Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 36, No. 2, pp. 101-107, May 2010.

국면전환 블랙-숄즈 모형에서 정합성을 가진 모수의 추정

한 규 식†

전북대학교 상과대학 경영학부

Calibrated Parameters with Consistency for Option Pricing in the Two-state Regime Switching Black-Scholes Model

Gyu-Sik Han

Chonbuk National University

Among a variety of asset dynamics models in order to explain the common properties of financial underlying assets, parametric models are meaningful when their parameters are set reliably. There are two main methods from which we can obtain them. They are to use time-series data of an underlying price or the market option prices of the underlying at one time. Based on the Girsanov theorem, in the pure diffusion models, the parameters calibrated from the option prices should be partially equivalent to those from time-series underling prices. We call this phenomenon model consistency. In this paper, we verify that the two-state regime switching Black-Scholes model is superior in the sense of model consistency, comparing with two popular conventional models, the Black-Scholes model and Heston model.

Keywords: Parameter Calibration, Consistency, Regime Switching Black-Scholes Model, Girsanov Theorem, Heston Model

1. 서 론

금융 기초자산의 공통 특성을 설명하기 위하여 다양한 자산 모형이 개발되었으며, 이를 바탕으로 옵션 등의 파생상품 가격을 평가하기 위한 공식 혹은 방법이 여러 연구자들에 의해 제시되었다. 기초자산 모형 중 모수적(Parametric) 모형은 모형의 모수가 적정하게(Reliable) 결정되어 사용되었을 때 그 의미가 있다고 할 수 있다. 그러나 해당 모형의 모수는 주어져 있지 않기 때문에 여러 정보에 근거하여 모형의 모수를 추정하는 절차를 거쳐야만 한다. 일반적으로 모수의 모형은 두 가지 방법을 통해서 추정된다. 그 중 하나는 어느 한 시점의(Cross-sectional) 유럽형 옵션의 시장가 정보를 이용하되, 옵션의 시장가가 옵션의 이론가와 동일하다는 가정 하에 역으로 모형 모수를 구하는 방법이다. 이 때, 다음과 같은 비선형 최소좌승법(Nonlinear Least-square Method)을 사용하게 된다.

$$\theta^* = \mathrm{argmin}_\theta \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left[C_i^{mkt} - C^{theo}(S,\ K_i,\ {}_{i,}\theta) \right]^2 \qquad (1)$$

(C_i^{mkt} : 옵션의 시장가, C^{theo} : 옵션의 이론가, K_i : 옵션의 행사가, T_i : 옵션의 잔존만기, θ : 모형 모수, α_i : 가중치)

그러나, 식 (1)의 방법으로 구한 모수 값(θ^*)은 유일한 해가 될 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 시장에서 주어지는 옵션의 시장가 정보가 한정되어 있거나 혹은 옵션 공식이 매우 복잡한 구조일 경우에 그렇다. 따라서, 이런 문제점을 회피하기 위하여 다음과 같이 Relative Entropy, Kullback-Leibler Divergence 등의 Penalty 함수를 덧붙여 모수를 구하는 방식을 취한다(Cont *et al.*, 2004).

$$\theta^* = \mathrm{argmin}_\theta\, \beta \sum_{i=1}^{N} w_i \left[C_i^{mkt} - C^{theo}(S,\ K_i,\ T_{i,}\ \theta) \right]^2 + (1-\beta)\Psi(\theta) \qquad (2)$$

본 논문은 2009년도 전북대학교 신임교수 연구비 지원에 의하여 연구되었음.
† 연락저자 : 한규식 교수, 561-756 전라북도 전주시 덕진구 덕진동 1가 664-14 전북대학교 상과대학 경영학부, Tel : 063-270-2984, Fax : 063-270-2985, E-mail : gshan0815@jbnu.ac.kr
2010년 2월 18일 접수; 2010년 5월 10일 수정본 접수; 2010년 5월 14일 게재 확정.

($\Psi(\Theta)$: Penalty 함수, β : 최소좌승부분과 Penalty 함수 부분의 상대적 중요도 값)

모형 모수를 구하는 다른 하나의 방법은 기초자산의 시계열 정보를 이용하는 것이다. 시계열 자료로부터 모형 모수를 추정할 때, 최우추정(Maximum Likelihood Estimation, MLE)법이 가장 많이 사용된다(Hamilton, 1994). 해당 모수적 모형의 우도함수(Likelihood Function)를 $L(\theta)$라고 할 때, 기초자산의 시계열 정보 $S_t(0 \le t \le T)$를 이용하면

$$\ln L(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln p\left(S_t | S_{t-1},\ \cdots,\ S_0;\ \theta\right)$$

($\ln$: 자연로그, $p\left(S_t | S_{t-1},\ \cdots,\ S_0\ ;\ \theta\right)$: 모형으로부터 계산된 조건부 확률밀도함수(Conditional Probability Density Function)) 와 같이 표현되고, $\ln L(\theta)$를 가장 크게 만드는 모형 모수(θ)를 추정하는 것이 최우추정법이다. 최우추정법의 가장 큰 장점 중 하나가 활용할 수 있는 시장 정보가 매우 많다는 것에 있다. 이는 정보기술의 발전에 따라 일별 거래 종가 데이터뿐만 아니라, 일중 매우 짧은 시간 단위의 거래 데이터를 취합할 수 있게 된 것에서 비롯된다. 시계열 정보의 이러한 장점은 식 (1)이나 식 (2)에서 한정된 시장 정보에 의해서 발생 가능한 문제점을 회피하도록 도움을 줄 수 있다. 그러나, 기초자산 정보가 주어지는 확률측도(Probability Measure)와 파생상품의 평가가 이루어지는 확률측도가 다르기 때문에, 기초자산의 시계열 정보로부터 추정된 모형 모수와 파생상품의 시장가 정보로부터 역으로 계산된 모형 모수가 동일하다는 보장을 할 수 없다. 다행스럽게도, 블랙-숄즈(Black-Scholes, BS) 모형이나 헤스턴(Heston)의 추계적 변동성(Stochastic Volatility) 모형과 같은 순수 확산(Pure Diffusion)모형에서는 Girsanov 정리에 의해 확률측도가 바뀌더라도 모형 모수 중 일부는 변동이 없다는 이론적 근거를 이용하여 동일하게 추정되어야 하는 모형 모수를 이용, 파생상품의 평가에 사용할 수 있다(Black *et al.*(1973), Heston(1993), Neftci(2000)). 예를 들어, Girsanov 정리에 의해 BS 모형은

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P \Rightarrow dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (3)$$
$$(dW_t \sim N(0,\ dt))$$

그리고, 헤스턴 모형은

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t}\, S_t dW_t^{1,\,P} \quad (4)$$

$$dv_t = (\omega - \kappa v_t)dt + \xi \sqrt{v_t}\, dW_t^{2,\,P} \quad (5)$$
$$\langle\, dW_t^{1,\,P},\ dW_t^{2,\,P}\,\rangle = \rho dt$$
$$\Rightarrow \quad dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t}\, S_t dW_t^{1,Q} \quad (6)$$
$$dv_t = (\omega - \kappa' v_t)dt + \xi \sqrt{v_t}\, dW_t^{2,Q} \quad (7)$$
$$\langle\, dW_t^{1,Q},\ dW_t^{2,Q}\,\rangle = \rho dt$$

와 같이 변한다. 식 (3)에서 식 (7)까지 P는 기초자산의 확률측도(Real-world Probability Measure), Q는 위험중립확률측도(Risk-neutral Probability Measure), $N(\alpha,\ \beta)$는 평균이 α, 분산이 β인 정규분포를 의미한다. 식 (3)을 보면, 변동성 모수인 σ가, 식 (4)에서 식 (7)까지 비교해보면 ω, ξ, 그리고 ρ가 변하지 않은 것을 확인할 수 있다. 이처럼 기초자산의 시계열 정보로부터 추정된 모수와 파생상품의 시장가 정보로부터 계산된 모수 간 일치성을 모형 정합성(Model Consistency) 혹은 모수 정합성이라고 한다. Javaheri는 모수 정합성 측면에서 추계적 변동성 모형인 헤스턴 모형은 좋은 모형이 아님을 밝히고 있다(Javaheri, 2005). 본 논문에서는 모수 정합성 측면에서 국면전환 블랙-숄즈 모형이 기존의 모형(BS 모형 및 추계적 변동성 모형)보다 더 우수함을 보이고자 한다. 본 논문의 내용은 다음과 같이 구성된다. 제 2장에서는 본 논문의 연구 방법론을, 제 3장에서는 가상의 데이터에 국면전환 블랙-숄즈 모형 및 비교 모형을 적용한 실험 결과를, 제 4장에서는 결론을 쓰는 순서로 본 논문을 마무리한다.

2. 배경 지식

파생상품은 기존의 금융상품으로부터 새로운 현금흐름이 나오도록 만든 금융상품으로서 파생상품의 가격은 기존의 금융상품 가격에 대한 함수 형태로 볼 수 있다. 그 중 옵션은 미래의 특정시점(만기)에 특정 자산을 정해진 가격(행사가격)에 사거나 팔 수 있는(행사할 수 있는) 파생상품을 말하며, 살(팔) 수 있는 권리를 콜(풋)옵션이라 하며, 만기에만 행사할 수 있는 경우를 유럽형 옵션, 만기 이전에도 행사할 수 있는 경우를 아메리칸 옵션이라고 한다.

3. 연구 방법론

본 논문에서는 여러 국면 전환 모형 중 양국면전환 블랙-숄즈(Two-state Regime Switching Black-Scholes, Two-state RSBS) 모형에 초점을 맞추고 있다. Two-state RSBS 모형은 기본적으로 두 개의 BS 모형을 사용하며, 그 두 개의 모형이 경제상황의 변화에 따라서 -국면전환(Regime Switching)이 일어남에 따라서- 바뀌며 적용되는 모형이라고 할 수 있다.

3.1 양국면전환 블랙-숄즈 모형

3.1.1 모형의 가정 및 구성

국면전환은 어떤 확률함수 모형에 따라 일어나게 된다. 본 논문에서는 국면전환의 확률함수는 마코브 과정(Markov Process)를 따르는 것으로 가정한다(Ross, 2000). 따라서, Two-state RSBS 모형은 다음과 같이 모형화할 수 있다.

$$dS_t=\mu_{\epsilon_t}S_t dt+\sigma_{\epsilon_t}S_t dW_t,\ dW_t\sim N(0,\ dt) \tag{8}$$

$$\Pr\{\epsilon_{t+1}=j|\epsilon_t=i\}=p_{ij},\ \sum_{j=1}^{2}p_{ij}=1\ \text{for}\ i=1,\ 2$$

여기서 ϵ_t와 W_t는 독립이며, 국면 i에서 다른 국면으로 변하는 정도(속도)를 λ_i라고 할 때

$$\Pr\{\tau_i>t\}=e^{-\lambda_i t}$$

(τ_i : 국면 i에서 다른 국면으로 변하는 데에 걸리는 시간)

와 같이 가정한다. 한편, 마코브 과정에서는 일반적으로 $p_{ii}<1$임을 가정한다. 이런 가정은 실제 금융시장의 움직임과도 일치한다고 볼 수 있다. 예를 들면, 아시아 금융위기가 일어나고 2~3년 정도 지나 사라진 것이나, 금융전문가들이 근래에 일어난 미국발(發) 서브프라임 위기가 영원히 지속되지 않을 것이라고 예상하는 경우를 생각해보면 충분히 위와 같은 가정이 결코 무리한 가정이 아님을 알 수 있다.

3.1.2 Moment의 계산

식 (9)는 Ito's lemma에 의해

$$d(\ln S_t)=\left(\mu_{\epsilon_t}-\frac{1}{2}\sigma_{\epsilon_t}^2\right)dt+\sigma_{\epsilon_t}dW_t \tag{9}$$

$$\Rightarrow \ln S_t-\ln S_0=\left(\mu_{\epsilon_t}-\frac{1}{2}\sigma_{\epsilon_t}^2\right)t+\sigma_{\epsilon_t}W_t \tag{10}$$

가 유도된다. 그러면, Two-state RSBS의 조건부(conditional) 평균과 분산은 다음과 같이 계산된다.

$$E[r_t|\epsilon_t=i]=\left(\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t \tag{11}$$

$$Var[r_t|\epsilon_t=i]=\sigma_i^2 t \tag{12}$$

(단, $r_t=\ln S_t-\ln S_0$)

식 (11)와 식 (12)의 결과를 이용하면, 무조건부(unconditional) 평균(Mean)과 분산(Variance)은

$$\text{Mean}=\pi_1\left(\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t+\pi_2\left(\mu_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t \tag{13}$$

Variance

$$=\pi_1\sigma_1^2 t+\pi_2\sigma_2^2 t+\pi_1\pi_2\left\{\mu_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2-\left(\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\right\}^2 t^2 \tag{14}$$

(단, $\pi_i=\Pr\{\epsilon_t=i\}$)

가 된다(Timmermann, 2000).

3.2 모수 추정 방법

3.2.1 기초자산 시계열 정보 이용시

식 (9)을 Euler 방식으로 이산화(Discretization)하면,

$$\ln S_{t+\Delta t}-\ln S_t=\left(\mu_{\epsilon_t}-\frac{1}{2}\sigma_{\epsilon_t}^2\right)\Delta t+\sigma_{\epsilon_t}\sqrt[2]{\Delta t}\,\eta_t \tag{15}$$

가 된다. 따라서 로그수익률 $r_t=\ln S_{t+\Delta t}-\ln S_t$은 각 국면에서 정규분포를 갖는 확률과정이 된다. 즉,

$$r_t\sim\begin{cases}N\left(\left(\mu_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\Delta t,\ \sigma_1^2\Delta t\right) & \text{if}\ \epsilon_t=1\\ N\left(\left(\mu_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)\Delta t,\ \sigma_2^2\Delta t\right) & \text{if}\ \epsilon_t=2\end{cases} \tag{16}$$

기초자산의 시계열 정보를 이용하여 모수 추정을 과정을 알아보자. 여기서, ϵ_t가 관찰되지 않으나, 기초자산의 시계열 정보로부터 계산된 r_t의 시계열 정보를 이용하여 추정이 가능하다. 그러므로 Two-state RSBS 모형에서 추정해야 할 모수 집합은 $\theta=\{\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ p_{12},\ p_{21}\}$이 된다. 특히, 식 (13)와 식 (14)에서 정의된 무조건부 확률인 π_i은

$$\pi_1=\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}},\ \pi_2=\frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \tag{17}$$

의 관계를 갖는다(Hamilton, 1994; Bollen, 1998). 한편,

$$\xi_{t|t}(i)=\Pr\{\epsilon_t=i|\Omega_t;\ \theta\},\ \Omega_t=\{r_0,\ r_1,\ \cdots,\ r_{t-1},\ r_t\}$$

라고 정의하면, 현재(시간 t)의 국면이 i일 때, 수익률 r_t의 확률밀도함수가

$$f(r_t|\epsilon_t=i,\ \Omega_{t-1};\ \theta) \tag{18}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}\,\sigma_i}exp\left[-\frac{\left\{r_t-\left(\mu_i-0.5\sigma_i^2\right)\Delta t\right\}^2}{2\sigma_i^2\Delta t}\right]$$

이므로, 조건부 확률밀도함수 $f(r_t|\Omega_{t-1};\ \theta)$는 다음과 같이 계산된다.

$$f(r_t|\Omega_{t-1};\ \theta)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}p_{ij}\xi_{t-1|t-1}(i)f(r_t|\epsilon_t=j,\ \Omega_{t-1};\ \theta) \tag{19}$$

그러면,

$$\xi_{t|t}(j)=\frac{\sum_{i=1}^{2}p_{ij}\xi_{t-1|t-1}(i)f(r_t|\epsilon_t=j,\ \Omega_{t-1};\ \theta)}{f(r_t|\Omega_{t-1};\ \theta)} \tag{20}$$

가 되고, 우도함수는

$$\ln f(r_T,r_{T-1},\ \cdots,\ r_1|r_0;\ \theta)=\sum_{t=1}^{T}\ln f(r_t|\Omega_{t-1};\ \theta) \tag{21}$$

이다. 따라서, 이를 최대화하는 방향으로 모수 집합(θ)를 구한다.

2.2.2 옵션 시장가 정보 이용 시

유럽형 옵션의 시장가 정보를 이용하는 방법을 사용하기 위해서 Two-state RSBS 모형의 트리(Tree) 방법을 이용할 수 있는데, 이와 관련하여 효과적인 방법론이 이미 연구되어 있다. Two-state RSBS 모형의 트리방법을 소개하기에 앞서, 우선 일반적인 트리방법들 중 이항(Binomial) 트리법에 대한 이해가 필요하다.

이항 트리법은 블랙-숄즈 모형 하에서 옵션가격을 계산하기 위하여 블랙-숄즈 모형의 근사형태를 구하는 방법론으로서 이에 여러 형태가 있으나, 주로 Cox *et al.*에 의해 제안된 형태가 사용된다(Cox *et al.*, 1998). 블랙-숄즈 모형에서 시간 t에서 다음 단위 시간 Δt동안 기초자산의 로그수익률이 다음과 같은 정규분포를 따르게 된다.

$$r_t \sim N(\mu\Delta t,\ \sigma^2\Delta t) \tag{22}$$

위 식에서 μ와 σ는 상수이다. 이 때, 이항 트리법은 각 node에서 다음 단위 시간(Δt) 동안 갖게 되는 수익률의 정규분포를 이항분포를 이용하여 근사하는 방법이며, 단위 시간을 매우 짧게 한다면 이항분포에 의해 만들어진 마지막 시간에서의 node들의 수익률 분포가 정규분포에 점점 가깝게 되는 원리를 이용한 방법이다. 따라서 각 node에서 로그수익률의 상승확률을 π라고 하고, 상승률을 δ라고 할 때,

$$\pi e^{\delta} + (1-\pi)e^{-\delta} = e^{\mu\Delta t} \tag{23}$$

$$\pi\delta^2 + (1-\pi)(-\delta)^2 - \mu^2(\Delta t)^2 = \sigma^2\Delta t \tag{24}$$

와 같은 관계를 갖으며, 이를 풀면

$$\pi = \frac{e^{\mu\Delta t} - e^{-\delta}}{e^{\delta} - e^{-\delta}},\ \ \delta = \sqrt{\mu^2(\Delta t)^2 + \sigma^2\Delta t} \tag{25}$$

가 된다.

한편, Two-state RSBS에서는 각 국면에서 이항 트리법을 이용하는 경우를 손쉽게 생각해 볼 수 있을 것이다. 그러나 단순하게 이항 트리법을 사용하면 단위 시간의 개수가 n개일 때 전체적으로 처리해야 할 계산 node의 개수가 n^2개로 급격하게 늘어나는 문제점이 발생한다. 이런 문제점을 극복하기 위하여 오항(Pentanomial) 트리법을 사용할 수 있다(Bollen, 1998). 오항 트리법은 각 국면의 블랙-숄즈 모형을 삼항(Trinomial) 트리법으로 근사시키되, 삼항 트리의 가운데 가지(mid-branch)를 공유하는 방식으로 구성하고, 높은 변동성을 가진 국면의 기초자산 로그수익률의 상승률과 낮은 변동성을 가진 국면의 기초자산 로그수익률의 상승률의 비를 2대 1로 조정한다. 이와 같은 방식으로 수정된 오항 트리는 계산에 사용될 각 node를 공유하게 하는 재결합(Recombining) 성질을 가지게 되어 전체적으로 계산 node의 수를 크게 줄일 수 있다. 구체적으로는 단위 시간의 개수가 n개일 때 계산 node의 개수는 4n-3이 된다. 이항 트리법에서와 같이 로그수익률의 상승(u), 유지(m), 하락(d)에 대한 확률과 상승률을 구해보자. 높은 변동성을 가진 국면(국면 1)의 상승, 유지, 하락에 대한 확률을 $\pi_{1,u}$, $\pi_{1,m}$, $\pi_{1,d}$, 상승률을 δ_1, 낮은 변동성을 가진 국면(국면 2)에 대해서는 각각 $\pi_{2,u}$, $\pi_{2,m}$, $\pi_{2,d}$, δ_2라고 정의하자. 우선 식 (25)를 이용하여 δ_1와 δ_2를 계산하여 $\delta_1 \geq 2\delta_2$ 혹은 $\delta_1 < 2\delta_2$를 판단한다. $\delta_1 \geq 2\delta_2$인 경우에는 높은 변동성을 가진 국면에 대해서는

$$\pi_{1,u} = \frac{e^{\mu_1\Delta t} - e^{-\delta_1}}{e^{\delta_1} - e^{-\delta_1}},\ \delta_1 = \sqrt{\mu_1^2(\Delta t)^2 + \sigma_1^2\Delta t} \tag{26}$$

$$\pi_{1,m} = 0,\ \pi_{1,d} = 1 - \pi_{1,u} \tag{27}$$

그리고, 낮은 변동성을 가진 국면에 대해서는 $\hat{\delta_2} = \delta_1/2$라 할 때,

$$\pi_{2,u}e^{\hat{\delta_2}} + \pi_{2,m}e^0 + \pi_{2,d}e^{-\hat{\delta_2}} = e^{\mu_2\Delta t} \tag{28}$$

$$\pi_{2,u}\hat{\delta_2}^2 + \pi_{2,d}(-\hat{\delta_2})^2 - \mu_2^2(\Delta t)^2 = \sigma_2^2\Delta t \tag{29}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \pi_{2,u} &= \frac{e^{\mu_2\Delta t} - e^{-\hat{\delta_2}} - \pi_{2,m}\left(1 - e^{-\hat{\delta_2}}\right)}{e^{\hat{\delta_2}} - e^{-\hat{\delta_2}}} \\ \pi_{2,m} &= 1 - \left(\frac{\delta_2}{\hat{\delta_2}}\right)^2 \\ \pi_{2,d} &= 1 - \pi_{2,m} - \pi_{2,u} \end{aligned} \tag{30}$$

와 같이 각 확률과 상승률을 계산한다. 그리고, $\delta_1 < 2\delta_2$인 경우에는 $\delta_1 > 2\delta_2$인 경우와는 반대로($\hat{\delta_1} = 2\delta_2$)

$$\pi_{2,u} = \frac{e^{\mu_2\Delta t} - e^{-\delta_2}}{e^{\delta_2} - e^{-\delta_2}},\ \delta_2 = \sqrt{\mu_2^2(\Delta t)^2 + \sigma_2^2\Delta t} \tag{31}$$

$$\pi_{2,m} = 0,\ \pi_{2,d} = 1 - \pi_{2,u} \tag{32}$$

$$\pi_{1,u}e^{\hat{\delta_1}} + \pi_{1,m}e^0 + \pi_{1,d}e^{-\hat{\delta_1}} = e^{\mu_1\Delta t} \tag{33}$$

$$\pi_{1,u}\hat{\delta_1}^2 + \pi_{1,d}(-\hat{\delta_1})^2 - \mu_1^2(\Delta t)^2 = \sigma_1^2\Delta t \tag{34}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \pi_{1,u} &= \frac{e^{\mu_1\Delta t} - e^{-\hat{\delta_1}} - \pi_{1,m}\left(1 - e^{-\hat{\delta_1}}\right)}{e^{\hat{\delta_1}} - e^{-\hat{\delta_1}}} \\ \pi_{1,m} &= 1 - \left(\frac{\delta_1}{\hat{\delta_1}}\right)^2 \\ \pi_{1,d} &= 1 - \pi_{1,m} - \pi_{1,u} \end{aligned} \tag{35}$$

와 같이 된다. 위와 같은 과정은 모두 각 계산 node에서의 기초자산 분포를 만들기 위한 과정이다. 유럽형 옵션의 계산을 위해서는 위험중립 가치평가(Risk-neutral Valuation)를 이용해야 하므로, 위의 과정에서 $\mu_1 = \mu_2 = r_f(r_f$: 무위험수익률)로 놓고 기초자산 분포를 구해야 한다. 그 후 오항 트리의 마지막 시점(T)부터 시작시점까지 역으로 옵션의 가격을 계산해 나간다. 즉, 잔존만기 T의 기초자산 분포에서는 다음과 같은 방법으로 옵션의 가격(콜옵션의 경우, 행사가격 K라 할 때)을 계산한다.

$$E[C(T,\ i)] = Max(S_{T,i} - K,\ 0),\ i \in \{1,\ 2\}$$

시점 t(t < T)에서는($j \neq i$)

$$E[C(t,\ i)] = e^{-r_f \Delta t}\{p_{ii}E[C(t+1,\ i)] + p_{ij}E[C(t+1,\ j)]\}$$
(단, $p_{ii} + p_{ij} = 1$)

t = 0일 때, 현재 시점의 옵션의 가격이 계산된다. 따라서 유럽형 옵션 가격에서 역으로 구할 수 있는 모수의 집합은 $\theta = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ p_{12},\ p_{21}\}$이며, 이를 계산하기 위하여 식 (2)에서 설명된 Penalty 함수를 사용하여

$$\theta^* = \arg\min_\theta \left[\sum_{i=1}^{N} \left[C_i^{mkt} - C^{theo}(S,\ K_i,\ T_i,\ \theta) \right]^2 + \beta \Psi(\theta) \right] \quad (36)$$

와 같은 목적함수를 구성한다(β는 가중치를 의미한다). 식 (36)의 Penalty 함수($\Psi(\theta)$)로 기초자산의 시계열 정보를 이용한다. 즉, 기초자산의 로그수익률 시계열에서 평균과 분산을 구하고, 이 값들과 Two-state RSBS 모형에서 이론적으로 구할 수 있는 수익률의 평균과 분산의 차에 관한 함수를 만들어 사용한다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Psi(\theta) = \left\{ \left|\mu_{theo}(\theta) - \mu_{emp}\right|^2 + \left|\sigma^2_{theo}(\theta) - \sigma^2_{emp}\right|^2 \right\} \quad (37)$$

($\mu_{theo}(\theta)$: Two-state RSBS 모형에서 수익률의 평균, μ_{emp} : 시계열 정보에서 계산된 수익률 평균, $\sigma^2_{theo}(\theta)$: Two-state RSBS 모형에서 수익률의 분산, σ^2_{emp} : 시계열 정보에서 계산된 수익률 분산)

식 (37)의 $\Psi(\theta)$는 단위가 없는(Dimensionless) 값이므로, 식 (36)에서 사용되는 콜옵션의 값을 기초자산 가격으로 나눠 단위가 없는 값으로 전처리하여 사용한다.

3. 실험 결과

가상의 기초자산 데이터를 만들기 위해서 각 모형에 맞는 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation, MCS)을 실시한다. Two-state RSBS 모형의 경우, 다음과 같은 식 (9)의 이산화 모형을 이용하여 MCS을 수행한다.

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left\{ \left(\mu_{\epsilon_t} - 0.5\sigma^2_{\epsilon_t}\right)\Delta t + \sigma_{\epsilon_t}\sqrt{\Delta t}\, W_t \right\}$$

위 식에서 W_t는 표준정규분포에서 난수를 발생시켜 그 값을 사용하고, 특히 $\epsilon_t = i$일 때 0과 1사이의 균일분포 난수 v를 생성하여 국면전환 확률인 $p_{ij}(j \neq i)$보다 작으면 $\epsilon_{t+\Delta t} = j$가 되도록 한다. 한편, BS 모형은

$$\ln(S_{t+\Delta t}) = \ln S_t + (\mu - 0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, W_t,$$

를 이용하며, 헤스턴 모형은

$$\ln(S_{t+\Delta t}) = \ln S_t + (\mu - 0.5 v_t)\Delta t + \sqrt{v_t \Delta t}\, W_{1,\ t}$$
$$v_t = v_{t-\Delta t} + (\omega - \kappa v_{t-\Delta t})\Delta t + \xi\sqrt{v_{t-\Delta t}\Delta t}\, W_{2,\ t}$$
$$W_{2,t} = \rho W_{1,t} + \sqrt{1-\rho^2}\, \widetilde{W_{2,\ t}},\ \langle W_1, \widetilde{W_{2,\ t}} \rangle = 0$$

(단, $2\omega \geq \xi^2,\ \kappa > 0,\ \xi > 0,\ -1 \leq \rho \leq 1$)
를 이용한다(Heston, 1993). 그리고, BS 모형과 헤스턴 모형의 평균과 분산은 각각 식 (38)과 식 (39)과 같이 계산된다 (Andersen, 2007; Das *et al.*, 2007).

BS 모형 : $E[\ln S_t] = \ln S_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)t,\ Var[\ln S_t] = \sigma^2 t$

헤스턴 모형:

$$E[\ln S_t] = \ln S_0 + \mu t + \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\omega}{\kappa} - v_0\right)(1 - e^{-\kappa t}) - \frac{1}{2}\kappa t \quad (38)$$

$$Var[\ln S_t] = \frac{\omega}{8\kappa^4}\Omega_1 + \frac{v_0}{4\kappa^3}\Omega_2 \quad (39)$$

$$\Omega_1 = e^{-2\kappa t}\xi^2 + 4e^{-\kappa t}\left((1+\kappa t)\xi^2 - 2\rho\kappa\xi(2+\kappa t) + 2\kappa^2\right) + (2\kappa t - 5)\xi^2 - 8\rho\kappa\xi(\kappa t - 2) + 8\kappa^2(\kappa t - 1)$$
$$\Omega_2 = -e^{-2\kappa t}\xi^2 + 2e^{-\kappa t}\left(-\kappa t\xi^2 + 2\rho\kappa\xi(1+\kappa t) - 2\kappa^2\right) + \xi^2 - 4\rho\kappa\xi + 4\kappa^2$$

위험중립 하에서 각 모형에 대하여 가상의 기초자산 데이터를 만들기 위한 모수 설정, 유럽형 콜옵션의 가격 계산을 위한 행사가격 및 잔존만기 설정은 <Table 1>과 같이 한다. 1년에 거래일이 250일 있음을 가정하여 일별 데이터를 만들고, 시뮬레이션 회수는 20,000번으로 설정하였으며, 실험 결과는 <Table 2>와 같다.

<Table 2>의 결과를 보면, 우선 Two-state RSBS 모형과 BS 모형에서 추정된 모수값의 결과($\theta^*_{rsbs},\ \theta^*_{bs}$)가 설정된 모수 참값($\theta_{true,rsbs},\ \theta_{true,bs}$)과 동일하게 나와 모수 정합성 측면에서 다르게 추정된 헤스턴 모형보다는 좋다는 결론을 내릴 수 있지만, 헤스턴 모형의 모수 추정 시 초기 설정된 모수 혹은 최적화 목적함수에 의해 발생하는 문제일 수도 있기 때문에 이를 알아보기 위하여 초기 설정 모수값($\theta_{00,heston},\ \theta_{01,heston}$)과 가중치$\beta$를 바꿔가며 추가실험을 실시하였으며, 그 결과는 <Table 3>과 같다. <Table 3>의 결과에서도 마찬가지로 초기 설정 모수값과 β를 바꿔도 가며 실험하였으나 헤스턴 모형은 여전히 모수 참값을 추정해내지 못하였다. 이런 결과는 Javaheri가 언급한 기존의 연구 결과와 일치한다(Javaheri, 2005). 따라서, Two-state RSBS 모형과 BS 모형이 모수 정합성 측면에서 더 우수하

Table 1. True Parameter Set and Option Condition for Each Underlying Process Model(S_0 = 100, K: Strike Price, T: Time to Expiry, r_f : Risk-free Interest Rate)

Model	True Parameter Sets	Option Conditions(K/S0, T(year))
Two-state RSBS	$\theta_{true,rsbs}=(r_f,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ p_{12},\ p_{21})$ $=(0.04,\ 0.04,\ 0.04,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.1,\ 0.1)$	$K/S_0=\{0.8,\ 0.9,\ 1.0,1.\ 1,\ 1.2\}$ $T\ =\{0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5\}$
Heston	$\theta_{true,heston}=(r_f,\ \mu,\ \omega,\ \kappa,\ \xi,\ \rho,\ v_0)$ $=(0.00,\ 0.00,\ 0.15,\ 10.0,\ 0.03,\ -0.5,\ 0.01)$	
BS	$\theta_{true,bs}=(r_f,\ \mu,\ \sigma)$ $=(0.02,\ 0.02,\ 0.1)$	

Table 2. The Optimized Parameter Set from the Initial Parameter Set Given for Each Underlying Process Model(r_f : Risk-free Interest Rate, $\beta=0.05$)

Model	Initial Parameter Set	Optimized Parameter Set
Two-state RSBS	$\theta_{0,rsbs}=(r_f,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ p_{12},\ p_{21})$ $=(0.04,\ 0.04,\ 0.04,\ 0.175,\ 0.375,\ 0.075,\ 0.07)$	$\theta^*_{rsbs}=(r_f,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ p_{12},\ p_{21})$ $=(0.04,\ 0.04,\ 0.04,\ 0.2,0.\ 4,0.\ 1,0.1)$
Heston	$\theta_{0,heston}=(r_f,\ \mu,\ \omega,\ \kappa,\ \xi,\ \rho,\ v_0)$ $=(0.00,\ 0.00,\ 0.149,\ 9.9,\ 0.029,\ -0.49,\ 0.009)$	$\theta^*_{heston}=(r_f,\ \mu,\ \omega,\ \kappa,\ \xi,\ \rho,\ v_0)$ $=(0.00,\ 0.00,\ 0.1486,\ 9.9001,\ 0.0304,\ -0.4901,$
BS	$\theta_{0,bs}=(r_f,\ \mu,\ \sigma)=(0.02,\ 0.02,\ 0.01)$	$\theta^*_{bs}=(r_f,\ \mu,\ \sigma)=(0.02,\ 0.02,\ 0.1)$

Table 3. Optimized parameter sets according as the weight β decreases from one half to zero when the given parameter sets are as follows:
$\theta_{00,\ heston}=(0.00,\ 0.00,\ 0.149,\ 9.9,\ 0.029,\ -0.49,\ 0.009)$, $\theta_{01,heston}=(0.00,\ 0.00,\ 0.14,9.\ 0,0.02,\ -0.4,\ 0.005)$

$\theta_{00,heston}$		$\theta_{01,\ heston}$	
β	$\theta^*_{00,heston}$	β	$\theta^*_{01,\ heston}$
0.5	$(0.00,\ 0.00,\ 0.4034,\ 27.734,\ 0.0736,\ -0.4601,\ 0.006)$	0.5	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3534,\ 24.248,\ 0.0746,\ -0.4042,\ 0.007)$
0.4	$(0.00,\ 0.00,\ 0.4026,\ 27.678,\ 0.0722,\ -0.4679,\ 0.006)$	0.4	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3523,\ 24.175,\ 0.0709,\ -0.4241,\ 0.007)$
0.3	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1593,\ 10.670,\ 0.0108,\ -0.4881,\ 0.0099)$	0.3	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3506,\ 24.056,\ 0.0656,\ -0.4557,\ 0.007)$
0.2	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3986,\ 27.394,\ 0.0692,\ -0.4834,\ 0.006)$	0.2	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1705,\ 11.\ 3486,\ 0.0014,\ -0.4157,\ 0.009)$
0.1	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3987,\ 26.780,\ 0.066,\ -0.4967,\ 0.006)$	0.1	$(0.00,\ 0.00,\ 0.3353,\ 22.987,\ 0.0477,\ -0.6016,\ 0.007)$
0.05	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1486,\ 9.9,\ 0.0304,\ -0.4901,\ 0.01)$	0.05	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1358,\ 9.0,\ 0.0349,\ -0.4007,\ 0.01)$
0.01	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1486,\ 9.9,\ 0.0304,\ -0.4901,\ 0.01)$	0.01	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1358,\ 9.0,0.\ 0349,\ -0.4007,\ 0.01)$
0	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1486,\ 9.9,\ 0.0304,\ -0.4901,\ 0.01)$	0	$(0.00,\ 0.00,\ 0.1358,\ 9.0,0.\ 0349,\ -0.4007,\ 0.01)$

다는 결론을 내릴 수 있다. 그러나, 이미 알려진 바와 같이 BS 모형은 내재적으로 시장에서 관찰되는 내재변동성 스마일(Implied Volatility Smile) 현상을 만족시킬 수 없는 모형이기 때문에, 내재변동성 스마일(Implied Vol-Smile) 현상까지 만족시키는 Two-state RSBS 모형이 비교 모형 중에서는 가장 우수한 모형임을 알 수 있다(Bollen, 1998; Hull, 2009). 한편, 헤스턴 모형에서 <Table 2>와 <Table 3>의 결과는 헤스턴 모형이 내재적으로 기초자산 가격 변화가 모수에 대하여 가진 민감도가 낮은 데에서 비롯되는 것으로 판단된다. 이를 알아보기 위하여 헤스턴 모형과 Two-state RSBS 모형 각각에서 일부 모수를 바꾼다. 그렇게 하여 만든 두 가지 조건에서 MCS를 실시하여 가상의 기초자산 가격 자연로그값 만들고, 이들의 RMSE 비율을 구하는 실험을 추가로 실시하였다. 그 결과는 <Table 4>~<Table 6>에 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 금융 기초자산의 모수적 모형의 모수 추정에 대한 두 가지 방법을 언급하였으며, 모수 정합성 측면에서 순수 확산 모형 중 어떤 모형이 더 적절한지에 대한 제언을 하였

Table 4. Sensitivity of Log Underlying Price to Parameters in Stochastic Volatility Part of the Heston Model ($S_0=100, \mu=0.03, \Delta t=1/250, v_0=0.04$)

Parameter	Value	RMSE of Ratio
(ω, κ)	(0.04, 0.5)/(0.06, 0.725)	0.0012
(ξ, ρ)	(0.09, 0.5)/(0.04, -0.5)	0.0013

RMSE of Ratio Between Parameter θ_1 and Parameter

$\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[1-\frac{\ln S_t(\theta_1)}{\ln S_t(\theta_2)}\right]^2}$

$\ln S_t(\theta)$: Log Underlying Price Generated by Parameter Set θ

Table 5. Sensitivity of Log Underlying Price of the Heston Model(We use the true parameter set($\theta_{true,heston}$) and the parameter set($\theta^*_{00,heston}$) optimized from the condition $\beta=0.2$ of Table 4) ($S_0=100,\ \mu=0.03,\ \Delta t=1/250$)

Parameter sets to be compared	RMSE of Ratio
$\theta^*_{00,heston}/\theta_{true,heston}$	7.0464×10^{-4}

Table 6. Sensitivity of Log Underlying Price to the Transition Probability in the Two-state RSBS Model($S_0=100$, $\mu_1=0.03,\ \mu_2=0.03,\ \sigma_1=0.2,\ \sigma_2=0.23,\ \Delta t=1/250$)

Parameter Set	Value	RMSE of Ratio
(p_{12}, p_{21})	(0.01, 0.01)/(0.03, 0.03)	0.0185

다. 이를 위하여, 가상의 데이터를 시뮬레이션하여 기존에 가장 많이 사용된 모형이었던 BS 모형, 헤스턴 모형을 Two-state RSBS 모형과 비교하였다. Two-state RSBS 모형이 앞의 두 모형보다 더 적절하다는 결론을 내릴 수 있었다. 구체적인 결과로는 Two-state RSBS 모형과 BS 모형은 완전한 정합성을 보였으나, 헤스턴 모형은 그렇지 않았다. 이는 헤스턴 모형은 내재적으로 기초자산 가격 변화가 추계적 변동성 부분의 모수에 대한 민감도가 낮기 때문인 것으로 분석되었다. 한편, BS 모형은 Two-state RSBS 모형이나 헤스턴 모형과는 달리 내재변동성 스마일 현상을 반영하지 못한다. 따라서, 내재변동성 스마일 현상도 반영하는 Two-state RSBS 모형이 모수 정합성 측면에서 가장 적합한 모형으로 볼 수 있다.

참고문헌

Andersen, L. B. G. (2007), Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model, Working paper, *Social Science Research Network*.

Black, F. and Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Politics and Economics*, **81**, 637-654.

Bollen, N. P. B. (1998), Valuing Options in Regime-Switching Models, *Journal of Derivatives*, **6**, 38-49.

Cont, R. and Tankov, P. (2004), *Financial Modeling with Jump Processes*, Chapman and Hall/CRC, New York.

Cox, J., Ross, S., and Rubinstein M. (1979), Option Pricing : A Simplied Approach, *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263.

Das, S. R. and Sundaram, R. K. (2007), Higher-order Moments in Modeling Asset Price Processes in Finance, Working paper, *National Bureau of Economic Research*.

Fuh, C. D. and Wang, R. H. (2002), Option pricing in a Black-Scholes with Markov Switching, Working Paper, *Institute of Statistical Science*, Taiwan.

Hamilton, J. D. (1988), Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime : An Investigation of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **12**, 385-423.

Hamilton, J. D. (1989), A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, **57**, 357-384.

Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey.

Heston, S. (1993), A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.

Hull, J. C. (2009), *Option, Futures and Other Derivatives*, 7th edition, Prentice Hall, New Jersey.

Javaheri, A. (2005), *Inside Volatility Arbitrage* : *the Secrets of Skewness*, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.

Kim, C. J. (1994), Dynamic Linear Models with Markov-Switching, *Journal of Econometrics*, **60**, 1-22.

Neftci, S. (2000), *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, 2th edition, Academic Press, New York.

Ross, S. M. (2000), *Introduction to Probability Models*. Academic Press, London.

Timmermann, A. (2000), Moments of Markov Switching Models, *Journal of Econometrics*, **96**, 75-111.

Yao, D. D., Zhan, Q., and Zhou, X. Y. (2006), *A Regime-switching Model for European Options, appearing in Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory : Applications in Financial Engineering, Queueing Networks, and Manufacturing Systems*, Springer, New York.