한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제23권 제4호 (2010년 11월), 47–58

아르키메데스 '방법' 에 대한 새로운 해석

The New Interpretation of Archimedes' 'method'

박선용 Sun Yong Park

이 연구에서는 고대 수학자 아르키메데스의 '방법' 에 대한 새로운 해석을 제시한다. 이를 위해, 우선 그 '방법' 의 해석과 관련된 핵심 쟁점을 살펴보고 논쟁의 중심에 불가분량과 지레의 원리가 있지만 그 사이의 관계가 규명되지 않았음을 확인한다. 그리고 아르키메데스의 신중한 불가분량 사용에 대해 수학사에 근거한 탐색적 추측활동을 수행함으로써, 아르키메데스 '방법' 에 있어 지레의 원리의 핵심적 역할이 변화율의 통제라는 가설을 제안한다.

This study suggests new interpretation about ancient mathematician Archimedes' 'method'. For this, we examined the core issue related to the interpretation of the 'method' and identified the unclear relation between the principle of the lever and the indivisibles, both of which have consisted of the main point of arguments. And by having conducted the exploratory historical guesswork about Archimedes' careful use of indivisibles, we make a hypothesis that the role of the principle of the lever in Archimedes' 'method' should be the control of ratio of change.

Keywords: 아르키메데스(Archimedes), 방법(method), 지레의 원리(principle of lever), 불가분량(indivisibles), 변화율(ratio of change).

1 서론

아르키메데스는 불가분량을 이용하는 방식에 의해 오늘날의 정적분과 유사한 아이디어를 사용한 것, 즉 넓이와 부피를 구하는 발견술적 보조도구로서 불가분량을 사용한 것으로 널리 알려져 있다 [2, 3, 20]. 하지만 만약 그가 그처럼 정적분에 근접했다고 한다면, 그 유사성은 그가 불가분량을 사용했다는 사실 보다는 오히려 불가분량 사용의 위험성을 극복하고자 했던 그의 노력에서 찾을 수 있을 것이다. 아르키메데스가 불가분량을 다룰 때 사용했던 그의 '방법' 에 대한 고찰은 이러한 점을 살펴보는데 도움이 된다.

이 연구는 2010학년도 영남대학교 신임교원 정착연구비 지원을 받아 수행된 연구임
MSC: 01A20
제출일: 2010년 10월 7일 수정일: 2010년 11월 7일 게재확정일: 2010년 11월 21일

2 아르키메데스 '방법'에 대한 일반적 해석

아르키메데스의 저술의 상당수는 4세기 무렵의 알렉산드리아 대화재로 인해 소실된 것으로 알려져 있으며 그 일부만이 아랍으로 전해져 아랍어 번역본과 라틴어 재번역본 등에 의해 전수되고 있다. 사실, 이렇게 전수된 저술조차 덴마크 수학사학자인 하이베르크(1854~1928)의 발굴 및 해독 작업이 없었다면 오늘날 전해지지 않았을 수도 있다[17, 18]. 하이베르크 이후 현재까지 《평면도형의 평형》 제 Ⅰ권, 《포물선의 구적》, 《평면도형의 평형》 제 Ⅱ권, 《방법》, 《구와 원기둥에 대하여》 제 Ⅰ, Ⅱ권, 《나선에 대하여》, 《원뿔곡선체와 타원회전체에 대하여》, 《부체에 대하여》 제 Ⅰ, Ⅱ권, 《원의 측정》, 《모래를 세는 사람》 등의 아르키메데스의 논문이 복원 발굴되었는데 이 중에서 적분법의 초기 아이디어를 담고 있는 《방법》은 가장 놀랄만한 연구물로 인정되고 있다[2, 9, 13, 18].

《방법》은 하이베르크에 의해 1906년 콘스탄티노플에서 발견된 이후, 제 1차 세계대전의 여파로 분실되었다가 1991년 한 프랑스인의 경매의뢰에 의해 그 행방이 밝혀진 후, 미국의 Walters Art Gallery에 위탁되어 현대적인 복원 작업이 이루어지고 있다[6, 17].

《방법》은 그 원제가 '에라토스테네스에게 보내는, 공학적 정리의 방법론(The method of mechanical Theorems, for Eratosthenes)'으로서 아르키메데스가 그의 친구인 에라토스테네스에게 보내는 편지형식으로 기술되어 있다. 아르키메데스는 이 《방법》에서 평면 및 입체도형의 넓이, 부피, 무게중심을 구하는데, 평면도형과 입체도형을 각각 무한소 양인 선분과 평면의 합으로 간주하고 '지레의 원리'를 이용해 어떤 도형들끼리의 평형을 보이면서 도형의 넓이, 부피, 무게중심 등을 구한 것으로 일반적으로 평가되고 있다. 불가분량의 사용은 데모크리토스 이전의 고대 그리스에서부터 이루어져왔다고 할 수 있는데, 아르키메데스는 기존의 불가분량과 자신의 무게중심에 근간한 역학적(또는 공학적) 개념들을 독창적으로 결합시켜 평면 및 입체도형의 성질을 탐구하는 '방법'을 구사한 것으로 널리 인정되는 것이다[2].

이러한 아르키메데스 '방법'에 대한 평가를 집약적으로 표현하는 것이 바로 '정적분 아이디어의 착상'일 것이다[9, 10]. 앞서 언급한 《방법》에서의 무한소 양(또는 불가분량)으로부터 전체 양으로의 이행과정이 다름 아닌 미분으로부터 적분으로의 이행과정에 대응한다는 것이다. 그리고 놀랍게도, 아르키메데스는 자신의 이러한 업적의 발견술적 가치와 역사적 의미를 다음과 같이 예견할 만큼 위대했다고 할 수 있다[19]: "나는 이 방법이 수학에 적지 않게 소용이 될 것으로 확신한다. 왜냐하면 이 방법은 일단 이해되면 지금 생존하고 있거나 아직 탄생하지 않은 다른 수학자들이 아직 나에게는 떠오르지 않는 다른 정리들을 발견하는 데 사용할 것으로 예견되기 때문이다[1]."

하지만 아르키메데스 '방법'에서는 어떤 곡선에 대한 접선을 찾는 것과 같은 미분에 관한 아이디어는 찾을 수 없을 뿐더러 적분과 미분의 역연산 관계를 드러내 보인 것은 아니

기 때문에, 아르키메데스 '방법' 에서의 불가분량 사용이 미분개념 또는 변화율과 관련되지 않았다고 판단하는 것이 일반적이라 하겠다[4, 8].

여기서 주목해야 할 것은 아르키메데스 '방법' 의 독창성이 불가분량 사용 자체에 있기보다는 불가분량과 역학적 개념의 결합에 있고 아르키메데스 '방법' 에 대한 해석과 평가는 이 결합의 성격에 좌우된다는 점이다. 수학사학계에서는 이러한 결합과 관련해 대립되는 두 가지 견해가 제시되고 있는데, 이 학술적 논쟁은 본질적으로 불가분량을 다루는 '지레의 원리' 의 역할에 관한 것으로 볼 수 있다.

3 아르키메데스 '방법' 에 대한 해석과 관련된 핵심적 쟁점

아르키메데스의 '방법' 의 해석과 관련된 논쟁의 양축에는 저명한 두 그리스 수학사학자인 Dijlsterhuis[6]와 Knorr[13]가 각각 위치하고 있다. 양 측의 의견 차이를 확인하기 위해 그들이 해석을 달리하는 《방법》 서문을 우선 살펴보자 : "저는 이 책에서 어떤 특별한 방법을 적어서 당신에게 보내려 하는데, 당신은 공학의 도움을 받아 그 방법을 통해 어떤 수학적 문제들을 인식할 수 있을 것입니다. 저는 이것이 이런 종류의 정리들의 증명을 발견하는데 더없이 유용하다는 것을 확신합니다. 어떤 정리들이 공학적 방법에 의해 나에게 분명해지게 인식된 다음에는, 기학적으로 증명합니다. 왜냐하면 앞서 언급한 방법에 의한 탐색에 의해서는 실제적 논증(actual demonstration)을 제공하지 않기 때문입니다. 그 방법에 의해 일단 의문시되던 것에 대해 어느 정도 지식을 획득한 이후에는, 어떤 사전 지식도 없이 증명을 제시할 때 보다 더 쉽기 때문입니다."

여기서, 아르키메데스가 밝힌 '공학적 방법' 의 공학은 구체적으로 '지레의 원리' 를 의미하는데, 그것은 지레팔의 양쪽에 무게가 각각 W_1, W_2 인 두 물체가 지레의 받침점으로부터 각각 d_1, d_2 만큼 떨어져 있고[1] $W_1 = d_1, W_2 = d_2$ 인 관계를 만족할 때 지레가 평형을 유지한다는 원리이다.

1) 이 거리는 지레의 받침점으로부터 중력의 작용점까지의 거리를 의미하는데, 이 작용점의 위치는 지레팔에서 각 물체의 무게중심의 수직방향과 만나는 곳이라 하겠다. 한편, 동일한 두 물체가 지레팔에 달린 방식이 달라도 중력의 작용점까지의 거리가 같다면 평형을 유지할 수 있기 때문에 중력의 작용점 위치에 그 물체의 무게중심을 위치시킬 필요는 없다고 하겠다.

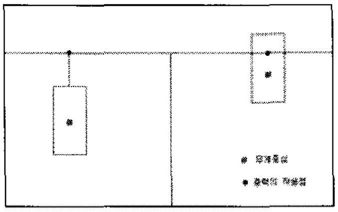

그림 1: 중력의 작용점과 무게중심

이 논쟁에서, Knorr[13]는 아르키메데스가 언급한 이러한 '방법'의 성격에 대해 그가 '방법'이 발견의 도구에 불과하며 증명, 논증의 기능을 하지 않는다는 점을 분명히 밝혔다고 주장한다. 즉, '공학의 도움을 받은 방법'은 형식적 논증의 수단이 될 수 없다는 것이다. 이에 반해, Dijlsterhuis[6]는 두 가지 근거를 바탕으로 '공학적 방법'으로부터 '공학'을 분리해서 고려해야 함을 주장한다. 구체적으로 말해, '불가분량'과 '지레의 원리'가 결합된 방법은 증명의 기능을 담당하지 않지만 '지레의 원리' 자체는 논증의 기능을 수행하는 것이 가능하다는 것이다. 이에 대해, 그가 제시한 첫 번째 근거는 《평면도형의 평형》 제 Ⅰ 권에서 '지레의 원리'를 정리로서 연역했다는 사실이다. 즉, '지레의 원리'가 수학적 논증의 대상이었기 때문에 이 원리를 사용한 정당화 방식은 연역적 논증이 될 자격이 있다는 것이다. 다른 한 가지 근거는 아르키메데스가 《포물선의 구적》에서 포물선 조각의 넓이가 내접하는 삼각형 넓이의 배가 됨을 실제로 불가분량을 사용하지 않고 '지레의 원리'만을 활용해 증명했다는 것이다.

이러한 의견 차이에도 불구하고, 논쟁의 양편에서 서로 동의하는 부분은 아르키메데스가 불가분량의 사용에 대해 매우 경계했다는 점이라 하겠다. 즉, 아르키메데스는 불가분량이 포함된 '방법'에 증명의 지위를 부여하지 않았다는 점에는 서로 동의하는 것이다. 이 사항은 위의 《방법》 서문의 바로 이어진 내용에서 어느 정도 예측이 가능하다: "그것이, 원뿔과 각뿔은 각각 같은 밑면과 높이를 가진 원기둥과 각기둥의 이 된다는 정리의 증명의 경우에 있어서, 에어독소스가 첫 번째 발견자이고 그 사실을 처음으로 말한 데모크리토스에게 어떠한 영예도 줄 수 없는 이유입니다." 아르키메데스는 원자론자인 데모크리토스가 불가분량을 사용해 어떤 기하학적 성질을 유도했더라도 그것에 증명의 지위를 부여할 수 없다고 판단했던 것으로 추측되는 것이다.

더욱이, 아르키메데스 당시에 엄밀한 증명에 이용되었던 소진법이 《구와 원기둥에 대하여》 제 Ⅰ 권에서 제시된 아르키메데스의 공리에 기반하고 있는데, 이 공리는 본질적으로 가무한의 입장에서 연속체의 무한분할 가능성을 표현하고 무한소의 존재를 부정한다는 점에서, 아르키메데스가 불가분량을 엄밀한 증명의 수단으로 단연코 인정하지 않았다는 것은 분명해 보인다[2]. 그런데 이러한 논쟁과정에서 '지레의 원리'가 핵심 쟁점사항이 되면서도 오히려 명확히 밝혀지지 않았던 것은 '방법'에서의 '지레의 원리'의 역할 자체라 하겠다. '불가분량'과 '지레의 원리'의 결합된 방식이 '방법'의 본질을 규명하는 중요한 단서임에도 불구하고 지금까지의 논쟁에서 정작 이 결합의 특성에 주목하지 못했던 것이다.

4 아르키메데스 '방법'에서 '지레의 원리'의 역할에 대한 분석

불가분량을 통해 도형의 넓이나 부피를 구한다는 것은 어떤 도형을 그보다 한 단계 낮은 차원의 도형으로 구성된 것으로 간주하여 그 넓이나 부피를 알아냄을 뜻한다. 그렇다면, 아르키메데스는 어떤 측면에서 불가분량을 활용한 방식을 경계할 수밖에 없었던 것일까? 17세기

카발리에르의 원리가 널리 알려진 이후 당시의 굴딘을 위시한 수학계의 비판은 그 이유를 추측하는데 있어 도움이 될 것이다. 왜냐하면 이 17세기의 논의는 고대에서의 불가분량과 관련된 논의가 충분히 알려지지 않은 상태에서 이루어졌던 것이기 때문에 매우 유사한 특성을 가졌을 개연성이 있기 때문이다[21]. 다음은, 카발리에르 당대에도, 불가분량 또는 무한소를 이용한 비교 측정의 위험성을 경계하는 편에서 흔히 제시했던 전형적 예와 관련된 것이다.

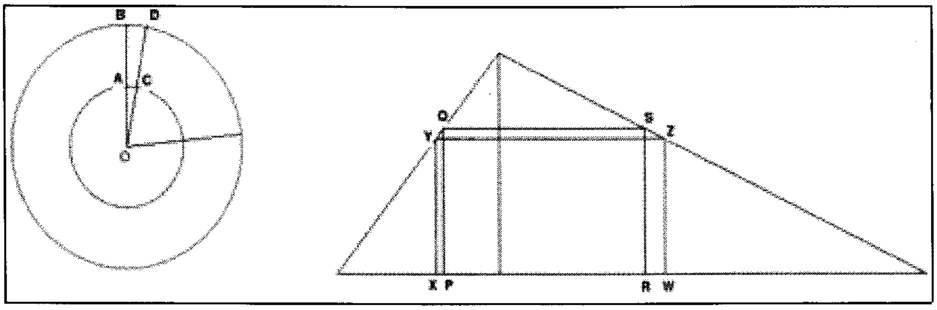

그림 2: 불가분량과 관련된 패러독스

한 가지는 원을 불가분량인 반지름 선분들로 구성된 것으로 생각했을 때 반지름이 2배가 되는 원은 넓이 역시 2배가 될 것 같지만 사실은 4배가 된다는 예이고, 다른 한 가지는 직각삼각형을 수선들의 합으로 생각할 때 높이는 같고 합동이 아닌 두 직각삼각형의 경우 대응하는 수선들의 길이가 같기 때문에 넓이가 같을 것 같지만 실제로는 그렇지 않음을 보여주는 예이다(<그림 2>). 물론, 이와 같은 예로 말미암아 카발리에르의 스승인 갈릴레오조차 불가분량 사이의 1-1 대응관계에 기초해서 불가분량의 총합이 비를 가질 수 있다는 주장에 반대하였을 것이다[16].

이러한 패러독스가 발생하는 원인은 무엇일까? 즉, 어떤 면을 간과하기 때문에 이러한 패러독스가 일어나게 되는 것일까? 이 질문에 대한 대답은 '지레의 원리' 의 역할을 규명하는 디딤돌이 될 것이다. 왜냐하면 아르키메데스가 불가분량을 경계하면서도 '지레의 원리' 를 통해 적극적으로 그 발견술적 힘을 이용했다면, '지레의 원리' 에는 불가분량을 이용한 비교 측정의 단점을 극복하는 적어도 그 무엇이 존재했기 때문일 것이다.

위에서 제시된 패러독스의 예는, 갈릴레오의 판단과 같이, 불가분량의 총합에 비례이론을 적용할 수 없다는 것을 보여준다. 정확히 말해, 비례이론의 적용이 불가능한 이유를 보여주는데, 그것은 부채꼴 OAB와 부채꼴의 일부조각인 $ABCD$의 면적이 다르고 사각형 $XYQP$와 사각형 $ZWRS$의 면적이 다른 것에서 알 수 있듯, 양이 변화되는 정도가 다르기 때문이라 하겠다. 불가분량을 다룸에 있어 비례이론은 '변화율' 을 통제할 수 없는 정적인 특성을 가지고 있는 것이다.

이러한 관점은 '지레의 원리' 의 역할을 분석하는 하나의 틀이 될 수 있다. 즉, '변화율 통

제' 관점이 아르키메데스 '방법' 에서 불가분량과 지레의 원리 사이의 관계를 밝히는 하나의 잣대가 될 수 있는 것이다. 이에 대한 분석을 위해, 지레의 원리가 적용되는 '방법' 의 절차를 단순화해서 기술하면 다음과 같다[2, 6, 12, 20]:

<절차1> : 도형들을 선분 또는 단면들의 총합으로 간주했을 때,

<절차2> : 지레팔의 한 편에 있는 도형의 선분 또는 단면에 대해 그에 대응하는 다른 편의 선분 또는 단면이 유일하게 존재하여 각각이 지레의 원리에 따라 평형을 이루게 되면,

<절차3> : 원래의 도형들 사이에도 평형이 이루어지게 되는데, 이 평형에서 지레받침점에 대한 양쪽 도형의 중력 작용점의 위치는 각각 지레팔에서 도형의 무게중심의 수직방향과 만나는 곳이 된다.

<절차1> 에서는 불가분량인 선분 또는 면적을 도형 자체와 동일하게 무게로 취급하는 것을, <절차2> 에서는 불가분량 사이에 지레의 원리가 성립하여 평형을 이루게 되는 것을, 그리고 <절차3> 에서는 불가분량의 합인 도형들 사이에도 평형이 이루지기 때문에 지레의 원리가 적용되는 것을 보여준다고 하겠다.

'아르키메데스가 불가분량에 비례이론만을 접목했을 때 '변화율' 의 차이로 인한 패러독스가 발생하게 됨을 인식했는지?', '이러한 이유로 인해, 불가분량의 발견술적 활용에 있어 그러한 패러독스를 극복하기 위해 '지레의 원리' 를 도입했는지?' 의 여부가 명백한 것은 아닐 것이다. 하지만 아르키메데스 '방법' 의 실제적 적용 예를 고찰하게 되면 아르키메데스가 그러한 패러독스를 인식했을 가능성이 충분히 있었음을 예측할 수 있다. 이와 관련해, 《방법》에서의 첫 번째 명제를 살펴보도록 하자.

명제 1 포물선 조각 ABC는 AC와 포물선ABC 로 둘러친 부분이라 하자. 그리고 D는 AC의 중점이라 하자. 포물선의 축에 평행한 직선 DBE 를 긋고 AB, BC를 연결한다. 그러면 포물선 조각 ABC는 삼각형 ABC의 $\frac{4}{3}$이다.

A로부터 DE에 평행하게 AKF를 긋는데, C에서 포물선에 접하는 접선은 DBE와는 E에서 만나고 AKF와는 F에서 만난다고 하자. CB를 연장해서 AF와는 K에서 만나고 CK를 KH의 길이가 CK와 같도록 H까지 연장시킨다.

CH는 지렛대이며 K는 그 중점으로 생각하자.

MO는 ED에 평행한 임의의 직선인데, 이 직선이 CF, CK, AC와 각각 M, N, O에서 만나고 포물선 곡선과는 P에서 만난다고 하자. 이제, CE는 포물선에 접하고 CD는 준-세로축 (semi-ordinate)이기 때문에, $EB = ED$ 이다; "이것은 《원론》 에서 증명되었다."

FA, MO는 ED와 평행하기 때문에, $FK = KA, MN = NO$ 이다.

이제, "보조정리에서 증명된" 포물선의 성질에 의해,

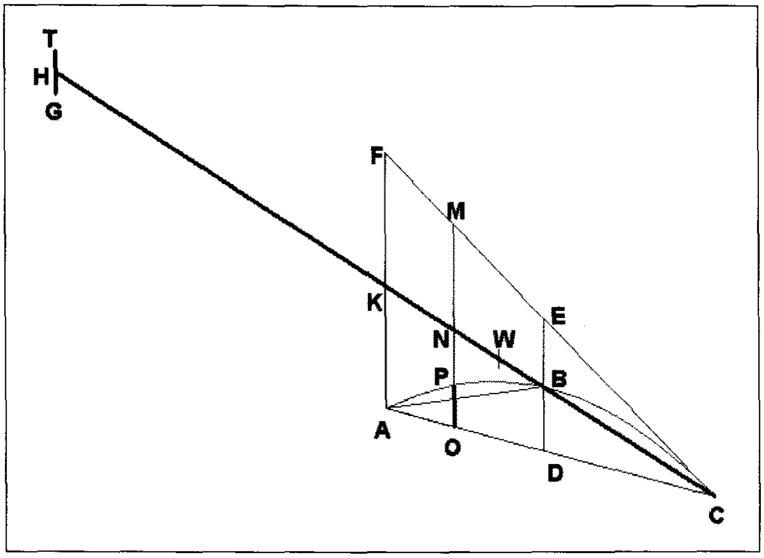

그림 3: 《방법》 명제 1의 그림

$MO : OP = CA : AO$[2)]

$CK : KN$[3)]

$HK : KN$ 이다. TG를 OP와 같게 잡고, TG의 무게중심이 H라고 하면, $TH = HG$ 이다; 그러면, N이 MO의 무게중심이기 때문에, $MO : TG = HK : KN$ 이다.

그러면, H에서의 TG와 N에서의 MO가 K에 대하여 평형을 이루게 된다.[4)]

비슷한 방식으로, DE와 평행하면서 포물선 호와 만나는 모든 직선에 대해, (1)KC 위에 중점이 있으면서 FC, AC 사이에 끼인 부분과 (2) 포물선과 AC 사이에 끼인 부분과 길이가 같으면서 H에 무게중심을 가지는 부분은 K에 대하여 평형을 이루게 된다.

그런데 삼각형 CFA는 MO와 같은 종류의 평행선들로 이루어졌고 포물선 조각 CBA는 PO와 같은 종류의 선들로 이루어졌기 때문에, 지금의 위치의 삼각형 CFA는 그 무게중심이 H인 포물선 조각 CBA와 K에 대하여 평형을 이룬다.

KC를 W에서 나누면 $CK = 3KW$ 이다; 여기서 W는 삼각형 ACF의 무게중심이다; "이것은 《평면도형의 평형》 에서 증명된 것이다."

그러므로 (삼각형 ACF) : (포물선 조각ABC) $HK : KW = 3 : 1$ 이다.

따라서 (포물선 조각 ABC) = $\frac{1}{3}$(삼각형ACF) 이다.

그런데 (삼각형ACF)=4(삼각형ABC) 이다.

2) 《포물선의 구적》 명제 5에 의해

3) 《유클리드 원론》 VI권 명제 2에 의해

4) 《평면도형의 평형》 제 I 권 명제 6, 7에 의해

따라서 (포물선 조각ABC) $=\frac{4}{3}$ (삼각형 ABC) 이다[12].

《방법》 의 명제1은 아르키메데스의 '방법' 의 절차가 순차적으로 적용되는 전형적 모습을 보여준다. 여기서, $MO : OP = HK : KN$ 비례식에서 선분 HK가 고정됨으로써 선분KN을 매개로 하여 MO와 OP가 비교된다는 점에 주목할 필요가 있다. 선분KN의 값에 따라[5] MO 와 OP의 변화되는 정도를 간접 비교할 수 있는 것이다. 다시 말해, 선분 KC 를 축(일종의 무게중심축)으로 하여 선분KN을 변화시키며, 그 동일한 기준에 의해 MO와 OP가 점유하는 면적을 비교한 것이라 할 수 있다. 사실, 이러한 과정은 비교대상인 두 도형의 높이를 일치시킴으로써 도형의 변화의 정도를 통제한 카발리에르가 취한 불가분량 방법과의 유사성을 보여준다고 하겠다. 본질적으로, 아르키메데스 '방법' 에서는 '지레의 원리' 를 매개로 하여 일치된 기준에 의해 두 도형의 변화 정도를 통제하고자 하는 특징이 엿보이는 것이다.

'변화율의 통제' 아이디어가 '높이의 일치' 와 밀접하게 관련되었다는 점은 도형의 높이 사이에 차이를 두게 될 경우 아르키메데스 '방법' 이 적용되지 않는다는 사실을 통해 쉽게 확인된다.

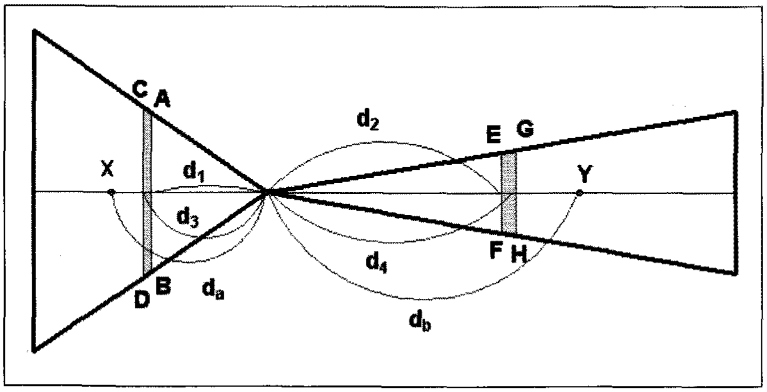

그림 4: 아르키메데스 '방법' 의 부적용

예를 들어, 넓이가 같지만 그 높이가 다른 두 이등변삼각형에 대해 아르키메데스 '방법' 이 적용된다고 가정하자. 두 삼각형 각각을 선분들의 총합으로 간주했을 때, 위의 <그림 4> 에서 $\overline{AB} \cdot d_1 = \overline{EF} \cdot d_2$, $\overline{CD} \cdot d_3 = \overline{GH} \cdot d_4$ 와 같이, 지레팔의 양쪽에 있는 두 삼각형의 선분들이 1-1 대응되면서 지레의 원리에 따라 평형을 이루면, 지레팔의 양쪽에 있는 두 삼각형 자체도 평형을 이루게 된다고 할 수 있을 것이다. 이 때, 이 두 삼각형의 넓이가 A_1, A_2 이고 지레 받침점으로부터 두 삼각형의 중력 작용점(이 경우, 무게중심과 일치함)까지의 거리가

5) 동시대의 운동에 대한 생각을 고려한다면, 아르키메데스는 운동이 기하학적인 증명에서 응용하기에는 엄밀하지 않다고 간주했을 수도 있을 것이다. 그런 점에서, 명제1에서 전체적인 평형 상태를 기술함에 있어 MO와 같은 선분들의 움직임을 기술하는 대신에 '비슷한 방식으로 ...K 에 대하여 평형을 이룬다.' 와 같이 정역학적인 설명을 하였을 것으로 보인다.

각각 d_a, d_b 라면 지레의 원리에 의해 $A_1 \cdot d_a = A_2 \cdot d_b$ 이 성립할 것처럼 보인다.

하지만 A_1, A_2 의 값은 서로 같고 d_a, d_b 의 값은 다르기 때문에, $A_1 \cdot d_a = A_2 \cdot d_b$ 은 성립하지 않는다. 이것은, 대응하는 불가분량 사이에 1-1 대응관계가 성립하고 불가분량의 변화량이 서로 동일(위의 예의 경우, 사각형 $ABCD$ 와 사각형 $EFGH$ 의 면적이 동일)하더라도, 높이가 다름으로 인해 그 변화과정의 속도에 있어서 차이가 나기 때문에 발생하는 현상이라 할 수 있다. 아르키메데스 '방법' 에서 도형끼리의 높이를 일치시키며 지레의 원리를 적용한 것은 변화율을 통제하기 위함이었다고 추측할 수 있는 대목이다.

그렇다면, '지레의 원리' 를 사용하지 않고 불가분량만을 사용했을 때에는 그 측정의 과정과 결과는 어떻게 달라지는 것일까? 탐색을 위해, 《방법》 명제1에서 $MO : OP = CA : AO$ 와 같은 비례관계와 불가분량을 활용해, 삼각형 ACF 와 포물선 조각 ABC 의 넓이를 비교하는 활동을 하자.

삼각형 ACF, 포물선 조각 ABC 은 각각 MO 와 같은 종류의 선분들, OP 와 같은 종류의 선분들로 구성되고, 불가분량의 총합에 비례관계를 적용할 수 있다고 하면, $MO : OP = CA : AO$ 와 같은 비례관계로부터 (삼각형 ACF) : (포물선 조각 ABC) = (CA 와 같은 종류의 선분들이 모인 도형) : (AO 와 같은 종류의 선분들이 모인 도형) 을 유도할 수 있다. 여기서, CA 와 같은 종류의 선분들과 AO 와 같은 종류의 선분들을 점 O 에 수직이 되도록 위치시키면, 전자와 후자의 선분들이 각각 이루는 도형은 정사각형과 직각이등변삼각형이 된다. 그런데 (삼각형 ACF) : (포물선 조각 ABC)은 3 : 1 인 반면에 (AO 와 같은 종류의 선분들이 모인 정사각형) 대 (CA 와 같은 종류의 선분들이 모인 직각이등변삼각형)은 2 : 1 이 된다(<그림 5>). '지레의 원리' 를 사용하지 않고 불가분량만을 사용했을 때에는 너무나 분명하게 패러독스가 발생하게 되는 것이다.

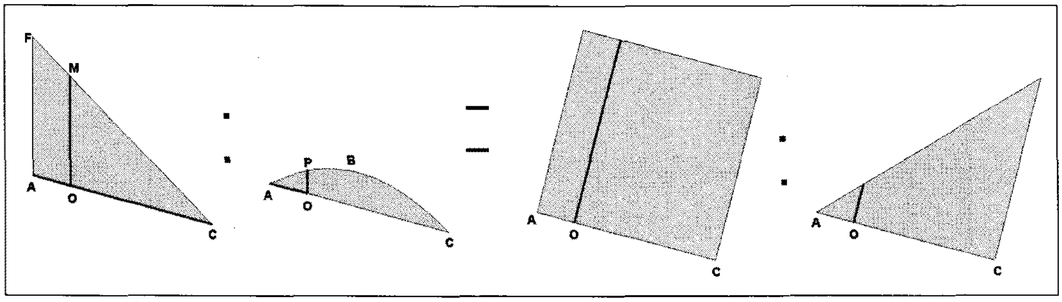

그림 5: '지레의 원리' 를 사용하지 않았을 때의 패러독스

이러한 탐색 활동은 아르키메데스가 도형 측정에 있어 불가분량의 총합에 비례이론을 적용하는 것이 위험하다는 점을 인지했을 가능성을 강하게 시사한다. 사실, 아르키메데스가 취한 불가분량과 관련된 발견술적 접근을 고려한다면 그가 불가분량의 총합에 위와 같이 비례이론

을 적용해보는 실험 활동을 시도했을 개연성은 매우 높은 것이다. 이와 관련해, 특히 '방법' 에서 간접적인 방식에 의해 '불가분량 총합 사이의 비' 의 아이디어가 암묵적으로 사용되고 있다는 점에 주목할 필요가 있다 : '방법' 의 <절차1> 이 불가분량의 총합에 대한 것이고 '방법' 의 <절차2> 로부터 <절차3> 으로의 이행이 불가분량 사이의 평형을 불가분량 총합 사이의 평형으로 전환시키는 과정이란 점에서, '방법' 은 '불가분량의 총합' 사이를 직접 비교하는 대신에 '불가분량의 총합' 사이를 지레의 원리의 따른 평형을 이용해 간접 비교하는 체계를 갖추었다고 하겠다. 아르키메데스는 '방법' 에서 '불가분량을 직접 더하는 과정을 피하도록 하는 기발한 도구[12]' 를 제안했던 것이다.

아르키메데스가 이처럼 불가분량의 총합 사이를 간접적으로 비교했다면, 그는 '불가분량 총합 사이의 직접 비' 에 대해서는 이미 철저한 분석을 했을 것으로 추정된다고 하겠다. 그리고, 만약 이처럼 아르키메데스가 불가분량 총합의 직접 비교에 따른 패러독스의 발생과 그에 대한 원인을 분석했다면, 그는 '도형 내에서 변화되는 정도에 있어서의 차이' 가 결정적이라는 점을 인지했을 것이고 '변화율의 통제' 가 가능한 도구를 찾고자 했을 것이다. 물론, 20세기 초에 이루어진 《방법》의 재발견은 그 도구가 '지레의 원리' 였을 것이라는 점을 암시한다.

5 결론

아르키메데스는, 볼테르가 "호메로스의 머릿속보다 아르키메데스의 머릿속에 훨씬 더 많은 상상력이 있었다."고 극찬할 정도로, 수학의 역사 속에서 어떤 누구와 비교할 수 없을 정도로 뛰어난 수학적 연구를 했다고 할 수 있다. 17세기 후반의 미적분학의 발견에 의해 비로소 그의 토대를 넘어설 수 있었고 수십 세기가 지난 이후에도 그가 인구에 회자된다는 사실은 이러한 점을 더욱 부각시킨다고 할 수 있다[7]. 아르키메데스에 대한 평가는, 세계의 변화와 새로운 문헌에 대한 재발견과 함께, 그의 시대를 초월한 창의성을 인지하는 방향으로 이루어져 왔다고 할 수 있다[14]. 이런 측면에서, 이 연구도 그의 수학이 어떤 점에서 위대한지를 드러내는 하나의 작은 시도라 할 수 있다.

일반적으로, 아르키메데스의 '방법' 은 "과정 내내 전적으로 정적이기에, 동적인 좌표 개념 또는 넓이, 부피의 증가율로서의 단면 개념은 존재하지 않는다.[4]"고 평가받는다. 또한, 아르키메데스는 지레의 원리를 아리스토텔레스의 운동학적 논의보다는 정역학의 공리로부터 정리로서 유도했다[15]. 그렇기에, 아르키메데스의 '방법' 에서 비록 정적분의 씨앗이 엿보이지만 미분과 연관된 적분의 개념, 일반적인 적분계산법에 이르지 못했다고 보는 것이 그 '방법' 에 대한 일반적 평가라 할 수 있다[11, 5]. 아르키메데스가 좌표기하학의 접근방식을 사용한 듯 보이지만 동차성의 원리를 극복하고 해석기하학, 함수, 및 극한의 단계에 이르렀던 것은 아니기 때문에, 이러한 평가는 객관적이고 타당하다고 할 수 있다.

그런데 이 연구에서는 아르키메데스에 대한 현재의 역사적 평가 중 일부에 대한 재고가 필

요할 수 있음을 지적한다. 특히, 아르키메데스 '방법'에 대한 기존 연구에서 주목하지 못했던 불가분량과 지레의 원리 사이의 관계를 조명하면서, 지레의 원리가 변화율의 통제를 가능하게 했던 도구라는 역사적 가설을 이끌어내었는데, 이는 '방법'에 있어 지레의 원리가 도형의 넓이나 부피를 구하는 적분과정에 있어 순간마다의 변화율, 곧 미분적인 요소(미세한 불가분량을 사용한 구적의 과정 자체가 아니라 그러한 구적의 과정에서 '넓이와 부피의 변화 정도'를 고려한다는 면)를 함께 다루도록 기획된 특징이 있음을 주장하는 것이다. 만약 아르키메데스가 이처럼 지레의 원리를 통해 의도적으로 도형의 변화율을 통제하면서 넓이와 부피를 구했다고 하면, 그는 뉴톤과 라이프니츠보다 약 2000년 전에 이미 적분과 미분을 연결시키는 아이디어의 씨앗을 남겼다고 평가해야 할 것이다.

참고 문헌

1. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부, 2000.
2. 홍갑주, 아르키메데스 수학의 교육적 연구, 서울대학교 박사학위논문, 2008.
3. Aaboe, A., & Sherbert, D. R., *Didactical and Other Remarks on Some Theorems of Archimedes and Infinitesimals*, Centaurus, 38(4), (1996), 295-316.
4. Baron, M. E., *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, New York, Dover Publications, 1969.
5. Coolidge, J. L., *A History of Geometrical Method*, New York, Dover Publications, 1963.
6. Dijksterhuis, E, J., *Archimedes*, New Jersy, Princeton University Press, 1987.
7. Dunham, W., *Journey through Genius*, 한글 번역판 (2004), 조정수 역, 수학의 천재들, 경문사.
8. Edwards, C. H., *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979.
9. Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, 한글 번역판 (1996), 이우영, 신항균 역, 수학사, 경문사.
10. Eves, H., *Great Moments in Mathematics*, 한글 번역판 (2003), 허민, 오혜영 역, 수학의 위대한 순간들, 경문사.
11. Gardiner, A., *Infinite Processes-Background to Analysis*, New York, Springer-Verlag, 1982.
12. Heath, T. L., *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes*, New York, Dover Publications, 1912.
13. Knorr, W. R., *"The Method of Indivisibles in Ancient Geometry" in R. Calinger(Ed.)*, Vita Mathematica, (1996), 67-86.
14. Laird, W. R., *Archimedes among the Humanists*, Isis, 82(4), (1991), 628-638.
15. Lenzen, V. F., *Archimedes' Theory of the lever*, Isis, 17(2), (1932), 288-289.
16. Mancosu, P., *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New York, Oxford University Press,1996.
17. Nets, R. & Noel, W., *The Archimedes Codex*, Da Capo Press,2007.
18. Nets, R., *The works of Archimedes(vol 1)*, Cambridge, Cambridge University Press, 2004.
19. Polya, G., *Induction and Analogy in Mathematics*, New Jersy, Princeton University Press, 1973.
20. Smith, D. E., *History of Mathematics(vol 2)*, New York, Dover Publications, 1953.

21. Toeplitz, O., *The Calculus - A Genetic Approach*, *Chicago*, The University of Chicago Press, 1967.

박선용 영남대학교 수학교육과
Department of Mathematics Education, Yeungnam University
E-mail: polya@yu.ac.kr