한국수학사학회지 제23권 제1호(2010년 2월), 79 - 88

신의 존재에 대한 괴델의 수학적 증명

호서대학교 인문대학 현우식*
godel@hoseo.edu

괴델에 의하면, 모든 긍정성을 가진 존재를 신으로 정의할 때 신의 존재에 대한 수학적 증명은 가능하다. 신의 정의를 만족하는 대상이 존재가능하다면, 그 대상은 필연적으로 존재한다. 이를 위해서 그는 세 개의 정의와 다섯 개의 공리와 두 개의 정리를 남겼고, 2차 양상논리 시스템 S_5과 공리 $\Diamond\Box p\rightarrow\Box p$를 사용했다.

주제어 : 괴델, 신, 존재론적 증명, 양상논리

0. 수학사적 배경

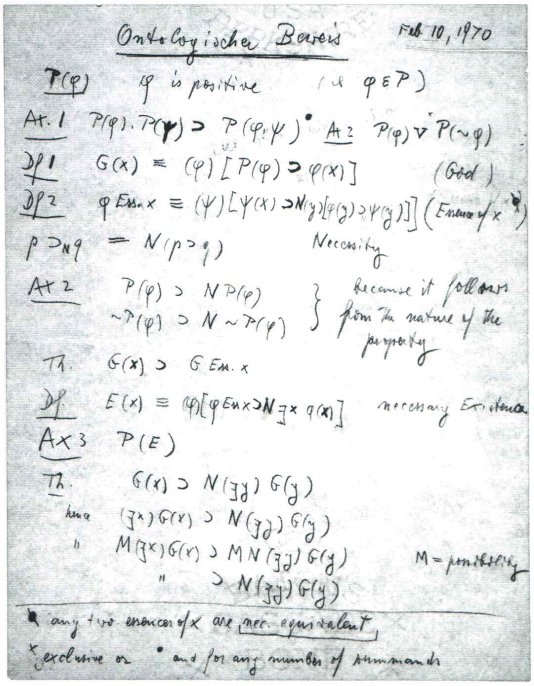
수학의 역사에서 신을 이해하려는 노력과 시도는 새삼스러운 사건이 아니다([14][17]). 고대의 피타고라스(Pythagoras)는 수를 이해하는 것이 세계와 신을 이해하는 것이라고 생각했고, 중세의 쿠자누스(Nicolaus Cusanus)는 무한에 대한 이해를 모델로 신을 이해할 수 있을 것이라 보았으며, 근대의 뉴턴(I. Newton)은 질서와 합리성이 내재된 세계를 창조한 신을 수학자로서의 신으로 이해하였다. 현대에 칸토르(G. Cantor)가 무한의 문제에 도전한 배경에는 신을 이해하려는 동기가 있었다.

현대 수학을 무한에 대한 연구라고 정의했던 바일(H. Weyl)은 수학적 탐구심은 그 어떤 매개보다도 인간의 마음을 신의 마음에 더 근접하도록 고양시켰다고 보았다. 스스로 신을 신봉하고 신의 존재를 증명하고자 시도했던 수학자들이 있었다. 데카르트(R. Descartes, 1637), 라이프니츠(G. Leibniz, 1709), 괴델(K. Gödel, 1970)은 그 중에서도 주목할 만한 결과를 제시했던 수학자들이라고 할 수 있다([18][19][20]).

이 논문에서는 괴델의 신에 대한 존재론적 증명을 다룬다. 여기에서 다루는 사료는 1970년 2월 10일자 Ontologischer Beweis(존재론적 증명)이라는 제목의 노트이다(그림). 괴델의 수기 노트에는 정의와 공리와 정리만 있을 뿐 증명과정은 생략되어 있다.

* 이 논문은 2009년도 호서대학교의 재원으로 학술연구비 지원을 받아 수행된 연구임 (2009-0146)

이 자료에 대한 공식적인 출판본은 1986년에 출판된 괴델선집 3권에 수록되어 있다([6], 403-404). 괴델은 신의 존재에 대한 증명 작업을 1930년대에 이미 시작하였으며, 1941년으로 추정되는 기록이 추가로 남아 있다. 이 미완성 증명은 역시 괴델선집 3권의 부록에 수록되어 있다([6], 429-437).


Ontologischer Beweis Feb 10, 1970

$P(\varphi)$ φ is positive (i.e. $\varphi \in P$)

At. 1 $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$ • At 2 $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$ ×

Df 1 $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

Df 2 $\varphi \, Ess. x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ (Essence of x *)

$p \supset_N q = N(p \supset q)$ Necessity

At 2 $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$, $\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$ } because it follows from the nature of the property

Th. $G(x) \supset G \, Ess. x$

Df. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \, Ess. x \supset N \exists x \, \varphi(x)]$ necessary Existence

Ax 3 $P(E)$

Th. $G(x) \supset N(\exists y) G(y)$

hence $(\exists x) G(x) \supset N(\exists y) G(y)$

" $M(\exists x) G(x) \supset MN(\exists y) G(y)$ M = possibility

" $\supset N(\exists y) G(y)$

* any two essences of x are nec. equivalent

× exclusive or • and for any number of summands

괴델이 작성한 신에 대한 존재론적 증명(1970)

당시에 괴델은 건강 때문에 걱정을 하고 있었으며 죽음이 임박해 왔다고 생각하고 두려워했다고 한다. 괴델은 신의 존재에 대한 증명을 스코트(Dana Scott)에게 보여주었으며, 스코트는 노트를 만들어서 1970년 가을학기의 프린스턴 대학의 논리학 세미나에서 발표함으로써 세상에 알려지게 되었다. 후에 괴델은 친구 모르겐슈타인(Morgenstein)에게 신의 존재에 대한 수학적 증명에 대하여 충분히 만족한다는 의사를 밝혔다([6], 388; [3], 237).

괴델의 신의 존재 증명에 대한 연구는 주로 스코트의 버전(version)을 기준으로 필요에 따라 부분적 변경이 가미되면서 수행되어 왔다([1][9][10][12,13][14][15]). 그러나 본 연구에서는 변경사항을 두지 않고 괴델의 증명 원본의 내용을 직접 다룰 것이다. 본 소고의 범위는 괴델의 증명을 재구성하는 작업에 집중될 것이다. 따라서 괴델의 증명에 대한 신학적 비교나 다른 수학자들의 신의 존재 증명과의 비교는 다른 기회에 논의될 것이다. 필연성술어 N은 □로 표기하고, 가능성술어 M은 ◇로 표기하고, 함

의술어 ⊃은 →로 표기하였음을 밝혀 둔다.

1. 괴델의 양상논리

괴델은 신의 존재 증명에서 양상논리(modal logic)를 적용하고 있다. 양상논리는 필연성(necessity)과 가능성(possibility)을 다루는 논리시스템인데, 고전적 양상논리는 아리스토텔레스(Aristoteles)에 의해 시작되었지만, 현대의 수학적 양상논리는 루이스(C. I. Lewis(1918), A Survey of Symbolic Logic)에 의해 성립되었다([8]). 특히, 최근의 양상논리는 증명가능성논리(provability logic)와 연결되어 발전되고 있다([2]). 그래서 오늘날의 양상논리는 표준논리학(standard logic)의 연장에 해당하는 비표준논리학으로 분류될 수 있다.

괴델은 루이스의 양상논리를 알고 있었고, 1931년에는 양상논리와 직관주의논리(intuitionistic logic)의 연결을 다룬 베커(Oskar Becker, 1930)의 논문에 대하여 논평을 발표했다([7]). 베커는 처음으로 양상논리의 S_4와 S_5 시스템을 위한 공리들을 제안한 인물이었다.

괴델은 1933년에 직관주의 명제논리시스템(Intuitionistic Propositional Logic)과 동등한 논리시스템을 정의했는데, 이 시스템은 루이스 양상논리의 S_4와 동등하다([5][8]). 이것이 의미하는 것은 어떤 명제가 직관주의 명제논리시스템 내에서 증명된다면, 그 명제는 S_4 내에서 증명된다는 것이다([16]). 이것은 직관주의에 대한 그의 수용적 입장에서 주목할 만한 일이다([19]). 괴델은 모든 항진명제(tautologies) 외에 새로이 다음과 같은 공리를 설정했다([5]).

Bp는 ‘p는 증명가능하다(p is provable)’를 표현한다.

공리 B1. $Bp \rightarrow p$
공리 B2. $Bp \rightarrow (B(p \rightarrow q) \rightarrow Bq)$
공리 B3. $Bp \rightarrow BBp$

이 공리들을 양상논리의 공리로 바꾸면 다음과 같다. □는 양상논리의 필연성(necessity)을 의미한다.

공리 M1. $\Box p \rightarrow p$
(양상논리의 성찰공리(reflection)에 해당됨)
공리 M2. $\Box p \rightarrow (\Box (p \rightarrow q) \rightarrow \Box q)$
(양상논리의 분배공리(distribution) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$에 해당됨)

공리 M3. $\Box p \to \Box\Box p$
(양상논리의 내성공리(introspection)에 해당됨)

괴델은 공리 M3의 $\Box p \to \Box\Box p$를 베커의 공리(the Axiom of Becker)라고 불렀다.

다음으로 괴델은 다음의 추론규칙을 도입했다.

$$\alpha\text{로부터 } B\alpha\text{를 추론한다}$$

그러므로 이 추론규칙은 양상논리의 추론규칙인 다음의 필연화규칙(necessitation rule)에 해당된다.

$$\alpha\text{로부터 } \Box\alpha\text{를 추론한다}$$

이상의 내용을 정리하면 양상논리 시스템 S_4는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} S_4 &= FOL(\text{First Order Logic}) \\ &\quad + Axiom:\ \Box p \to p,\ \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q),\ \Box p \to \Box\Box p \\ &\quad + necessitation\ rule \end{aligned}$$

다음과 같은 새로운 공리를 추가하면 S_5 시스템이 정의된다.

$$S_5 = S_4 + Axiom:\ \Diamond p \to \Box\Diamond p$$

여기에서의 $\Diamond p \to \Box\Diamond p$는 $\Diamond\Box p \to \Box p$과 논리적으로 같다.
괴델의 신의 존재 증명에서는 $\Diamond\Box p \to \Box p$가 공리로 필요하기 때문에, 괴델은 양상논리 시스템 S_5 을 사용한 것이다.

2. 괴델의 공리

괴델은 존재론적 증명(1970)에서 신의 존재 증명을 위해 다음과 같은 다섯 공리를 제시했다([6], 403).

‘속성 φ는 긍정성을 가진다’ 를 $P(\varphi)$로 표현한다. (또는 $\varphi \in P$ 가능)

공리(Axiom) 1. $P(\varphi) \wedge P(\psi) \rightarrow P(\varphi \wedge \psi)$
공리(Axiom) 2. $P(\varphi) \vee P(\neg\varphi)$
공리(Axiom) 3. $P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$
$\neg P(\varphi) \rightarrow \Box \neg P(\varphi)$
공리(Axiom) 4. $P(E)$
공리(Axiom) 5. $[P(\varphi) \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow P(\psi)$

공리5가 함의하는 바에 의하면, $x = x$는 긍정적이고(positive), $x \neq x$는 부정적이다. 모든 긍정성(positive properties)의 시스템은 양립가능하다. 그러나 만일 긍정성의 시스템이 양립불가능하다면(incompatible), 긍정성의 합(sum)은 $x \neq x$이 된다는 것을 의미할 것이다.

3. 괴델의 정의

괴델은 존재론적 증명(1970)에서 신의 존재 증명을 위해 다음과 같은 세 가지의 정의를 설정했다([6], 403).

정의(Definition) 1. (신 God)

$$G(x) \equiv \forall \varphi[P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$$

이 정의는 신에 대한 정의로서, 어떤 대상이 신의 속성을 갖기 위한 필요충분조건은 그 대상이 모든 긍정성을 갖는 것을 의미한다. 여기에서 속성을 나타내는 술어 φ에 대한 양화를 사용하였는데, 이는 괴델이 2계논리(second order logic)를 사용했음을 보여준다.

정의(Definition) 2. (본질 Essence)

$$\varphi Ess.x \equiv \forall \psi[\psi(x) \rightarrow \Box \forall y[\varphi(y) \rightarrow \psi(y)]] \quad (\Box = \text{필연성 necessity})$$

(x의 두 본질은 필연적으로 동등하다.)

이 정의는 신의 본질에 대한 것인데, 필연성 술어 $\Box$가 도입되었다. 대상이 갖는 속성φ이 본질이 되기 위한 필요충분조건은 다른 속성 ψ을 가지는 모든 대상들에 대하여, φ를 속성으로 갖는 대상들은 ψ를 속성으로 가지는 것이 필연적임을 의미한다. 괴델의 초기 구상에서는 추가적으로 $\varphi(x)$를 연접시켰었다([6], 431).

$$\varphi Ess.x \equiv \forall \psi[\psi(x) \rightarrow \Box \forall y[\varphi(y) \rightarrow \psi(y)]] \wedge \varphi(x)$$

정의(Definition) 3. (필연적 존재 necessary Existence)

$$E(x) \equiv \forall \varphi[\varphi Ess.x \rightarrow \Box \exists x \varphi(x)]$$

이 정의는 대상이 필연적으로 존재하기 위한 필요충분조건은 속성 φ가 대상의 본질이라면 속성 φ를 필연적으로 가지는 대상이 존재한다는 것을 의미한다.

4. 괴델의 정리

괴델은 존재론적 증명(1970)에서 신의 존재를 증명하기 위해 두 개의 정리를 다음과 같이 제시했다([6], 403).

정리(Theorem) 1. $G(x) \rightarrow G\, Ess.x$

이 정리는 신에게는 신의 속성이 본질임을 의미한다.

증명.
1. $G(x)$ (가정)
2. $\psi(x)$ (가정)
3. $\neg P(\psi) \rightarrow P(\neg\psi)$ (공리2에 의해)
4. $P(\neg\psi) \rightarrow \neg\psi(x)$ (정의1에 의해)
5. $\neg P(\psi) \rightarrow \neg\psi(x)$ (3과 4로부터)
6. $P(\psi)$ (2와 5의 대우로부터)
7. $\Box P(\psi)$ (공리3에 의해)
8. $P(\psi) \rightarrow \forall y[G(y) \rightarrow \psi(y)]$ (정의1에 의해)
9. $\Box[P(\psi) \rightarrow \forall y[G(y) \rightarrow \psi(y)]]$(양상논리의 필연화규칙(necessitation)에 의해)
10. $\Box P(\psi) \rightarrow \Box \forall [G(y) \rightarrow \psi(y)]$(양상논리의 분배공리(distribution axiom)에 의해)
11. $\Box \forall y[G(y) \rightarrow \psi(y)]$ (7, 10 전건긍정법(modus ponens)에 의해)
12. $G Ess.x$ (정의2에 의해) QED

도움정리(Lemma) $P(\varphi) \rightarrow \Diamond \exists x \varphi(x)$

증명.
1. $P(\varphi) \wedge \neg \Diamond \exists \varphi(x)$ (부정하면)
2. $\Box \forall x \neg \varphi(x)$

3. $\Box \forall x[\varphi(x) \rightarrow (x \neq x)]$
4. $P(x \neq x)$. (공리5에 의해)
5. $\Box \forall x[\varphi(x) \rightarrow (x = x)]$
6. $P(x = x)$ (공리5에 의해)
7. $P(x = x) \wedge P(x \neq x)$ (공리2에 모순) QED

정리(Theorem) 2. $G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$

이 정리는 신의 속성을 만족하는 대상에게는 신의 속성을 만족하는 대상이 필연적으로 존재함을 의미한다. 다음은 정리2에 대하여 괴델이 남긴 증명과정의 명제이다.

$\exists x G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$
$\Diamond \exists x G(x) \rightarrow \Diamond \Box \exists y G(y)$ ($\Diamond$= 가능성 possibility)
$\Diamond \exists x G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$

즉, 신의 속성을 만족하는 대상이 존재하는 것이 가능하다면, 신의 속성을 만족하는 대상이 존재하는 것이 필연적임을 의미한다. 여기에서, $\Diamond \exists x G(x)$이 의미하는 것은 모든 긍정성(all positive properties)의 시스템이 양립가능하다는 것이다. 이는 공리5에 의해 성립한다.

증명.
1. $G(x) \rightarrow [E(x) \wedge GEss.x]$ (공리4, 정의1, 정리1에 의해)
2. $[E(x) \wedge Gss.x] \rightarrow \Box \exists x G(x)$ (정의3에 의해)
3. $G(x) \rightarrow \Box \exists x G(x)$
4. $\exists x G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$
5. $\Diamond \exists x G(x) \rightarrow \Diamond \Box \exists y G(y)$ (양상논리에 의해)
6. $\Diamond \Box \exists x G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$ (S_5의 공리에 의해)
7. $\Diamond \exists x G(x) \rightarrow \Box \exists y G(y)$ (5와 6으로부터)
8. $\Diamond \exists x G(x)$ (도움정리1에 의해)
9. $\Box \exists y G(y)$ (7, 8 전건긍정법(modus ponens)에 의해) QED

5. 결어

괴델이 정의한 신은 모든 긍정성(all positive properties)을 가지고 있는 존재이다. 어떤 대상이 존재해서, 그 대상이 긍정성을 본질성(essence property)으로 가지고 있고, 그 대상이 가진 모든 본질이 긍정성이라면 곧 신과 같다. 이는 수학적으로 극대긍

정성(the maximal positive property)의 구상으로 신을 이해하고자 한 것이다.

괴델은 신의 정의를 만족하는 대상이 존재가능하다면, 그 대상은 필연적으로 존재함을 증명했다. 괴델에 의하면 양상논리 시스템 S_5와 2계논리(second order logic)를 사용할 때, 신의 존재증명을 위해서는 다섯 개의 공리와 세 개의 정의와 두 개의 정리가 있으면 충분하다.

> "긍정적이라는 것이 의미하는 바는 도덕적이고 미학적인 의미에서 긍정적이라는 것이다(우연적인 세계의 구조와는 무관하다). 오직 그 때에만 공리들은 진리이다. 또한 "결여(privation)" (혹은 결여를 포함한)에 대한 반대로서의 순수한 "속성(attribution)"을 의미한다." (K. Gödel [6], 404)

참고 문헌

1. Anderson, A., "Some Emendations on Gödel's Ontological Proof," *Faith and Philosophy 7* (1990):291-303.
2. Boolos, G., *The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic*, Cambridge University Press, 1979.
3. Dawson, J., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A. K. Peters, 1997.
4. Fitting, M., *Types, Tableaus, and Gödel's God*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
5. Gödel, K., "An interpretation of the intuitionistic propositional calculus," *Collected Works. I: Publications 1929-1936,* S. Feferman et al.(eds.), Oxford University Press, 1986.
6. Gödel, K., "Ontological Proof(1970)," *Collected Works III: Unpublished Essays and Lectures.*, S. Feferman et al.(eds.), Oxford University Press, 1995.
7. Gödel, K., "Review of *Becker 1930*: On Modal Logic," *Collected Works. I: Publications 1929-1936,* S. Feferman et al.(eds.), Oxford University Press, 1986.
8. Goldblatt, R., "Mathematical Modal Logic: A View of its Evolution," Dov G. Gabbay & John Woods(eds.), *Handbook of the History of Logic Volume 7: Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, Elsevier, 2006.
9. Hajek, P., "A New Small Emendation of Gödel's Ontological Proof," *Studia Logica* 71 (2002):149-163.
10. Hao, W., *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, 1996.

11. Hao, W., *Reflection on Kurt Gödel*, The MIT Press, 1991.
12. Oppy, G., "Gödelian Ontological Arguments," *Analysis 56* (1996):226-230.
13. Oppy, G., *Arguing about Gods*, Cambridge University Press, 2006.
14. Pickover, C., *The Loom of God: Mathematical Tapestries at the Edge of Time*, Perseus Book, 1997.
15. Sobel, J., *Logic and Theism: Arguments For and Against Beliefs in God*, Cambridge University Press, 2004.
16. Van Atten, M. & Kennedy, J., "Gödel's Logic," Dov G. Gabbay & John Woods(eds.), *Handbook of the History of Logic Volume 5: Logic from Russell to Church*, Elsevier, 2009.
17. 김용운·김용국, 지성의 비극: 수학정신의 탐구, 피타고라스에서 괴델까지, 일지사, 1992.
18. 박창균, "괴델의 삶과 사상," 한국수학사학회지 19 (2006), No.2, 47-58.
19. 현우식, "괴델이 보는 수학의 토대," 한국수학사학회지 20 (2007), No.3, 17-26.
20. 현우식, "쿠르트 괴델의 수학적 신학," 한국기독교신학논총 49 (2007), 171-196.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 23 No. 1 (Feb. 2010), 79-88

Gödel's Mathematical Proof of the Existence of God

College of Humanities, Hoseo University **Hyun, Woosik**

Gödel's proof attempts to establish the existence of God by the definition that God is a being having all positive properties. The proof uses here second order modal logic system S_5 with the axiom $\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$. We review the Gödel's own version and prove his ontological theorems.

Key words: Gödel, God, ontological proof, modal logic
2000 Mathematical Subject Classification: 01A60 03A05 03B45

접수일 : 2010년 1월 14일 수정일 : 2010년 2월 12일 게재확정일 : 2010년 2월 18일