

나이퀴스트 선도 및 보우드 선도를 이용한 폐루프 제어시스템의 안정도 판별

■강 태 삼

(건국대학교 항공우주정보시스템공학과)

나 이퀴스트 선도과 보우드 선도는 주파수 영역에서 시스템의 안정성을 판별하는 중요한 수단이다. 본 소고에서는 나이퀴스트 판별법의 근간이 되는 판각의 원리, 그리고 이에 기초한 나이퀴스트 판별법, 이를 활용한 안정도 및 안정도 여유 판별법, 그리고 나이퀴스트 선도과 보우드 선도와의 관계 및 활용시의 장단점을 비교함으로써, 제어기 설계시 도움이 되도록 하였다.

1. 주파수 영역에서의 시스템의 응답

그림 1에서와 같이 시불변 선형시스템 $G(s)$ 에 다음과 같은 정현파 신호가 가해 질 때,

$$r(t) = \sin(\omega t) \quad (1)$$

정상상태에서의 출력은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

여기서,

$$\phi = \angle G(j\omega) \quad (3)$$

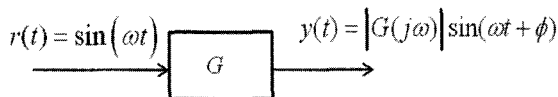


그림 1. 시불변 선형 시스템 입출력 특성.

즉, 정상상태의 출력의 주파수는 가해진 입력의 주파수와 같고, 크기와 위상만 가해진 주파수에 따라 (2)와 같이 변한다. 따라서, 전달함수 $G(s)$ 에서 s 대신 $j\omega$ 를 대입한 $G(j\omega)$ 는 모든 각각의 정현파 입력에 대해서 출력의 증폭비 $|G(j\omega)|$ 및 출력 신호의 위상 이동각 $\angle G(j\omega)$ 정보를 모두 가지고 있으며, 따라서 시스템의 주파수 응답특성을 제공한다.

2. 나이퀴스트 안정도 판별법

이제 그림 2와 같이 음의 되먹임이 있는 폐루프 제어 시스템을 고려하자.

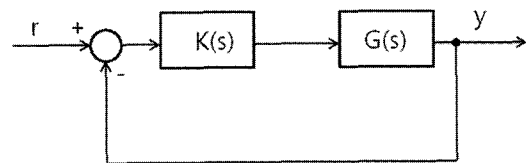


그림 2. 폐루프 제어 시스템 구조.

여기서 $K(s)$ 는 제어기의 전달함수를 나타낸다. 이때, 기준 입력 r 에서 페루프 출력 y 에 이르는 전달함수 $T(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (4)$$

여기서 전체 페루프 시스템의 안정성은 $T(s)$ 의 특성방정식

$$\Delta(s) = 1 + G(s)K(s) \quad (5)$$

의 영점(zero)에 의하여 결정된다.

(5)의 영점은 (5)를 직접 풀어서 구할 수도 있지만, 그럴 경우는 $K(s)$ 또는 $G(s)$ 가 조금씩 변할 경우 근이 움직이는 경향을 파악하기 쉽지 않다. Nyquist는 (5)로 주어지는 특성 방정식의 근이 안정 영역(복소수 평면의 좌측 반평면)에 있는지 여부를 그래프를 그려서 확인 할 수 있는 방법을 발견하였다. 그것은 Cauchy의 편각의 원리(Argument Principle)에 기초를 두고 있으며, 이 편각의 원리는 다음과 같다[1].

정리 1: 편각의 원리[1]

함수 $f(z)$ 가 단순 폐 경로(simple closed contour) C 의 내부에 존재하는 유한개수의 극점을 제외한 모든 영역 및 폐 경로의 경계선에서 해석적(analytic)이며, C 상에서 $f(z) \neq 0$ 일 때, 다음이 성립한다. 단, Z 와 P 는 각각 C 안에 있는 $f(z)$ 의 영점과 극점의 개수이다.

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \text{Log}|f(z)|_C + i \text{arg}f(z)|_C \\ &= i \text{arg}f(z)|_C \\ &= 2\pi i(Z - P) \end{aligned} \quad (6)$$

정리 1에서, 다음 식이 성립한다.

$$\text{arg} f(z) |_C = 2\pi(Z - P) \quad (6-1)$$

(6-1)은 z 가 C 위를 움직일 때, $f(z)$ 가 움직이는 경로의 위상변화와 C 안에 존재하는 $f(z)$ 의 영점과 극점의 수의 관계를 보여주고 있다. 즉, z 가 C 위를 한 바퀴 돌 때, $f(z)$ 는 원점을 $Z - P$ 회 감싸고 돈다. 이것을 그림으로 나타내면 그림 3과 같다.

그림 3은 경로 C 안에 함수 $f(z)$ 의 영점(0)이 1개, 극점(x)이 3개 있을 경우의 z 의 이동에 따른 $f(z)$ 의 이동을 보여주고 있다. C 안에 영점이 1개, 극점이 3개 있으므로 $f(z)$ 는

$1 - 3 = -2$ 회, 즉, z 의 이동과 반대 방향으로 원점을 2회 감싸고 도는 것을 보여주고 있다. 이것은 페루프 시스템의 안정성 해석에 중요한 역할을 하는 나이퀴스트 판별법의 핵심 부분이다.

나이퀴스트 판정법에서는 먼저 복소평면의 우측 반평면을 전부 포함하는 나이퀴스트 경로 C 를 그림 4에서와 같이 정의한다. 그림에서와 같이 허수축과 원점을 중심으로 반경이 R 인 원의 우측 부분으로 이루어진 경로에서, R 을 무한대로 보내면 이 표준 나이퀴스트 경로는 복소평면의 우측 평면을 전부 포함하게 된다. 편각의 원리를 적용하기 위해서는 경로 C 상에 극점이 없어야 하므로, 극점이 허수축 상에 존재할 경우는 그림 4에서와 같이 매우 작은 반경 r 로 이루어지는 반원으로 우회하도록 한다.

이때, 나이퀴스트 판정법은 다음과 같이 정리된다.

나이퀴스트 판별법

(5)와 같이 주어지는 페루프 특성방정식이 모두 안정된 근을 가지기 위해서는 s 가 표준 나이퀴스트 경로를 한 바

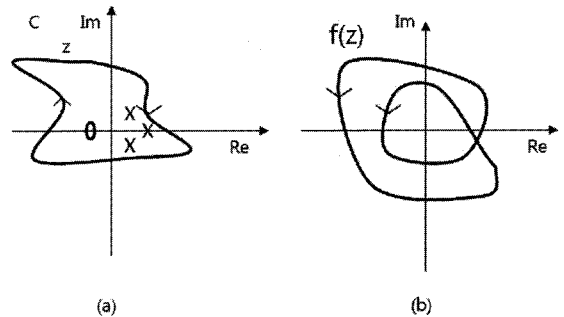


그림 3. (a) 경로 C 및 영점(0), 극점(x)의 위치. (b) 복소변수 z 가 경로 C 를 한바퀴 돌 때, $f(z)$ 가 원점 주위를 감싸고 도는 모습.

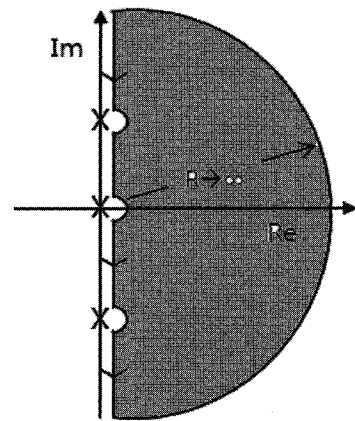


그림 4. 표준 나이퀴스트 경로.

퀴 도는 동안 $\Delta(s) = 1 + G(s)K(s)$ 는 원점을 $-P$ 만큼 감싸고 돌면 된다.

나이퀴스트 판별법은 s 가 표준 나이퀴스트 경로를 한바퀴 도는 동안 $\Delta(s)$ 가 원점을 감싸고 도는 횟수를 N 이라 하면 다음식이 성립함을 근거로 한다. 즉,

$$N = Z - P \tag{7}$$

(7)은 폐루프 제어시스템의 안정도 판별에 중요한 역할을 한다. 즉, 폐루프 제어 시스템이 안정되기 위해서는 우측 반평면에 $\Delta(s)$ 가 근(영점)을 갖지 않아야 한다. $\Delta(s)$ 의 근(영점)은 폐루프 시스템의 극점이 되기 때문이다. 따라서 폐루프 시스템이 안정하기 위한 조건은 $Z = 0$ 이 되는 것이고, 따라서, (7)에서

$$N = -P \tag{8}$$

가 성립할 때, 폐루프 시스템은 안정하다. 즉, 제어기 $K(s)$ 가 우측 반평면에 극점을 가지지 않는다고 할 때, s 가 표준 나이퀴스트 경로를 움직이는 동안 $\Delta(s)$ 가 나이퀴스트 경로 안에 있는 $G(s)$ 의 불안정한 극점의 개수 만큼 원점을 나이퀴스트 경로의 반대 방향으로 감싸고 돌면, 폐루프 시스템은 안정하다.

표준 나이퀴스트 경로는 그림 4에서와 같이 원점과 허수축에 있는 극점을 나이퀴스트 경로 밖에 두는 방법이 있고, 우회 경로를 바깥쪽으로 하여 극점을 나이퀴스트 경로 안쪽으로 포함시키는 방법이 있다. 허수축상의 극점을 나이퀴스트 경로 안쪽에 포함되도록 우회한 경로를 사용할 경우는 허수축 상의 극점수도 경로 안에 있는 불안정한 극점 수에 포함시키면 된다[2].

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각하자.

$$\Delta(s) = 1 + \frac{1}{s(s+1)} \tag{9}$$

여기서 허수축에 $s=0$ 인 극점이 있으므로 표준 나이퀴스트 경로는 그림 5와 같이 잡을 수 있다. 원점 부근에서 우회하는 작은 원의 반경을 0.1, 그리고 R 을 충분히 큰 $1E5$ 로 두었을 때, 나이퀴스트 선도는 그림 6과 같다. 그림 5에서 원점 부근의 작은 원의 반경을 r 이라 할 때, 나이퀴스트 경로상의 점은 $s = re^{j\theta}$ 로 둔 후, θ 를 90도에서 -90도까지 변화하도록 하면 된다.

그림 6에서 보면 $\Delta(s)$ 의 이미지, 즉 나이퀴스트선도가 원점을 감싸고도는 횟수는 0임을 알 수 있다. 따라서 (7)에서

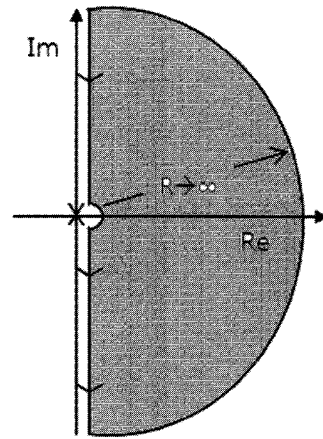


그림 5. 허수축 상의 극점을 포함시키지 않은 표준 나이퀴스트 경로.

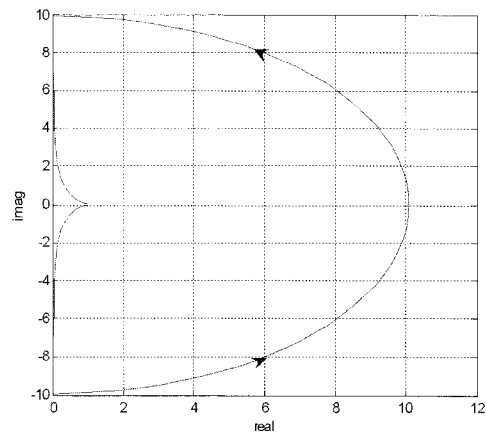


그림 6. 원점이 경로C 안에 포함되지 않을 경우 나이퀴스트 선도.

$Z = N + P = 0 + 0 = 0$ 이고, 따라서 (9)와 같이 주어지는 식은 그림 5와 같이 주어지는 표준 나이퀴스트 경로 안쪽에 영점을 갖지 않는다. 즉 (9)로 주어지는 특성방정식을 가지는 폐루프 시스템은 안정하다.

한편 나이퀴스트 경로에서 극점을 회피할 때 그림 5에서와 달리 그림 7에서와 같이 나이퀴스트 경로가 극점을 포함하도록 경로를 잡을 수 있다. 이 경우는 나이퀴스트 경로 안에 불안정한 극점이 1개 있는 것이 되며, 따라서 $P=1$ 로 두고 (7) 또는 (8)을 적용하면 된다. 이때의 나이퀴스트 선도는 그림 8과 같으며, 원점을 그림 7로 주어지는 표준 나이퀴스트 경로의 방향과 반대로 1회 감싸고 도는 것을 보여주고 있다. 즉 $N=-1$ 임을 보여주고 있으며, 따라서 (7)에서 $Z = N + P = -1 + 1 = 0$, 즉, 그림 7로 주어지는 표준 나이퀴스트 경로 안에 (9)의 영점이 존재하지 않으며, 따라서 (9)를 특성방정식으

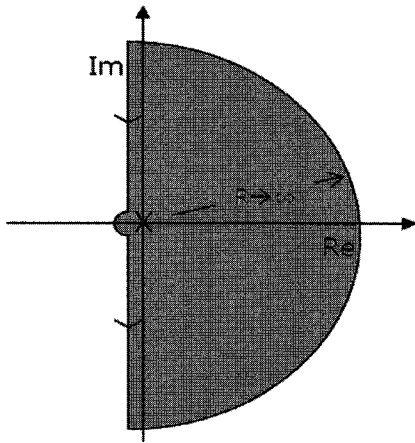


그림 7. 허수축 상의 극점을 포함시키는 표준 나이퀴스트 경로.

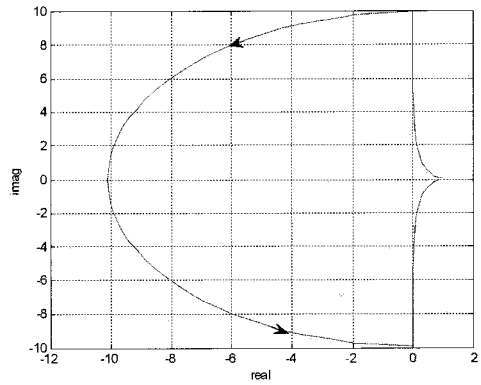


그림 9. 식 (11)의 나이퀴스트 선도.

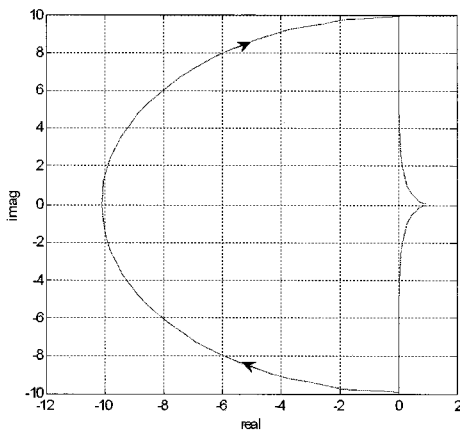


그림 8. 허수축위에 있는 극점이 경로 C안에 포함될 때의 나이퀴스트 선도.

로 하는 폐루프 제어 시스템은 안정함을 보여주고 있다. 이러한 결과는 그림 5 및 그림 6에서 내린 결론과 당연히 같음을 알 수 있다.

다음으로 (11)과 같이 불안정한 극점이 우측 반평면에 있는 경우를 고려하자.

$$\Delta_1(s) = 1 + \frac{1}{s(s-1)} \quad (11)$$

그림 9는 (11)과 같이 주어지는 특성방정식의 나이퀴스트 선도를 그림 5와 같이 주어진 나이퀴스트 경로를 따라 그린 것이다. (11)은 불안정한 극점이 $s=0$ 와 $s=1$ 두 곳에 있으며, 그림 5와 같은 나이퀴스트 경로 안에는 $s=1$ 만 포함된다. 즉 (7)에서 $P=1$ 이다. 그림 9를 보면 나이퀴스트 선도가 원점을 반시계 방향으로 1회 감싸는 것을 알 수 있다. 즉, $N=1$ 이다. 따라서 (7)에서 $Z=N+P=1+1=2$ 이며, 따라서, (11)로 주

어지는 특성방정식은 그림 5와 같은 나이퀴스트 경로 내부에 2개의 불안정한 영점을 가진다. 즉, (11)을 특성방정식으로 가지는 폐루프 시스템은 2개의 불안정한 극점을 우측 반평면(나이퀴스트 경로 안쪽) 상에 가지며, 따라서 불안정한 시스템이 된다.

보통 나이퀴스트 선도를 그릴 때, (5)에서 1을 제외하고 그리기도 하는데, 이 경우는 기준점이 원점에서 (-1,0) 점으로 이동된다. 즉, 이때는 원점을 감싸고 도는 횟수 대신 (-1,0) 점을 감싸고 도는 횟수를 검사하면 된다. 앞으로는 편의상 (5)에서 1을 제외한 나이퀴스트 선도를 고려하며, 따라서 기준점은 (-1,0) 점을 기준으로 한다.

3. 나이퀴스트 선도와 안정도 여유

나이퀴스트 선도를 그리면, 폐루프 시스템의 안정성 뿐 아니라, 얼마나 안정된지도 알 수 있다는 장점이 있다.

그림 10과 같은 폐루프 제어 시스템을 고려하자. 여기서 $K(s)$ 는 제어기의 전달함수이고, $G(s)$ 는 플랜트의 전달함수이며, $U(s)$ 는 모델화되지 않은 불확실한 부분(uncertainty)을 나타낸다. $U(s)$ 는 명목값(nominal value)으로 1을 가지며, 실제 플랜트에서는 이를 중심으로 불확실한 정도 많큼 벗어난 값을 가진다.

$U(s)$ 가 이득의 변화만을 포함할 때, 나이퀴스트 선도는 그에 따라 확대되거나 축소되며, $U(s)$ 가 위상의 변화만을 포함할 때, 나이퀴스트 선도는 원점을 중심으로 그 위상 만큼 회전을 한다. 안정성에 관한 나이퀴스트 선도가 확대/축소되거나 회전을 하여도 기준점 (-1,0)를 감싸고 도는 횟수만 변하지 않는다면, 명목상의 플랜트가 안정되게 제어기가 설계 될 경우, 불확실성에도 불구하고 그 안정성이 유지된다. 이러한 사

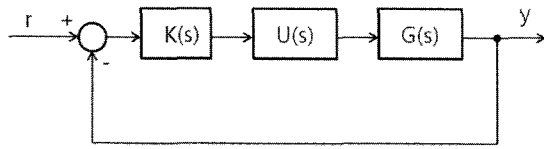


그림 10. 불확실성을 포함한 폐루프 제어 시스템.

실을 이용하면, 나이퀴스트 선도를 이용하여 명목상의 제어 시스템이 불확실성에 대하여 얼마나 안정한지를 검사할 수 있으며, 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)가 이를 대표한다.

(5)에서 1을 제외한 루프 전달 식을 $L(s)$ 라 하고 다음과 같은 플랜트 및 제어기를 고려하자.

$$L(s) = G(s)K(s) = \frac{1}{s-1} \times \frac{4s+1}{s} \quad (12)$$

(12)는 편의상 $G(s) = 1/(s-1)$, $K(s) = (4s+1)/s$ 로 이루어진 피드백 제어 시스템의 루프 전달함수로 볼 수 있다. 플랜트 및 제어기는 앞에서와 마찬가지로 1개의 극점을 원점에 가지고 있으며, $s=1$ 에 불안정한 극점을 가지고 있다. 그림 5와 같이 주어지는 나이퀴스트 경로를 따라, $L(s)$ 의 나이퀴스트 선도를 그리면 그림 11과 같다. 그림에서 보면, 나이퀴스트 선도는 $(-1,0)$ 점을 시계 방향으로 1회 감싸고 도는 것을 알 수 있다. 즉, $N = -1$ 이다. 그리고 $P = 1$ 이므로 $Z = N + P = -1 + 1 = 0$ 이며, 따라서 $L(s)$ 를 루프 전달함수로 가지는 폐루프 제어시스템은 안정하다.

그림 10에서 $U(s)$ 가 불확실한 이득으로 주어질 경우 앞에서 설명한 바와 같이 나이퀴스트 선도는 이득이 커질 경우는 비례하여 확장되고, 이득이 작아질 경우는 비례하여 축소된다. 이때, 그림 11에서 보면, 나이퀴스트 선도가 축소될 때 $(-1,0)$ 점을 감싸고 도는 횟수가 변할 수 있음을 알 수 있다. 이득이 확대되는 경우, 즉 나이퀴스트 선도가 확장되는 경우는 나이퀴스트 선도가 실수축과 만나는 점이 $(-1,0)$ 에서 멀어지며, 따라서 안정성이 유지 된다. 즉, 이 시스템은 이득여유가 $(1/4, \infty)$ 이다. 즉 감소되는 쪽으로는 최대 1/4까지 이득이 허용되며, 증가하는 쪽으로는 제한이 없다. 이득이 변할 때, $(-1,0)$ 점을 제일 먼저 만나게 되는 점은 나이퀴스트 선도의 실수축과의 교차점 중 $(-1,0)$ 점에 좌우로 가장 가까이 있는 두 점 중 하나이다. 따라서 이 두 점에 의하여 이득 여유가 결정된다. 점 $(-1,0)$ 의 우측에서 실수 축과 만나는 교점이 있다면 그 크기의

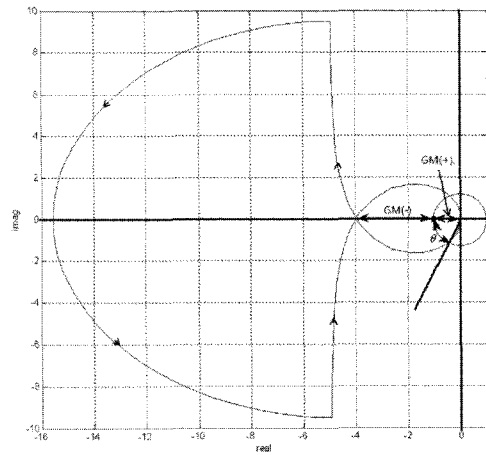


그림 11. 나이퀴스트 선도에서 이득여유 및 위상여유.

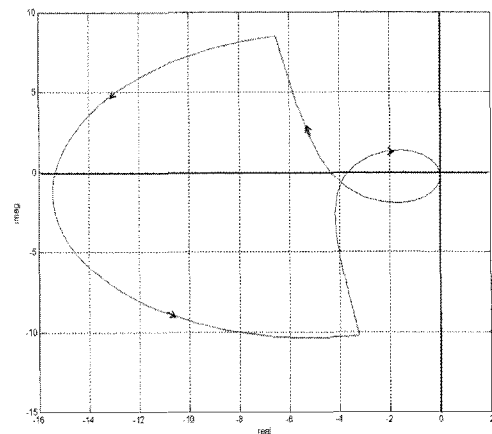


그림 12. +10도의 위상 이동이 있는 경우의 나이퀴스트 선도 모양.

역수가 확대되는 방향으로의 이득여유를, 점 $(-1,0)$ 보다 왼쪽에서 실수 축과 만나는 교차점이 있다면 그 크기의 역수가 축소되는 방향으로의 이득여유를 결정하게 된다. 보통 이득 여유를 나타낼 때는 dB로 변환하여 나타내기도 한다.

그림 10에서 불확실성이 위상으로 주어질 경우 나이퀴스트 선도의 크기는 변함 없고 나이퀴스트 선도 전체가 원점을 중심으로 그림 12처럼 그 위상 만큼 회전한다. 따라서 회전하다 보면 나이퀴스트 선도의 부분 중 하나가 $(-1,0)$ 점을 넘어가게 되고, 그러면, $(-1,0)$ 점을 감싸고 도는 횟수가 변하기 때문에 안정성이 깨지게 된다. 그림 11에서 나이퀴스트 선도가 회전하면서 $(-1,0)$ 에 제일 먼저 만나게 되는 부분은 나이퀴스트 선도가 원점을 중심으로 한 단위원과 만나는 점이 됨을 알 수 있다. 따라서, 이 교차점이 $(-1,0)$ 점으로부터 얼마나 떨어져 있는

정도가 위상여유가 된다. 즉, 원점에서 교차점까지 직선을 그었을 때 그 직선이 음의 실수축과 이루는 각도가 위상여유를 나타낸다.

4. 보우드 선도를 이용한 주파수 응답 해석

나이퀴스트 선도는 안정도 및 안정도 여유를 확인하는데, 중요한 역할을 한다. 그런데 주파수에 따른 응답을 직접 알아 보기는 어렵다. 주파수에 따른 응답 특성은 보우드 선도(Bode plot)을 이용하면 쉽게 파악이 가능하다[2]. 보우드 선도는 x 축으로 주파수(각속도)를 사용하며, y 축에는 출력의 증폭비인 $|G(j\omega)|$ 및 출력 신호의 위상 이동각인 $\angle G(j\omega)$ 를 표시한다. 따라서, 보우드 선도를 보면 (2)와 같이 주어지는 정현파 입력에 대한 정상상태에서의 출력을 바로 구할 수 있다.

보우드 선도는 나이퀴스트 선도에서 숨겨져 있는 주파수 변수를 x 축에 명시적으로 나타내고, 주파수 응답의 크기와 위상을 y 축 상에 나타낸 것이다. 따라서, 보우드 선도를 보면 주파수에 따라 응답 크기 및 위상을 한 눈에 볼 수 있다. 그러나 불안정한 극점을 가지고 있는 플랜트의 경우나, 허수축 상에 극점이 있는 플랜트에서의 안정성은 판별하기 어렵다는 단점이 있다. 이는 보우드 선도는 허수축 상에서만 그려지기 때문이다.

그림 13은 (9)로 주어지는 $L(s)$ 의 보우드 선도를 보여준다. 나이퀴스트 선도 모양을 같이 생각해 보면(그림 6,11,12), 위상여유는 보우드 선도의 크기가 1인 지점 즉 0dB지점에서의 위상이 -180도에서 떨어진 정도임을 알 수 있고, 그림에서 화살표로 표시되어 있다. 대략 50도 정도 떨어져 있으므로 위상여유는 50도 정도 됨을 알 수 있는데, 그림 6에서도 같은 정도의 위상여유를 유추해 볼 수 있다. 그리고 이득여유는 나이퀴스트 선도에서 보면 실수 축과 만나는 부분의 크기와 관계되는데, 실수 축과 만나는 부분은 위상이 -180도가 되는 부분이다. 즉, 위상이 -180도 되는 지점에서 크기가 0dB에서 떨어진(작은) 정도가 이득여유가 된다. 그런데 그림 13에서 위상이 -180도로 가는 부분이 없고, 따라서 위상여유는 ∞ 가 된다. 그림 13에서는 주파수가 높아지면서 위상이 거의 -180도로 수렴하고 있고, 맨 끝에서 위상이 -180도가 된다고 가정했을 때의 이득여유를 표시해놓고 있다. 즉, 그림에서는 크기 1 즉 0dB인 지점으로부터 위상이 -180도가 되는 지점이 75dB이상 떨어져 있음을 보여주고 있으며, 따라서 이득여유가 75dB 이상이 됨을 보여 주고 있다.

그림 14는 $L(s) = (4s + 1)/(s(s - 1))$ 과 같이 불안정한 극점이 우측 반평면에 있는 경우의 보드 선도를 보여 주고 있다. 이 경우도 앞서와 비슷한 논리로 이득여유와 위상여유를 알아 볼 수 있다. 그림에서 보듯이 위상여유는 앞서와 같은 방법으로 알아 낼 수 있지만, 이득여유는 위상이 -180도인 지점에서 크기가 0dB보다 얼마나 큰가가 이 시스템의 안정도 여유를 결정한다. 이는 나이퀴스트 선도가 그림 11처럼 주어지기 때문이다. 그림 14에서 약 12dB정도 이득이 감소해도 안정성이 유지됨을 보여주고 있는데, 이것은 앞에서 언급한 1/4 즉 (-) 12dB와 일치되는 결과이다. 그림 14가 불안정한 극점이 없는 시스템의 보우드 선도라면 이것은 -180도 위상 지점에서 주파수 응답의 크기가 양수이므로 불안정한 시스템이 되지만, 본 시스템은 사실은 안정한 시스템의 보우드 선도임을 유의할 필요가 있다.

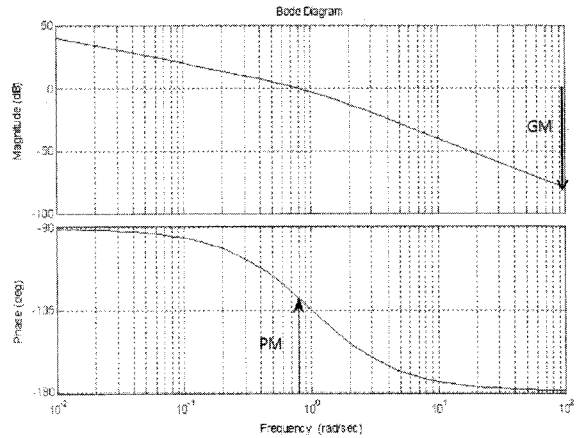


그림 13. $L(s) = 1/(s(s + 1))$ 의 보우드 선도.

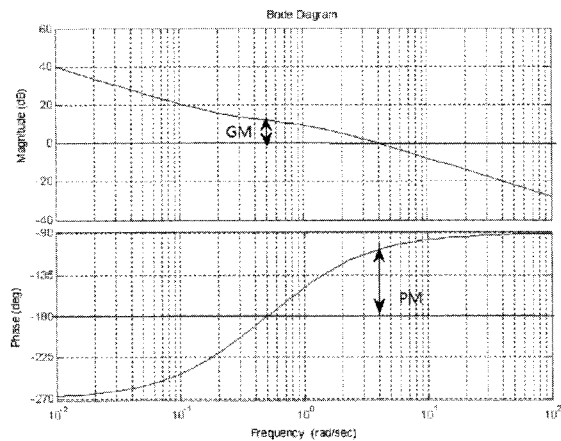


그림 14. $L(s) = (4s + 1)/(s(s - 1))$ 의 보우드 선도.

5. 결론

본 소고에서는 주파수 안정도 판별법에서 유용하게 쓰이는 나이퀴스트 안정도 판별법에 대해서 알아 보았으며, 보우드 선도와 관계도 알아 보았다. 보우드 선도는 주파수 응답의 크기와 위상을 쉽게 알 수 있지만, 안정도를 검사하는 경우 플랜트가 불안정한 극점을 포함하고 있을 때는 세심한 주의가 필요하며, 특히 나이퀴스트 선도를 통하여 확인하는 것이 필요하다. 나이퀴스트 선도는 폐루프 시스템의 안정성 판별 뿐 아니라, 안정한 정도 즉 안정도 강인성에 대한 정확한 정보를 제공한다. 그러나 주파수 응답을 한눈에 알아보기 어려운 단점이 있고, 따라서 제어시스템 설계시 나이퀴스트 선도와 보우드 선도를 동시에 그려서 비교 분석하는 것이 필요하다.

참고문헌

- [1] H. Silverman, *Complex Variables*, Houghton Mifflin Company, 1975.
 [2] B.C.KUO, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1991.

○ 저자약력



강 태 삼

- 1986, 1988, 1992년 서울대학교 제어계측공학과 학사, 석사, 박사졸업.
 - 1999년~2001년 호서대학교 제어계측공학과 교수,
 - 2001년~현재 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 교수.
- 관심분야 : 자동제어 및 비행제어 응용, 관성 센서 및 응용