 당연히 일대일 대응이라고 생각하는 것을 관찰할 수 있었다. 또한, 수학 학습에서 차원이 한 단계 높아지는 경우인 일반화 과정에서 기존 지식을 조절하는 사고가 다소 결여되어 있음을 알 수 있었다. 그리하여, 연구자들은 학생이 바로 다음 문답을 통하여 개념을 확장해갈 수 있는지 관찰하는 일에 더욱 흥미를 갖게 되었다.

(2) 문답 4 : 복소지수함수 e^z의 주기성

T: $z=\frac{\pi}{4}i$일 때, 복소지수함수 f의 값을 구해보자.

S: $f(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. (점의 위치를 그린다.)

T: 이 함수값을 갖는 점이 z평면 상에 $z=i\frac{\pi}{4}$ 외에 또 있을까? 아까의 함수에 대해서는 또 없을 것 같다고 그랬지? 그런 함수는 어떤 함수야?

S: 일대일 함수요.

T: 이런 경우에는 일대일함수인지 아닌지 생각해 보자는 거야. 이게 조금 더 간단하니까.

S: 어디서요?

T: z평면에서.

S: x까지 살리면 있을 것 같아요. $\frac{3}{4}\pi$?

$$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x=\frac{2\sqrt{2}}{2},\quad y=\frac{3}{4}\pi,\quad \text{즉}$$

$z = \sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi i$. (<그림 7>을 작성한다.)

$\frac{3}{4}\pi$

$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$y = \frac{3}{4}\pi$

$z = \sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi i$

<그림 7> $f(\frac{\pi}{4}i)$ 와 같은 값을 갖는 z를 찾는 계산(1)

T: 그 점에서의 복소지수함수 e^z 값을 구해보면?
S: 이 점 밖에 없나 봐요.
T: 아까 분명히 코사인과 사인함수는 뭐라고 했지?
S: 주기함수요.
T: 주기함수면 여러 개가 있어야 하는 것 아니야?
S: 음, 주기함수면 일대일이 아닌데. 복소수가 있어서 바뀌나?
T: 어떻게 바뀐다고?
S: 복소수가 있어서 일대일로 바뀐다고요.
T: 이게 y에 대해서 주기함수인데...
S: 다시 풀어볼게요.

$f(z) = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$,

$e^x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $e^x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$e^{2x}(\sin^2 y + \cos^2 y) = 1$, $e^{2x} = 1$, $x = 0$.

(<그림8>을 작성한다.)

어쩔 수 없네. 일대일인가 봐요.

$f(z) = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$

$= e^x\cos y + e^x \sin y\,(i)$

$e^x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$e^x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$e^{2x}(\sin^2 y + \cos^2 y) = 1$

$e^{2x} = 1$

$x = 0$

<그림 8> $f(\frac{\pi}{4}i)$ 와 같은 값을 갖는 z를 찾는 계산(2)

T: 아니, x가 아니고 $\sin y$가 주기함수라며?
S: 네, 2π씩 늘어난 것도 되나 봐요. 그런데 어떻게 접근해야 할지 모르겠어요.
T: 아까 $y = \frac{\pi}{4}$가 나왔었지?
S: 네.
T: 그러면?
S: $x = 2\pi$일 때와 $y = \frac{9\pi}{4}$일 때요.
T: $x = 2\pi$는 왜 해?
S: 아, x는 주기함수가 아니구나. $y = \frac{1}{4}\pi + 2n\pi$
T: 이제 알겠어?
S: 네. 이거, 무섭다. 소름끼쳐.
T: $y = \frac{9\pi}{4}$일 때 어떻게 된다고?
S: $y = \frac{9\pi}{4}$일 때도 $y = \frac{\pi}{4}$일 때와 같은 함수값을 가져요.
T: 그리고 또?
S: $y = \frac{1}{4}\pi + 2n\pi$일 때도 같은 함수값을 가져요.
T: $z = 3 + i\frac{\pi}{4}$ 일 때의 함수값에 대해서는?
S: $z = 3 + i(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)$ 일 때도 같은 함수값을 가져요.
T: 그러니까 이것도 일대일이 아니지. 실수일 때의 성질을 가지면서 복소수로 확장하며 조금 다른 성질을 갖게 되었지. 그렇다면 e^z는 주기함수라할 수 있니?
S: 네, 그럴 것 같아요.
T: e^z의 주기를 찾아보면?
S: 주기가 2π인 주기함수.
T: 그럼 주기가 2π일 때 두 점의 함수값을 비교해 봐. 같아야 되겠지?
S: 네. $z = x + yi$ 일 때,

$f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$ 이고,

$z = (x + 2\pi) + yi$일 때

$f(z) = e^{2\pi + x}(\cos y + i\sin y)$

$= e^{2\pi}(e^x\cos y + e^x i\sin y)$.

$e^{2\pi}$가 더 생겼어요.

T: 그래 똑같지 않지?
S: $e^{2\pi}$가 1인가?
T: 그게 왜 1이야?
S: 그럼 이게 주기함수가 아닌 거예요?
T: 주기를 잘못 구했을 수도 있지.

S: 아. 그런데 $e^{2\pi}$ 부분이 1이 되려면 주기는 0이어야 하는데.
T: 아까 분명히 z하나에 대해 $f(z)$값을 구하고 그 값을 상으로 갖는 z를 여러 개 구했잖아.
S: 네.
T: 그럼 분명히 주기가 있어야지. 그러니까 주기를 2π라고 한 게 잘못 된 거지. 똑같은 함수값이안 나오니까.
S: 아. $2n\pi$? 주기에 i가 들어가도 돼요?
T: 당연히 되지.
S: 아, 돼요? 그럼 $2\pi i$요.
T: 나중에 배울 내용을 스스로 다 알아냈어.

<분석 4> 위 문답에서는 먼저 복소수 $z=\frac{\pi}{4}i$의 상을 찾은 후, 이와 동일한 상을 갖는 복소수 z를 찾도록 하여 복소지수함수 e^z가 일대일함수가 아님을 깨닫도록 하였다. <그림7>에서처럼 학생은 특정한 z값을 선택하여 그 상이 $f(\pi i/4)$ 와 다를 것 같다고 추측하여 f는 일대일함수라고 답변하고 있다. 또한, "x까지 살리면 있을 것 같아요."라고 하면서, $f(\pi i/4)$ 와 같은 값을 갖는 독립변수 z를 찾는 시도에서, 허수부가 $3\pi/4$ 이고 실수부가 0이 아닌 복소수 z를 찾으려고 하였다. 그러나, 그런 z의 실수부 x를 설정하는 과정을 보면 독립변수와 종속변수 사이에서 혼돈을 일으키는 것처럼 보였다.

한편, 주기함수가 일대일함수가 아님을 바로 답한 것을 보면, 일대일함수에 대하여 기본적으로 이해하고 있다고 볼 수 있다. 코사인과 사인함수는 주기함수이나 복소함수 형태로 연결되어 있어(학생의 표현은 "복소수가 있어...") f가 주기함수가 안 될 것으로 생각하고 있다. 여기서 확연하게 복소지수함수를 실지수함수와 차별화하고 있음을 알 수 있다. $\sin y$가 주기함수라는 힌트를 듣자 $f(z)=f(\pi i/4)$ 를 만족하는 다른 $z=x+yi$ 값을 찾기 위하여 구체적인 계산(<그림8>)을 시도하였고 x, y에 관한 연립방정식(<그림8>)을 세워 z의 실수부 x가 0이 됨을 알아낸다. 그러나 y값을 계산해서 z를 찾아야 함을 깨닫지 못하고, f가 어쩔 수없이 일대일이라고 말하고 있다. 연구에 참여한 학생이 두 개의 실수변수로 표시되는 이차원 복소수의 연산을 충분히 학습하지 않은 학생이라는 점을 고려할 때, 연구자들은 학생의 이러한 오류에 대하여 그리 실망하지는 않았다.

여러 번의 문답을 통하여 정확한 해들을 구하고, y값이 2π배 만큼 늘어나다는 사실을 발견한 후에, 학생은 복소지수함수 e^z가 실지수함수 e^x와는 큰 차이가 있음을 깨닫고 무섭고 소름끼친다고 하였다. 문답 3에서처럼 복소지수함수가 당연히 실지수함수와 비슷한 성질을 가질 것이라고 추측하는 것이 얼마나 잘못되었는지 확연히 깨닫는 상태로 볼 수 있다. 연구자들은 여기서 학생이 자신의 무지를 깨닫고 눈을 뜨는, 그리하여 볼 수 없었던 것을 이제는 보는 상황이 무엇인지 또 한 번 경험하였고, 학생의 '무섭다'는 표현에서 학생은 깨달은 자로 겸손을 체험하고 있음을 알 수 있었다. 연구자들은, 연구에 참여한 학생이 학습한 지식을 동료 학생들에게 자신의 언어로 말할 수 있는 상태로 나아갈 수 있기를 기대한다.

이와 같은 발견에 대한 경이는 새로운 수학 개념에 대한 학습동기로 이어질 수 있다. 새로운 수학 개념이 제시될 때, 그 개념이 이전에 학습한 유사한 개념들과 어떤 차이가 있는지를 예상해볼 수 있는 힘을 길러주고 새로운 개념에 대한 탐구심을 불러일으킬 것이다.

한편, 주기를 구하는 과정에서도 계산을 해보기전에 실함수 경우를 떠올리며 주기는 무조건 실수라고 생각하였는데, 복소수에 대한 개념이미지가 여전히 실수 범위 안에 있음을 알 수 있었다. 수의 확장에서 새로이 등장한 수에 대하여 올바른 개념이미지를 갖는 데에 충분한 시간이 필요함을 상기시켜주는 대화였다. 이것은 Whitehead(1951)가 주장하는 학습에서의 기초단계인 낭만의 단계에 충분히 머무르는 것이 그 다음 단계인 정밀함의 단계로 넘어가는 데 있어 중요함을 말해주고 있다.

3.4 설문조사 분석

본 연구자들은 연구에 참여한 학생에게, 소크라테스 문답을 통한 학습을 마치고 3일 후에, 소크라테스 문답법이라는 교수방법에 대하여 이메일로 설문조사를 하여, 학생이 작성한 답변을 분석해보았다. 설문조사에서 질문한 내용은 다음과 같다.

① 소크라테스 문답법으로 학습하는 경우 어떤 점이 좋았는가? 어떤 점이 불편했는가?
② 교실에서 교수의 설명식 강의를 들으며 학습하는 경우와, 교수와 일대일 문답으로 학습하는 두 경우를 비교해보아라.

③ 문답을 통하여 이해하게 된 내용은 오래 기억될 수 있다고 보는가? 그렇다면, 그 이유는?

④ 문답을 통한 학습에서 이해하게 된 수학 개념들을 (문답 가운데 교수의 도움으로) 자신이 스스로 찾아냈다는 생각이 드는가? 특히, 어떤 경우에 그런 생각이 더욱 드는가?

소크라테스 문답을 통한 학습에서는 주어진 문제를 이해하기 위하여 스스로 많이 생각해야 하는 데 이러한 상황을 좋게 받아들이면서, 문제를 이해하지 못하게 되는 경우에는 답답하다는 표현을 하였다. 이 답답함은 자신의 무지에 대한 깨달음으로 해석될 수 있다.

교수의 설명식 강의에서 어떤 개념에 관한 설명을 들을 때는 듣는 순간에는 이해가 되더라도 그 개념을 명확히 이해하였는지 자신도 알 수 없었다고 하면서, 소크라테스 문답을 통하여 학습할 때는 이런 혼돈 없이 아는 것은 명확하게 알고, 또 자신이 무엇을 모르는지 분명하게 알 수 있었다고 한다. 칸트는 무지라는 의식을 두 종류로 구분하여 그 중 하나는 대립되는 것을 견주어 보고 이를 통해서 이 대립되는 것을 알지 못함을 깨닫는 것이고, 두 번째는 대상들 자체를 아예 모르는 것이다고 하였다(이강서, 2004). 자신이 무엇을 모르는지 분명하게 알 수 있었다는 학생의 답변에서, 연구자들은 바로 칸트가 말한 첫 번째 무지를 연상할 수 있었다.

문답을 통하여 이해하게 된 내용은, 스스로가 문제에 대하여 생각하려는 노력을 하였고 힘들게 알아낸 만큼 오래 기억될 수 있다고 답변하였는데, "생각하려는 노력을 하였고 힘들게 알아낸"이라는 표현에서 끈질긴 탐구 과정을 겪은 학생의 태도를 읽을 수 있다. 오래 기억될 수 있는 또 다른 이유는 친구나 선배가 아닌 교수와의 일대일 문답이라서 그렇다고 생각하였다. 이 답변에서 메논이 가지고 있는 지식과 소크라테스가 가지고 있는 지식의 차이를 감지한 학생의 태도를 느낄 수 있을 것이다.

문답을 통한 학습에서 교수의 도움이 있기는 했지만, 스스로 곰곰히 생각하여 이해하기 어려운 수학 개념을 알아낸 것 같다고 답변하였다. 한가지의 개념을 확실히 알아내고 그 응용문제들을 풀 때면 더욱 그런 생각이 든다고 답변하였다. 연구 참여 학생은 자기 자신의 노력으로, 자기 자신의 생각으로 문제를 해결하였다는 생각을 하고 있다.

III. 결론 및 제언

본 연구에서 연구자들은 소크라테스 방법의 교과교육학적 측면을 논하고, 수학교육에서의 의의를 살펴보았다. 그리고, 소크라테스 방법의 실천으로 대학수학 교과 내용 중 복소지수함수의 교수·학습에서 소크라테스 방법을 적용해보는 실험수업을 하였다. 그런 후, 학생과의 대화록, 학생이 그린 그림과 계산식 그리고 학생이 경험한 소크라테스 방법에 대한 설문조사 자료 등을 분석하여 아래와 같은 결론을 얻었다.

첫째, 소크라테스 문답을 복소변수론을 아직 수강하지 않은 학생에게 적용하였음에도 불구하고, 연구에 참여한 학생은 복소지수함수 e^z의 정의와 주기성을 어느 정도 이해하는데 도달할 수 있었다. 소크라테스 문답이 학생에게 단순한 토막지식으로서가 아니라 복소지수함수 e^z가 가지고 있는 지식의 구조에 눈을 뜨는 계기를 마련하였음을 알 수 있었다.

둘째, 이 연구에 참여한 학생이 소크라테스 문답을 통하여, 자신이 무엇을 모르는지 그리고 알게 된 것은 무엇인지를 자신의 말로 고백하였다. 또한 자신의 무지를 있는 그대로 드러내는 모습을 통하여, 교사와의 문답에서 인격적인 교류를 하였음을 알 수 있었다.

셋째, 본 연구자들은 실지수함수의 일대일 대응 성질을 복소지수함수 e^z에 그대로 적용시키려 한 학생의 태도에서, 조절이 필요한 일반화 과정에서 학생은 여전히 실지수함수 e^x에 대한 기존 사고양식을 그대로 적용하려고 하는 것을 읽을 수 있었다. 학생이 새로운 내용인 복소지수함수를 접하면서 가지게 된 인지적 불균형을 교사의 도움으로 조절하여 새로운 형식을 구성하는 것을 보면서, 적절한 발문의 제시자로서의 교사의 역할이 얼마나 중요한지 확인할 수 있었다.

넷째, 복소수의 연산은 실수 연산의 확장으로 약간의 조절을 통하여 이해할 수 있지만, 실함수를 복소함수로 확장하는 과정에는 인지적 충돌을 유발할 수 있는 어려운 점이 많음을 본 연구자들은 경험해왔다. 이점은 본 연구에서도 학생과의 문답을 통하여서 명백히 확인되었다. 복소함수의 대수식에서 함수값을 찾는 것은 실함수

에서 함수값을 찾는 기계적인 동화로도 가능하다. 하지만, 한 평면의 점이 다른 평면의 점으로 대응되는 복소함수를 시각적으로 이해하는 일은 끈질긴 탐구와 연습을 수반한 반성적 사고로 이루어질 수 있음을 함수 e^{iy}의 상을 찾는 문답을 통하여 확인하였다.

본 연구자들은 이러한 연구결과를 토대로, 수학교과의 교수·학습 개선을 위하여, 특별히 대학수학의 한 분야인 복소해석학의 교수·학습의 개선을 위하여 다음과 같이 제언한다.

첫째, 강의실에서의 수업은 일대일 소크라테스 문답으로 진행할 수 없지만, 소집단 토론 학습을 통하여 학습자간, 교수와 소집단간의 문답으로 진행해볼 것을 제언한다. 이러한 수업을 시행하기 전에 학습자의 수준을 고려한 사고실험, 즉 가상적인 소크라테스 문답은 빠뜨릴 수 없는 수업준비일 것이다. 특히, 학생들이 어려움을 느끼는 개념에 대하여 구조화된 문답을 미리 작성해보고, 수업 전에 평균 수준의 학생을 선별하여 일대일 문답으로 실험하고 적절히 수정해본다면 더 없이 좋은 수업준비가 될 것이다. 또한, 수업에서 주요개념의 학습을 시작하기 전에 교사가 미리 준비한 구조화된 질문을 학생들에게 제시하여 소집단으로 토론하게 한 다음, 각자 자신과 소집단의 생각의 변화를 기록하도록 하는 것도 한 방법일 것이다. 김재우·오원근(2002)은 중학교 물리 학습 지도에서 소크라테스 문답을 소집단 토론과 결합하여 다인수 학급에 적용할 수 있는 교수모형을 개발하였는데, 수학교과에서도 이러한 노력이 앞으로의 연구 과제라고 생각한다.

둘째, 복소수 연산의 학습에서부터 기하적 의미를 더욱 강조하여 학습한다면, 여러 기본 복소함수의 올바른 기하적 개념이미지를 구성하는데 도움을 줄 수 있을 것으로 생각한다. 복소수 연산의 단계에서 충분한 시간을 들여 반성적 학습을 할 때, 실함수와 차원을 달리하는 복소함수에서 겪는 어려움이 다소 해결될 수 있을 것이다.

셋째, 특히, 복소지수함수에 대한 학습은 실함수와 복소함수의 차이를 명백히 드러내므로(가령 일대일대응의 여부), 각 주제 내용을 좀 더 단계적으로 세분화하여 제시하는 것이 도움이 될 것이다. 예로, 함수의 그래프 학습에서 독립변수의 영역을 점, 직선, 곡선의 순으로 제시하여 그래프를 그려보는 활동을 충분히 하도록 한다. 이때 교수는 학생들이 문제에 대한 탐구활동을 먼저 하게 한 후에 학생 상호간의 토론과 교수의 적절한 발문으로 올바른 답에 이르게 해야 한다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김안중 (1982). 메논의 요약 및 해설, 한국교육, 9(1).

김안중 (1993). 교육을 보는 눈이 달라져야 한다, 교육개발 통권, 84.

김안중 (1995). 교사가 빠진 교육개혁, 교육개발 통권, 96.

김연식·정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 수학교육학연구, 7(2), 1-23.

김영래 (2003). 칸트의 교육이론, 서울: 학지사.

김용인 (2007). 복소함수론 강의, 서울: 경문사

김응태·박한식·우정호 (2007). 수학교육학개론, 서울대학교 출판부.

김재우·오원근 (2002). 소집단 토론이 결합된 소크라테스 질문법을 통한 물리학습 지도 모형, Sae Mulli, 45(4), p.229-236.

이강서 역, G. Martin (2004). 세 현인 이야기 1: 대화의 철학 소크라테스, 경기도 파주시: 한길사.

이동환 (2008). 기하학적 측면에서 복소수의 지도가능성 고찰, 수학교육학연구, 18(1), 51-62.

이홍우 (1978). 지식의 구조와 교과, 경기도 파주시: 교육과학사.

이홍우 역, W. Boyd (1996). 서양교육사, 경기도 파주시: 교육과학사.

이홍우 역, J. Bruner (2002). 교육의 과정, 교육신서 5, 서울: 배영사.

주미경·권오남 (2003). 학생들의 미분방정식 개념에 대한 수학적 은유의 분석: 개념적 모델의 이중성에 대한 사회문화적 관점, 학교수학, 5(1), 135-149.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽 (2007). 수학교육학신론, 서울: 문음사.

H. Freudenthal (1993). Thought on Teaching mechanics: Didactical Phenomenology of the Concept of Force, *Educational Studies in Mathematics* 25, 71-87.

P. Mendez (2001). A History of Mathematical Dialogue in Textbooks and Classrooms, *The Mathematics Teacher* 94(3), 170-173.

L. Nelson (1949). *'The Socratic Method', Socratic Method and Critical Philosophy: Selected Essays,* New York: Dover Publications.

G. Polya (1987). On learning, teaching and learning teaching, In F. R. Curcio (ed), *Teaching and Learning: A Problem-Solving Focus*, Reston, VA: NCTM.

A. Whitehead (1951). *The aims of education,* The MacMillian Company, New York. Company, New York.

Meaning and Realization of the Socratic Method

- Application to Teaching-Learning of Complex Natural Exponential Function -

Seong-A Kim†

Department of Mathematics Education, Dongguk University, Gyeongju, Gyeongsangbuk-do 780-714, Korea

E-mail : sakim@dongguk.ac.kr

Moonja Jeong

Department of Mathematics, University of Suwon, Hwaseong-si, Gyeonggi-do 445-743, Korea

E-mai l: mjeong@suwon.ac.kr

In this paper we discuss the Socratic method from the aspects of subject education and examine the meaning of the method in mathematics education that is the most suitable subject for the realization of the Socratic method.

In addition, as a realization of the Socratic method, we conducted a teaching-learning experiment of complex natural exponential function with a 2nd year college student. The results of the experiment are analyzed with the intention of improving instruction of the complex analysis that is one of the college mathematics courses.

* ZDM Classification : C70, D40

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key words : The Socratic Method, Teaching, Learning, Complex Natural Exponential Function

† Corresponding author