韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 3호, 2010. 9. 709-730

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 709-730

무리함수의 가역성에 대한 학생들의 오개념 분석

이 기 석 (한국교원대학교)
이 두 호 (의성공업고등학교)

본 연구에서 함수를 어려워하는 원인이 함수의 가역성에 기인하는지 살펴보고자 가역적 사고가 요구되는 무리함수의 개념과 가역성을 분석하였다. 함수와 관련하여 저학년에서 형성된 개념이 불균형 상태로 고착화되어 있다. 하위권 학생들의 시각화, 기호 이해, 특히 가역적 사고 능력이 부족하여 오류 현상을 보이고 있다. 저학년부터 생활 주변의 가역적인 사고를 요하는 내용을 다루지만, 학생들은 가역성이 내포된 함수 내용을 어려운 대상으로만 간주하고 인지 구조의 조절 과정을 의도적으로 회피하거나, 인출하여도 연결성이 부족하고 부정확한 개념으로 응답하고, 특히 가역성이 내포된 문제에 대하여 반응율과 정답율이 낮으며 다양한 오류 현상이 나타났다.

I. 서 론

개념은 사고의 단위이며, 개념적 사고는 현대 수학에서 강조되고 있으며, 수학적으로 사고한다는 것은 개념을 파악하여 수학적인 안목을 갖고 사고한다는 의미로 볼 수 있다(우정호, 1999). 사고한다는 행위는 머릿속의 조작활동으로 볼 수 있으며, 함수는 이러한 조작활동의 도구 역할을 한다. 함수 개념은 현대 수학의 기본적 아이디어로서 모든 영역에 산재해 있지만, 하위 개념이 많으며 계층 구조가 복잡하여 숙달하기에 가장 어려운 개념이다(Tall, 2003, pp.187-206). 그러나 함수는 추상적인 개념으로 교육과정 전체의 공통된 주제일 뿐만아니라 현대 수학 전체를 조직하는 도구이며(교육인적자원부, 2007), 함수적 사고는 대수와 기하를 연결해주는 등 수학적 사고 전체에 중요한 역할을 하므로, Klein은 함수 개념이 학교수학의 중심 관념이 되어야 하며 함수적 사고 습관이 형성되기를 주장하였다(우정호, 1999).

그러나 많은 학생들이 함수의 개념 정의를 이해하지 못한 상태이며 진술 능력이 빈약하므로, 그래프, 문장, 화살표 및 다이어그램 등 다양한 방법을 동원할 필요가 있으며(조완영 · 양재식, 2003), 단순한 수식으로 제시된 함수에 대하여 학생들은 함수적 사고를 이해하기보다 $y=f(x)$ 라는 독립된 공식으로 이해하는 경향이 있다(Vinner, 1983 재인용; Sajka, 2003). 상황의 종속성에서 유래된 함수 개념은 입력과 출력의 관계로 재해석할 수 있는 역함수에 대하여 x 와 y 를 바꾸어 대수적으로만 해

* 접수일(2010년 8월 10일), 심사(수정)일(2010년 9월 6일), 게재확정일자(2010년 9월 15일)
* ZDM 분류 : I12
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 무리함수, 가역성, 오류 유형, 조절

결하려고 하며, 정의역, 공역과 치역을 고려하지 못하고 역함수의 그래프를 그리는 오류를 범한다(박정선, 2005; 김인희, 2009).

그래프는 시각적인 요소로 함수의 상호 종속성을 설명하는데 유용한 도구이며, 함수는 가역성이 내포된 군과 체 등 다양한 수학적 구조의 동형임을 판정하는 도구로 쓰이기도 한다(NCTM, 1998, pp.264-267). 함수는 다양한 하위 개념들로 이루어지는 통합 개념으로 이해하기 어려우며, 학생들의 수학교과 선호도 조사(김영국 외, 2000)에서 학년과 함수의 이해도는 반비례하는 경향을 보이며, 함수 영역의 선호도가 특히 낮은 편이다. 2000년 대입수학능력고사의 득점율 40% 미만인 경우, 언어영역 10.4%, 외국어 23.5%인데 반하여 수리 영역은 40%로 매우 높게 나타났다. 즉, 타과목에 비하여 수학교과의 부진현상이 두드러짐을 보여준다. 2002년도 전국연합학력평가 분석 자료집(서울시교육청, 2002)에 따르면, 함수 영역의 이해도와 정답율 또한 낮은 편이다.

함수에 관한 문제 해결에 있어서 일방향으로 해결해가는 문제가 있는 반면에 거꾸로 해결해야하는 문제를 고려할 수 있다. 함수의 합성과 역연산에 의하여 새로운 함수를 만들 수 있으며, 이와 같은 함수 사이의 연산은 함수 개념의 발달에서 중요한 자리를 차지하고 있다(Even, 1990 재인용). 함수를 투입과 산출의 관계로 파악할 때 투입량을 정의하고 산출량을 예측하는 것은 자연스러운 일이지만 산출량에 대하여 투입량을 역추적하는 것은 다변수 함수관계를 고려해야하므로 심리적인 어려움을 겪는다.

가역성은 수학적 구조에서 중요한 의미를 내포하고 있으며, 함수 단원에서 중요하게 다루어지고 있는 성질이다. 학생들은 함수 단원을 어려워하고 있으며, 그 원인 중의 하나가 함수의 가역성에 기인하는지 살펴볼 필요가 있다. 본고에서는 가역적 사고가 요구되는 학습내용을 어떻게 이해하는지 무리함수에 대하여 개념과 가역성 이해 정도를 분석하고자 한다.

Ⅱ. 문헌검토

1. 함수적 사고

수학적 지식과 사고 방법은 문명의 발달에 중요한 역할을 해왔듯이 지식 기반의 정보화 사회에서 수학적 사고는 한층 더 중시되고 있다. Polya는 수학은 지력을 증진시킨다고 하며, Pestalozzi에 의하면 수학 학습은 사고력 도야의 정신체조에 비유하며, 생각하면서 배우고 배우면서 생각하는 데 수학이 가장 적합한 교재라고 한다. '사고 교육'은 이와 같이 학교수학의 중요한 목표로 강조되고 있다(우정호, 1999; Polya, 2005; 교육인적자원부, 2007). NCTM은 모든 학생들이 배워야하는 공통적인 기반으로 '원리와 규준'을 제시하고 '의사소통'을 사고과정 규준의 하나로 수학적 사고를 중요하게 다루고 있다(NCTM, 2007).

'사고'는 '지식'이라는 도구를 사용하므로, 유용한 도구를 많이 보유할수록 보다 성공적인 사고를

거둘 수 있으며, 지식과 사고는 상호작용적이다. 공식을 확인할 정도를 넘어 사고를 통하여 지식을 터득하는 과정을 거치지 않으면 개념적 지식을 획득하기 쉽지 않다(황혜정, 2001). 수학교육 현대화 운동이 좌절된 원인의 하나로 논리주의와 형식주의에 기반하여 기성 지식의 표층만 강조되었으며, 진정한 사고 경험은 중시되지 않았다고 볼 수 있다(우정호, 2001).

수학적 사고력 함양은 수학교육의 주요 목적 중의 하나이며, 수학적 사고 능력을 발전시키기 위하여 수학적 사실을 정당화 또는 증명하도록 하며, 이와 관련되는 다양한 수학적 관계를 조작하여 반성적으로 사고하도록 하고 있다(교육인적자원부, 1997; 2007). Dubinsky는 반영적 추상화에 의한 수학적 사고 구성의 메커니즘으로 행동의 내면화, 조절, 일반화, 대상화, 가역성 등을 들고, 수학적 사고의 본질과 사고 구성의 어려움을 이러한 메카니즘으로 설명하려고 했다(Tall, 2003, pp.127-165).

함수는 독립변수와 종속변수 사이의 관계로 이해할 수 있으며 저학년에서 독립변수가 하나인 일차함수부터 다루어지며, 상황이 다양해질수록 변수 관계를 파악하기 힘들며 문장제 가운데 변수를 어떻게 대응시키는 것이 중요한 문제가 된다. 함수적 사고는 실생활의 변화의 종속성에 따라 한 변수가 변화하면 다른 한 변수가 어떻게 변화하는지 변수들 사이의 특성을 파악하여 식이나 그래프로 표상하고 이를 통하여 현상을 해석하고 예측할 수 있는 능력을 의미한다(NCTM, 1998, 2007). Klein은 함수적 사고가 대수와 기하를 연결해주고 응용수학을 포함하여 수학적 사고 전체 바탕의 핵심적 관점이기 때문에 학교수학의 중심관념이 되어야 한다고 주장한다. 새 수학 이후 Dirichlet-Boubaki식의 현대적 함수개념은 함수의 개념 발달에서 중요한 측면일 수 있는 함수의 도구적 의미가 감추어지므로, 다양한 현상을 통하여 종속 관계를 다룸으로써 함수 개념을 형식화할 수 있어야 하며, 학교수학에서 함수의 합성과 역의 의미를 중요하게 다룰 필요가 있다(정영옥, 1999).

2. 가역적 사고와 가역성

가. 가역적 사고

'사고'라 하는 것은 실제적 행동을 머리 속에서 생각으로 실행해 보는 행위라고 볼 수 있다. 어떤 행동이 그 반대의 행동을 예상하면서 이루어질지 또는 그렇지 않을 지는 그 행동이 지적인 행동인지 어떤지를 정하는 하나의 표식이 된다. 역행동을 고려한 행동은 가역성을 지닌 행동, 또는 가역적 행동이라고 할 수 있다. 이와 같은 행동이 머릿속에서 실행해 보는 행위로 사고화된 것을 가역적 사고라고 한다(김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식, 1997).

피아제에 의하면, 인지구조의 발달은 반영적 추상화에 기인하며 반영적 추상화에 의한 구성이 수학적 발달의 핵심이며, 사고 발달의 자연스러운 확장이다. 가역적 사고는 반영적 추상화의 구성 요소이며, 사고 과정이 내적으로 존재하면, 아동은 처음의 과정을 거꾸로 생각하는 새로운 과정을 구성한다. '거꾸로'라는 말은 반드시 원상태로 되돌린다는 의미는 아니며, INRC군의 관점에서 논의할 수 있으며, 뺄셈, 나눗셈, 방정식의 풀이, 역함수 구하기, 부등식의 증명, 극한 계산에서 ϵ에 대한 δ를

$\frac{\epsilon}{2\sqrt{M}}$ 로 찾는 것과 같은 거꾸로 사고하는 수학 활동으로 볼 수 있다(Tall, 2003, pp.135-141).

나. 가역성

구체적 조작의 집합 T의 각 조작 x 에 대하여 그 역조작이 존재하는 성질을 가역성(可逆性)이라고 한다(우정호, 1997; 김남희 외, 2006). 가역성(reversibility)이란 일단 변형된 상태가 반대 절차를 밟으면 다시 되돌아갈 수 있음을 뜻하며(Roll, 1970; 변영계, 2003), 가역성의 의미는 두 가지 상보적인 측면이 있다. 첫째, 전도(inversion)나 부정(negation)에 의한 것으로 수행된 조작을 취소하는 것이며, 이 경우 조작과 역조작의 결과는 영 조작, 곧 항등 조작이다. 둘째, 상반(reciprocity)에 의한 것으로 차이를 보정해 주는 것이다. 이 경우 조작과 상반조작의 결과 평형이 된다(O'bryan & MacArthur, 1969; Piaget, 1972; 황혜정 외, 2006; Ramful & Olive, 2008).

Piaget는 군이란 행동과 조작의 양식이 반영적 추상화에 의하여 형식화된 것으로 간주하며, 형식적 조작기의 사고양식이 군을 이룬다. 이 시기의 아동은 어떤 인과적인 상황에 당면하여 'p이면 q인가, p이면서 q가 아닌 경우가 있는가, 반대로 q이면 p인가, q이면서 p가 아닌 경우가 있는가?'와 같은 자문을 하며 이들 사이의 관계를 도해하면 INRC군, 즉 클라인의 사원군을 이룬다. 여기서 N과 R은 각각 행동을 취소하거나 무게를 더하거나 제거함으로써 새로운 평형을 취하는 행동의 가역성을 보여주며, 피아제는 변환 N과 R을 사고의 가역성이라고 하여 사고 변환의 결합성질과 함께 조작적 사고양식의 결정적 특징으로 보고 있다(우정호, 2001; Ginsburg, & Opper, 2006).

다. 함수의 가역성

실수의 덧셈구조가 양의 실수의 곱셈구조와 동형임은 함수 $f: R \rightarrow R^+, f(x) = e^x$ 를 통하여 설명된다. 두 실수의 덧셈이 두 함숫값의 곱셈으로 사상되며, 임의의 양의 실수에 대하여 그에 대응하는 실수가 단 하나 존재한다. 거꾸로 함수 $g: R^+ \rightarrow R$, $g(x) = \ln x$ 를 고려하면, 함수 f 의 역함수로서 군구조 $(R^+, \cdot)$ 와 $(R, +)$ 가 동형임을 보여준다. 함수는 투입과 산출을 거꾸로 실행함으로써 얻는 결과, 구조의 동형성을 설명하는 도구가 된다(Selden & Selden, 1992). 이와 같이 함수는 하나의 구조를 동형의 또다른 구조로 변환하거나, 역변환하여 관점을 변화시켜준다. 그러나 역함수와 역수, 입력과 출력을 혼동하는 경우가 적지 않으며 대수적인 표현을 해석하지만 시각적인 자료를 해석하지 못하는 경우도 일어나며(Engelke, Oehrtman & Carson, 2005), 개념적으로 그리고 인지적으로 함수의 다양한 표현을 사용하는 경험을 하지 않으면 함수의 가역적인 성질을 이해하기 어렵다(Bayazit & Gray, 2004).

<표 II-1> 2002 전국연합학력평가 분석 자료(고2 인문계열 일부)

문항	대칭·평행이동	합성함수	일대일대응	무리함수·역함수	함수값과 역함수값	분수함수의 대칭성	함수의 그래프	평균
배점	2	3	3	2	2	2	3	2.43
정답율(%)	35.29	19.74	24.10	20.39	44.60	10.96	18.26	24.76

<표 II-2> 전국연합학력평가 고2 수리 나형(최근 5회)

시행월	'07년 6월	'07년 11월	'08년 6월	'08년 11월	'09년 6월	평균
평균(원점수)	27.20	28.92	26.91	29.66	24.36	27.41

변수를 보는 관점을 달리하면 역함수를 알 수 있게 된다. 2002년도 전국연합학력평가의 문항 분석 중 가역적 사고가 요구되는 일부 문항을 보면, <표 II-1>과 같이 정답율이 24.76%이며, 1학년 과정의 77문항에 대한 전체 평균 32.81%에 비하여 상대적으로 낮으며(서울시, 2002), 최근 5회 전국연합학력평가 결과를 보아도 역함수 관련 문항을 다소 어려워함을 볼 수 있다. 수학 학습에서 가역적 사고가 요구되는 문제에 대하여 심리적으로 어렵다는 것은 교수·학습에서 가역성이 내포되는 학습 주제는 불균형을 자주 일으킬 것으로 예측된다. INRC군처럼 가환군을 표를 이용하면 역원을 구하거나 연산 또는 역연산의 결과를 쉽게 구할 수 있으며, 정의역과 치역의 원소는 연산과 역연산 결과로 알 수 있으며, 함수의 가역성 획득에 표나 그림 등 다양한 방법을 사용할 필요가 있다.

III. 연구방법

1. 연구 대상 선정 배경

본 연구는 경북 소재 A고등학교 2학년 각반 30명으로 편성된 인문계열 4개 학급과 자연계열 2개 학급 중 인문계열의 2개 학급과 B고등학교 1학년 각반 25명으로 편성된 5개 학급 중에서 2개 학급을 대상으로 선정하였다. 1,2학년 각반 동질집단으로 영어와 수학 교과의 수준별 이동수업을 실시하였다. 연구 대상 학급은 '상하'반 중 '하'반 학생들로 구성되었다.

하위권으로 선정한 이유는 수학은 상하 위계적으로 단원이 구성되어 있으며 학생들은 수학교과를 전반적으로 어려워하는 경향이 있으며, 특히 하위권 학생들의 수학적 사고 능력을 알아보는 것은 우수학생과 부진학생들의 이질 학급을 편성할 때 또는 학급내 수준별 수업을 진행할 때 유용한 발문 자료로 사용할 수 있고, 실제적 발달 수준으로 상승시키기 위한 기초 자료로 활용할 수 있다는 점에서 이들을 연구 대상으로 선정하였다. 1학년을 연구 대상으로 선정한 이유는 함수 단원을 배운지 1개월 정도 경과하여 학습한 내용을 어느 정도 인출할 능력이 있다고 판단하였으며, 2학년을 선정한 이유는 학습한 후 1년 정도 경과한 상태에서 함수의 개념 정의의 인출과 적용 능력을 어느 정도 갖

추고 있는지 측정하고자 선정하였다.

2. 검사도구

본 검사에 사용된 문제는 고등학교 1학년 함수 단원의 이해 정도를 측정하기 위하여 00고등학교에서 2006~2008년간 수행평가를 실시하였던 문항 중 가역성과 관련된 '무리함수'의 문항을 선택한 후, 일부 수정·보완하여 본 검사에 이용하였다.

수정된 '2'번은 대칭이동 성분의 부호를 서로 반대로 수정하였고, '4'번은 숫자와 문자의 부호를 반대로 했을 경우 어떤 반응을 하는지 알아보고자 b의 부호를 반대로 수정하였으며, 보완된 '3'번은 대칭성을 이용하여 역함수의 그래프를 시각적으로 표현할 수 있는지 알아보고자 '좌표평면'을 추가로 제시하였으며, 5번의 문항 '(1)'은 "일대일 대응이 되는 이유를 쓰시오"에서 오류 원인을 알아보기 위하여 일대일 대응이 되는지와 안되면 반례를 들도록 하였으며, '(2)'는 "역함수를 구하시오"에서 역함수가 존재하는 이유를 쓰고 존재하지 않는다면 그 반례를 들도록 하여 사고의 정당화 또는 오개념이 형성되는 과정을 알아보고자 보완하였다. 지필 검사의 특징은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 무리함수의 가역성에 대한 문항별 특징

문항		특징
1. 정의역	(1), (2) 정의역 구하기	x의 계수의 부호가 서로 반대임
2. 치역	(1), (2) 평행·대칭이동할 경우 치역 구하기	·평행·대칭이동 성분의 부호가 서로 반대임
3. 그래프 그리기	(1), (2) 무리함수와 역함수의 그래프 그리기	·대칭성을 이용하여 역함수의 그래프 그리기
4. 그래프 해석	·평행이동한 함수의 그래프를 보고 함수 구하기	·그래프보고 함수식 구하기('3'의 역순)
5. 역함수의 존재성	(1) 일대일 대응	·일대일 대응과 역함수 관계 설명
	(2) 역함수 존재	
6. 역함수의 성질	① 항등함수와 일대일 대응	·기본 개념 이해
	② $y=\sqrt{x}$ 의 역함수	
	③ 함수와 역함수의 대칭성	·역함수의 시각적 설명
	④ $(f\circ g^{-1})^{-1}=f^{-1}\circ g$	·역함수와 합성변환
	⑤ $(f^{-1})^{-1}=f$	

3. 연구 절차

2009년 12월 가역성과 관련된 무리함수 부분의 수행평가 문제를 지필검사로 선정하여 수정·보완하였다. 수정·보완된 지필검사를 2010년 1월 19일 1,2학년 각 2개반을 대상으로 보충수업 시간 동안

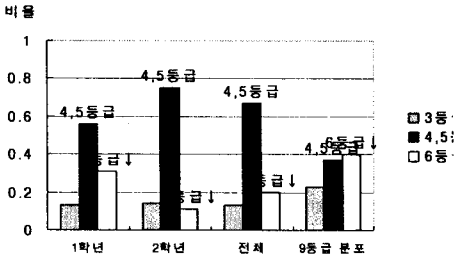
40분에 걸쳐 실시하였다. 본 검사의 감독은 수업을 진행한 교사가 감독하여 친숙한 분위기에서 학생들이 임할 수 있도록 진행하였으며, 동료나 교사의 상호 영향없이 독립적으로 수학적 사고력을 발휘할 수 있는 공간과 시간을 갖도록 하였다.

4. 자료 분석

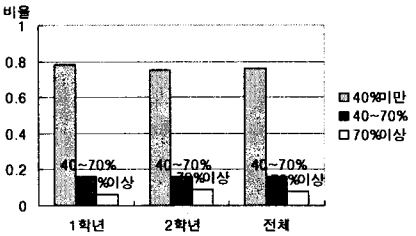
지필검사지를 회수한 결과 정답을 이중적으로 처리하는 등 판단하기 불가능한 답안지를 제외한 1학년 32명, 2학년 44명 총 76명의 답안지를 분석하였다. 답안지를 학년별 오답 유형별 분류하여 정리하였으며, 서술형 문제에 대하여 부분점수를 반영하였다.

Ⅳ. 결과분석

검사 대상 모두 무리함수 단원을 학습한 상태에서 지필검사를 실시하였다. 각 문항별 차이를 알아보기 위하여 t-검정을 실시하였으나 유의미한 차이가 없으므로 1,2학년 함께 문항별 조사하였다. 학생들의 등급분포는 3등급 이내 13%, 4,5등급 67%, 6등급 이하 20%로서 <그림 Ⅳ-1>과 같이 표준등급 분포에 비하여 3등급 이내 학생분포는 상당히 엷고 4,5등급에 지나치게 편중되어 있다. 학생들의 득점은 <그림 Ⅳ-2>와 같이 40% 미만이 약 76%, 40~70%가 16%, 70%이상이 8%로서 상위권보다 하위권에 치중된 부적 편포를 보이고 있다.



<그림 Ⅳ-1> 등급분포



<그림 Ⅳ-2> 득점분포

1. 정의역과 치역

무리함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$의 정의역이 무엇인지 묻는 질문에 약 43%만이 정답하였으며 34%가 오답, 24%가 응답하지 않았다. $f(x)=\sqrt{-x}$의 정답율은 37%, 오답율은 38% 그리고 무응답율이 25%로서 전자의 정답율 보다 낮았다. 오류 현상은 다음과 같다.

<표 Ⅳ-1> 정의역과 치역에 대한 응답율

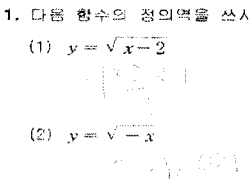
구분	정답율	오답율	무응답율
정의역1	43%	34%	24%
정의역2	37%	38%	25%
치역1	29%	39%	32%
치역2	25%	45%	30%

첫째, 등호를 생략하는 경향이 있다. 정의역이 무엇인지 묻는 문항의 정답율은 각각 43%, 37%이다. 두 문항 모두 등호 생략하거나 하나만 생략한 경우도 있다. <그림 Ⅳ-3>과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$ 의 정의역은 올바르게 답하였으나 $f(x)=\sqrt{-x}$ 의 정의역에서 등호를 생략한 경우가 다수 있었다. 수직선을 이등분하는 경우로 0을 기준으로 하면 $x \geq 0$, $x < 0$ 으로 나누며, 절대값 $|x|$ 는 $x \geq 0$ 와 $x < 0$ 의 경우로 나누며, 등호는 중복을 피하여 한 쪽에만 붙인다. 이러한 점이 정의역을 묻는 문제에서 동일한 현상일 것으로 생각하는 것은 학습의 간섭현상으로 볼 수 있다. 정의역을 구하는 문제에서 조건만을 쓰는 경우도 있었다.

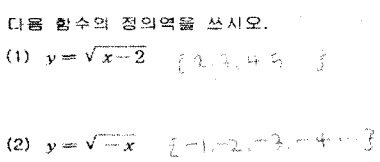
x 의 계수의 부호를 반대로 할 경우 혼동을 일으켜 오답을 하거나 무리함수의 정의역이 무엇인지에 대하여 개념 정의가 불명확하다. 무리함수에서 정의역이 명시되어 있지 않을 때에는 근호 안이 0 또는 양수가 되게 하는 실수 전체의 집합을 정의역을 본다. 근호 안의 값이 0이 되는 경우를 배제하여 양수만 그 정의역으로 하여 오류를 범하고 있다. 무리함수의 개념 정의에 취약함을 볼 수 있다. 상대적으로 상위집단 학생들의 개념 정의와 개념 이미지[1]는 일치하지만(이경화 · 신보미, 2005), 본고의 중위권이 대다수인 학생들의 정의역에 대한 개념 정의가 형성될 필요성이 있다.

둘째, 정의역을 원소로 나열하여 이산적으로 기술하고 있다. <그림 Ⅳ-4>와 같이 정의역의 원소를 정수 집합의 부분집합으로 간주하여 나열하고 있다. 중학교 1학년 함수 단원의 일차함수의 도입 과정에서 원소를 나열한 표를 사용하여 정비례와 반비례를 도입하여 함수 개념을 전개하고 있다. 정의역 역시 원소나열로 표현되는 유한집합을 이용하여 도입하고 있다. 정의역이 $X=\{-1,0,1\}$이고, 공역이 $Y=\{-2,-1,0,1,2\}$인 함수 $y=2x$ 의 치역을 구하는 것과 같이 유한집합에서 유한집합으로의 함수로서 도입하고 있다.

1) 개인의 마음속에 형성된 그림, 기호, 다이어그램, 그래프 등 표상들의 집합을 개념의 심상이라고 하며, 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를'개념 이미지(concept image)'라고 하며, 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를'개념 정의(concept definition)'라고 한다. 인지구조 안에 각각의 개념에 대하여 개념 정의를 위한 방과 개념 이미지를 위한 서로 다른 방이 존재한다고 가정하며 두 방은 제 각각 형성될 수도 있으며 상호작용이 있을 수 있다(박선화,1993).



<그림 Ⅳ-3> 등호를 생략



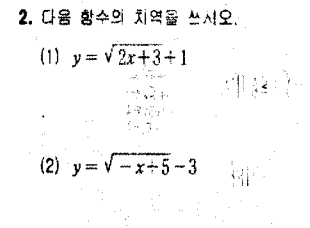
<그림 Ⅳ-4> 정의역의 원소 나열

일차함수의 그래프를 대수적으로 유한개의 순서쌍의 집합으로 정의한 후, 기하적으로는 유한집합의 이산적인 그래프에서 무한집합의 연속적인 그래프로 옮아가는 장면을 다음과 같이 서술하고 있다. '정의역의 x값의 간격을 계속 작게 나누어 이들로부터 얻어지는 순서쌍들을 좌표평면 위에 나타내어 가면, 이 점들은 점점 촘촘하게 되어 직선에 가까운 모습을 띄게 된다'(강행고 외, 2005). '정의역을 정수집합에서 수 전체의 집합으로 하여 그래프를 그리면 점 사이에 계속해서 점을 나타낼 수 있고 결국 일차함수의 그래프는 직선이 된다'(금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주, 2006).

함수 $f: X \rightarrow Y$에서 정의역과 공역을 나타내지 않아도 혼동의 염려가 없을 때는 이 함수를 f, 함수 $f(x)$, $y=f(x)$ 등과 같이 나타내기도 하며, 함수 $y=f(x)$의 정의역과 공역이 주어져 있지 않은 경우에는 함숫값 $f(x)$가 정의되는 x의 값 전체의 집합을 정의역으로 생각하고, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각하기로 한다(박배훈 · 김원경 · 조민식 · 김원석 · 이대현, 2006). 그러나 학생들은 유한집합에서 유한집합으로의 함수에서 무한집합에서 무한집합으로의 함수에 대한 이행과정을 어려워하며 여전히 중학교 수학의 유한집합에서 정의된 함수의 개념 이미지에 머물러 있으며, 위의 사례와 같이 원소를 나열하는 등 함수의 정의역에 대한 개념 정의가 형성되어 있지 않다.

셋째, 선수학습내용이 결핍되어 있다. 함수의 치역을 묻는 문제에 대하여 정의역에서와 마찬가지로 등호를 생략하여 오류를 범한다. 무리함수의 치역은 정의역의 범위에 따라 결정된다. 무리함수 $y=\sqrt{2x+3}+1$과 $y=\sqrt{-x+5}-3$의 치역을 묻는 문제의 정답율은 각각 29%와 25%로 정의역을 묻는 문제에 비하여 정답율이 낮다. 이 경우 x의 계수와 y절편의 부호가 음수인 후자의 경우 정답율이 조금 낮다.

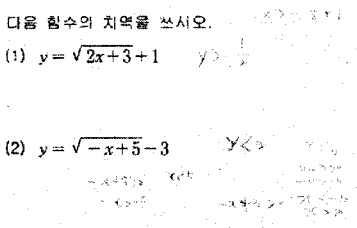
학생들은 정의역과 마찬가지로 <그림 Ⅳ-5>와 같이 정의역의 원소를 실수집합에서 고려하지 않고 유한 개의 값에 대한 함숫값을 얻어 치역을 구하며, x의 계수가 음수인 경우 그냥 비워 둔다. 대체로 정의역의 개념보다 치역의 개념에 취약한 일면을 보여준다. 치역은 함수에 따라 범위가 결정되므로 부등식이 뒤따른다. 부등식의 성질 $a \geq b$이면 $a+c \geq b+c$와 $ac > bc$가 치역을 결정하는데 선수 학습내용으로 작용하여 <그림 Ⅳ-6>과 같이 오류를 범하며, <표 Ⅳ-1> 과 같이 정의역보다 치역을 구하는 문제의 정답율이 낮아진다.


2. 다음 함수의 치역을 쓰시오.

(1) $y=\sqrt{2x+3}+1$

(2) $y=\sqrt{-x+5}-3$

<그림 Ⅳ-5> 귀납적 유추


2. 다음 함수의 치역을 쓰시오.

(1) $y=\sqrt{2x+3}+1$

(2) $y=\sqrt{-x+5}-3$

<그림 Ⅳ-6> 선수학습내용 결핍

넷째, 기타 오류로서, 유리함수로 혼동하여 근호 안의 식이 0이 되는 값을 제외한 실수집합으로 풀이하거나, 근호 안이 0이상이 아니라 x가 0이상으로 고정하거나, 구간을 임의로 하거나, 부등식을 잘못 풀이하여 오답이 된 경우도 있다.

교사는 개념 정의를 설명하면 학생들이 수용하여 개념이 형성된 것으로 판단하지만 학생들이 형성하는 것은 막연한 개념 이미지가 형성되는 사례로 볼 수 있다. 개념 이미지는 교과서의 예 또는 교사의 일부 설명으로 학생들에게 형성될 수 있으며, 개념 형성에서 적용 단계를 거치는 동안 학생들의 사고 과정에서 개념 정의와 개념 이미지는 상호 활성화될 것으로 기대하지만 실제는 그렇지 않다(Tall & Vinner, 1981; 박선화, 1993). 일상생활에서의 사고 습관이 강하게 남아 있어서 개념 정의를 고려할 필요 없이 개념 이미지만 적용해도 어려움을 못 느끼므로 개념 정의를 적용하려 들지 않으며, 따라서 개념 정의가 문제해결 과정 동안 작동하지 않는다는 것이다(Tall, 2003, pp.94-97).

학생들은 정의역의 확장과 축소 등 개념에 대한 조건 변화에 대한 인식 부족과 선수학습내용의 결핍 등으로 인하여 이전 단계의 학습내용에 고착화되는 등 학습의 간섭 현상이 일어날 수 있다. 학습의 간섭 현상을 최소화하여 인지 구조의 불균형 상태에 대한 조절 현상이 원활히 일어날 수 있도록 해야 한다. 문제해결력의 신장은 학생들의 수학적 사고력 신장이 중요한 요소이며, 수학적 사고력 신장을 위하여 수학적 사고 문화의 조성이 필요하다(류성림, 2000, pp.153-186).

2. 무리함수와 그 역함수

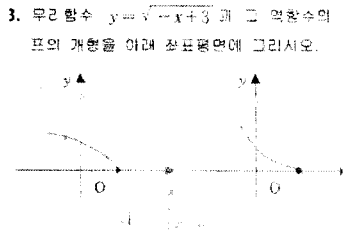
무리함수의 그래프를 그릴 수 있는 문제에 대하여 <표 Ⅳ-2>와 같이 정답율은 18%로 매우 낮으며, 역함수의 그래프를 그리는 문제의 정답율은 10%로 더욱 더 낮다. 주어진 함수의 그래프는 그렸으나 그 역함수의 그래프를 그리지 못한 학생이 있었다. 거의 모든 학생들이 직선 $y=x$를 이용하지 않고 함수 $y=\sqrt{-x+3}$ 와 그 역함수 $y=-x^2+3\,(x\geq 0)$의 그래프를 그렸다는 것은 함수의 그래프를 대수적 조작만으로 충분하다는 생각을 반증하는 결과이다.

<표 Ⅳ-2> 함수와 역함수의 그래프에 대한 응답율

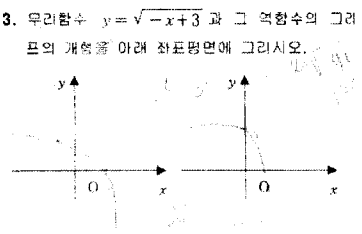
구분	정답율	오답율	무응답율
함수의 그래프	18%	48%	34%
역함수의 그래프	10%	41%	49%
그래프 해석하여 미지수 찾기	20%	41%	38%

x가 감소할수록 함수값들은 완만한 증가를 보이며, 이 그래프를 직선 $y=x$에 대칭이동하면 그 역함수의 그래프를 그릴 수 있지만 그렇게 시도한 학생은 없었다. 오류 현상은 다음과 같다.

먼저, 방향의 오류이다. <그림 Ⅳ-7>과 같이 함수 $y=\sqrt{-x+3}$의 그래프가 제2사분면으로 향하고 있으나, 역함수의 방향도 제2사분면으로 향하도록 그리는 오류를 보이고 있다. 또 다른 경우, 원함수와 역함수 모두 제1사분면으로 향하도록 하거나 '직선 $y=x$에 대칭'을 잘못 해석하여 출발점과 대칭 기준과 관계없이 '모양'만 대칭이 되도록 그리는 오류를 범하여 '역'의 개념을 좌우, 상하 등 사적인 개념 이미지에 의존하여 방향 오류를 일으킨다.



<그림 Ⅳ-7> 방향의 오류

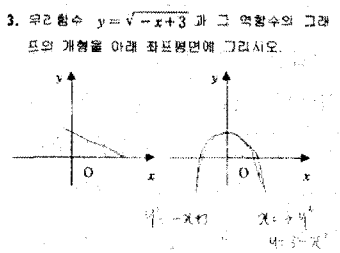


<그림 Ⅳ-8> 모양의 오류(포물선)

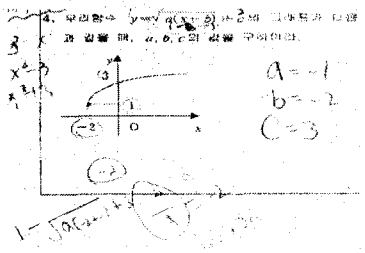
둘째, 모양의 오류이다. <그림 Ⅳ-8>과 같이 정의역을 구하였으나 분수함수의 그래프 모양을 그리고 있다. 역함수의 식을 썼으나 이차함수의 형태로 정리하지 못하고 정의역과 치역을 구하지 못하며 대칭성에 대한 설명도 보여주지 못하고 있다. 무리함수와 그 역함수의 모양 오류의 다른 표현으로 지수적으로 또는 곡선과 직선의 혼합형, 포물선과 포물선 등의 형태로 그리고 있다. 즉, 무리함수의 그래프에 대한 개념 정의가 불분명하다. 유한집합에서 무한집합으로의 확장에 대한 이해가 부족하여 x가 한없이 감소하면 이에 해당하는 y값은 한없이 완만하게 증가하지만 완만하게 증가한다는 의미를 표현하지 못하고 x축에 평행하게 나타내어 오류를 일으킨다.

셋째, 사전 학습내용에 고착되어 있다. 정의역과 공역의 이해가 부족하여 함수 $y=\sqrt{-x+3}$의 정의역과 공역을 이해하지 못하고 있다. 대수적으로 역함수 $y=-x^2+3$을 구하였으나, 정의역과 치역의 관계를 구하지 못하고, <그림 Ⅳ-9>와 같이 역함수의 그래프로 포물선 $y=-x^2+3$ (x는 실수)의 그림을 그리고 있다. 이러한 현상은 중학교 3학년 함수 단원의 최댓값과 최솟값 문제에서 정의역을 실수 전체 집합으로 다루도록 하고 있으나, 고등학교 1학년 수학에서 정의역을 제한하여 다룬다. 이차함수의 그래프는 포물선 형태라는 관념에 익숙하여 정의역이 제한되어도 포물선 전체를 그리는 불균형 상태에 머물러 있으므로 사전 학습내용에 대한 이미지가 고착화되어 일어나는 것으로

볼 수 있다. 고착화된 하나의 명제에 대하여 새로운 영역으로 조건을 확장할 경우 탈중심화가 학생들에게 일어나기 어려우며 따라서 불균형의 원인이 된다(류성림, 1998). 불균형 원인에 대하여 학생들의 수준과 상황에 맞는 불균형 상황을 형성하여 조절할 수 있도록 인지구조의 조절 기회를 제공할 필요가 있다.



<그림 Ⅳ-9> 사전 학습내용의 고착화



<그림 Ⅳ-10> 무리함수의 오개념

넷째, 숫자 표기의 오류이다. 정의역이 실수의 부분집합으로서 무한집합일 수도 있으나 유한집합일 수도 있다. 함수의 그래프의 개형은 좌표축과 원점이 그려진 평면 위에 직선인 경우 두 점, 포물선인 경우 세 점을 표기하며, 초월함수의 경우 극점과 주기에 해당하는 점들을 표기하고 있으나, 이 문제의 경우, y절편에 대한 정보가 없으며, x축 상에 '┼┼┼'와 같이 숫자 없이 쐐기로 표기하여 수를 이산적으로만 생각하고 연속적인 경우를 배제하는 듯한 개념 이미지에 머물러 있다. 단위에 따라 쐐기 하나의 의미가 달라질 수 있으나 칸 수에 해당하는 만큼의 자연수를 대응시켜서 수표기의 오류를 일으키고 있다.

역함수의 개념은 독립변수와 종속변수에 대하여 변수를 서로 교환하여 고려해보는 것이다. 독립변수에 따라 함수값이 결정되며 거꾸로 종속변수를 독립변수로 고려하면 독립변수가 종속변수가 되는 것이다. 순서쌍 (x,y)에 대하여 변수를 서로 바꾸면 (y,x)가 되며 이 점들을 좌표평면에 나타내면 직선 $y=x$에 대칭이다. 따라서 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이며, 도형의 대칭이동과 평행이동은 가역적으로 사고할 수 있는 적합한 소재로 볼 수 있으나, 학생들은 시각적으로 $y=x$에 대칭이라는 이미지를 떠올리지 못하고 활용하지도 못하였다.

3. 그래프를 통한 가역적 사고

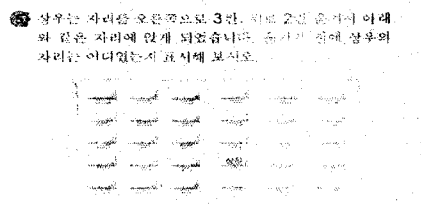
함수식을 좌표평면에 나타내는 것이 자연스러운 표현이라면 그 역으로 좌표평면에 그려진 함수의 그래프를 보고 함수식을 찾는 과정은 거꾸로 해석하는 과정으로 가역적 사고과정이 요구된다. 먼저, 무리함수 $y=\sqrt{ax}$에 대하여 a의 성질을 이해하지 못한다. 무리함수 $y=\sqrt{ax}$에서 a는 이 함수의 그래프의 방향과 증감 등의 성질을 결정하는 요소이다. 그래프가 제1사분면을 향하고 있으므로 x의 계수 a가 양수임을 알 수 있으나 음수로 답한 경우도 있다. 이는 그래프의 방향을 보고 a의 부호를 결정할 수 있지만, <그림 Ⅳ-10>과 같이 음수로 응답하는 오류를 범하고 있다. 또한, 3이 y

절편이지만, 함수 $y=\sqrt{a(x-b)}+c$에서 c를 3으로 응답하여 c를 y절편으로 오해하고 있다. 무리함수 $y=\sqrt{a(x-b)}+c$의 x와 y의 계수는 함수의 그래프의 방향과 증가량을 결정하며 b, c는 평행이동을 결정하는 성분이므로 무리함수의 성질을 익힐 필요가 있다.

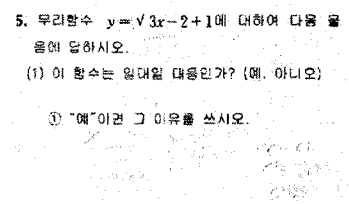
둘째, 이동에 대한 개념 이해가 부족하다. 상수 b와 c는 이 함수의 각각 x축과 y축으로의 평행이동을 의미하는 양이다. b에 대하여 $b=-2$가 아닌 $b=2$로 응답한 학생들도 있으며, c를 y절편으로 간주하여 $c=3$으로 응답한 경우가 있다. 근호안의 수식을 하나로 보고 마치 일차함수의 y절편으로 간주하여 평행이동에 대한 개념 형성이 되지 않고 있다. 또한, 평행이동에서 점의 평행이동과 함수의 평행이동을 혼동하여 조절을 못하는 경우로 볼 수 있다. 학생들은 '하기'와 '되돌리기' 그리고 문자로 일반화한 양에 대하여 부호를 반대로 제시하면 잘 응답하지 못하는 경향이 있다. 이러한 것은 이동과 역이동이라는 가역적인 사고와 점과 함수에 대한 이동의 차이에 대한 개념이 형성되지 않았기 때문이다. 심리적으로 '되돌릴'때, 점과 함수의 이동이 쉽지 않음을 볼 수 있다. 평행이동 성분 b, c에 대한 개념이 형성되지 않은 경우가 많으며 x의 계수 a에 대한 정보도 대부분이 이해하지 못하여 <표 Ⅳ-2>와 같이 정답율이 20%로서 낮다. <그림 Ⅳ-11>과 같이 초등학교 저학년 수학에서 가역적 사고 활동이 요구되는 점의 이동과 관련된 문제가 등장하며, 이와 같은 실생활 장면에 대한 학습의 긍정적 전이가 일어날 수 있는 학습 자료와 기회를 제공할 필요가 있다.

셋째, 이차함수와 무리함수의 연결성 이해가 부족하다. 그래프를 보고 함수를 구성하는 것은 함수를 보고 좌표평면에 그리는 것과의 가역적인 관계이지만 함수 $y=\sqrt{-x+3}$과 역함수 $y=-x^2+3$을 연결시켜 고려하지 않고 개별적으로 그래프를 그리려고 하며, 직선에 대한 대칭성도 이용하지 않는다. 따라서 정의역과 공역이 고려되지 않으며, 무리함수의 역함수를 대수적으로 $y=-x^2+3$과 같이 구하였으나 정의역을 명시하지 않고, 모든 실수 집합에 대응하는 함수의 그래프를 그리고 있다. 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 포물선이라는 것을 인식하지만 이 함수의 역함수의 그래프가 포물선임을 인식하지 못하며, 거꾸로 무리함수의 역함수가 이차함수임을 인식하지 못한다.

역함수의 식을 구하여 포물선 전체(정의역이 실수전체 집합)으로 나타내어 주어진 무리함수의 그래프와 연결시키지 못한다. 이차함수의 그래프는 포물선이므로 대칭축을 기준으로 나누어 정의역을 제한하면 일대일 대응으로 축소할 수 있으나, 역함수와 관련시키지 못하고 있다. $a>0$이면 아래로 볼록이지만 그 역함수의 그래프가 위로 볼록임을 시각적으로 인식하지 못하고 포물선의 그래프와 연결시켜 고려하지 못한다. $a<0$이더라도 마찬가지 현상이 일어난다. 시각화 활용 학습은 학습의 효율성을 높이는데 중요하지만 활용하지 못하고 있다. 그래프를 보고 함수식을 구성하는 것은 함수식을 보고 그래프를 그리는 것과 심리적인 역방향의 과정이므로 가역적인 사고가 요구된다.



<그림 Ⅳ-11> 가역적 사고(수학 2-2)



<그림 Ⅳ-12> 일대일 대응(언어적 표현)

4. 일대일 대응과 역함수의 존재성

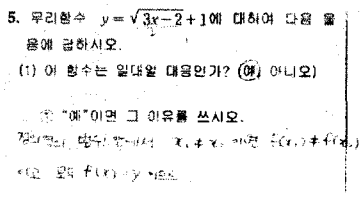
주관식 보다 응답하기에 간단한 선다형 문제의 응답율이 높으며 설명을 요구하는 문항의 응답율이 특히 낮다. 일대일 대응인지와 역함수가 존재하는지에 대한 정답율은 <표 Ⅳ-3>과 같이 각각 51%와 50%이지만 그렇게 되는 이유를 설명하는 항목에서 정답율이 5%와 8%로서 매우 낮은 것은 개념 정의가 형성되어 있지 않고 개념 이미지에 머물러 표현의 한계가 있음을 의미한다.

<표 Ⅳ-3> 일대일 대응과 그 역함수에 대한 응답율

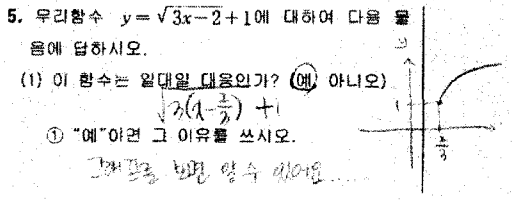
구분		정답율	오답율	무응답율
일대일대응	판정	51%	13%	36%
	판정 설명	5%	21%	74%
역함수	존재 판정	50%	9%	41%
	판정 설명	8%	13%	79%

첫째, 언어적인 표현 능력이 부족하다. 일대일 대응을 판별할 수 있으나 왜 일대일 대응이 되는지 설명을 못하는 학생들이 대부분이다. 정답자의 대부분은 함수를 정의하거나 일대일함수의 정의를 말하는 경우가 대부분이다. <그림 Ⅳ-12>와 같이 유한개의 사례를 들며 "x가 다 다른 값에 대응됨"과 같이 불충분하게 일대일함수를 설명하려고 하거나 "각 x값에 따라 대응되는 y값이 하나씩 존재하기 때문"과 같이 언어적으로 일대일 대응을 설명하고 있다.

'X에서 Y위로의 함수'에 대한 설명을 생략하거나 정확한 언어적 표현을 하지 못하며, 일대일 대응을 막연한 개념 이미지로 설명하고 있다. <그림 Ⅳ-13>과 같이 "그래프를 보면 알 수 있어요"와 같이 언어적인 설명 대신 그림을 그려 설명하려고 하지만, 시각적인 자료를 논리적으로 표현하지 못하고 있다.

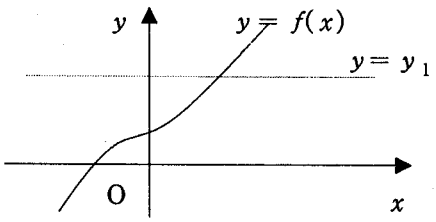


<그림 Ⅳ-14> 표기 오류(전사 함수)

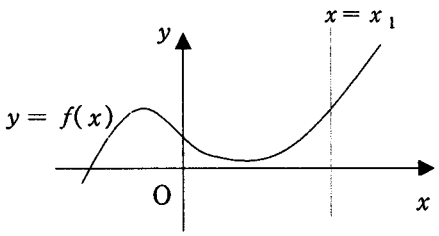


<그림 Ⅳ-13> 일대일 대응의 시각적 오류

둘째, 표기에서 오류를 일으킨다. 'X에서 Y 위로'의 표현을 <그림 Ⅳ-14>와 같이 "모두 $f(x)=y$"로 나타내어 표기의 오류를 범하고 있다. 함수값과 공역의 원소가 같다는 의미를 치역과 공역이 같다는 의미와 동일시하고 있다. 이러한 것은 언어적으로 나타내지 못하고 대수적으로 불완전하게 식으로만 나타내어 표기 오류를 범하고 있다.



<그림Ⅳ-15> 일대일함수의 시각적인 판정



<그림Ⅳ-16> 함수의 시각적인 판정

셋째, 시각화 자료를 활용하지 못한다. 일대일함수의 판정은 <그림 Ⅳ-15>와 같이 기하적으로 그래프가 직선 $y=y_1$과 만나는 점의 개수로 판정을 하며, 함수의 판정은 <그림 Ⅳ-16>과 같이 $x=x_1$과 만나는 점의 개수로 판정할 수 있다. 이러한 판정 기준은 일대일 함수와 함수의 정의에서 비롯된다. '함수'는 정의역의 원소에 대응되는 공역의 원소가 중복되어서는 안되며, '일대일함수'는 치역에 중복되는 원소가 있어서는 안되므로, 그 판정 기준은 각각 x,y축과 평행한 직선이 되며, 상호 대칭적으로 판정된다.

그러나 학생들은 개념 정의를 소홀히 한다. 유한개의 만족하는 사례를 들어 일대일함수로 판정하거나 또는 X에서 Y 위로의 함수를 판정한다. 학생들의 함수에 대한 개념 정의가 중학교 수준의 유한집합 사이의 대응관계 개념 이미지에 머물러 있다. 시각화 자료는 해석적인 방법으로 문제를 해결하는 것보다 더 깊이 있는 이해에 도달할 수 있으나, 학생들은 시각적으로 생각하는 것조차 싫어하는 경향이 있다(Eisenberg, 1992). 언어적 표현 이전에 시각화를 통하여 정의역에 대응하는 공역의 원소를 찾기도 하며, 거꾸로 공역의 원소에 대응하는 정의역의 원소를 찾는 가역적 사고과정을 통하여 일대일 대응의 개념을 형성할 수 있다.

5. 역함수의 성질

이 문제는 선다형 문항으로 응답율이 95%로 서술형 문제의 응답율에 비하여 매우 높지만 정답율은 46%이다. 먼저, 함수의 기본적인 개념 정의가 형성되어 있지 않다. 항등함수가 일대일 대응이 아니라는 응답이 12%이다. 항등함수의 정의역과 공역 그리고 함숫값이 어떻게 정의되는지 개념이 형성되어 있지 않거나, 일대일 대응의 개념 역시 그 의미를 이해하지 못하고 있다. 일대일 대응의 경우 전사(onto) 조건을 이해하지 못하고 단사(into) 조건을 강조한다. 11%의 학생들은 "무리함수 $y=\sqrt{x}$의 역함수가 존재한다"가 거짓명제라고 응답하였다.

둘째, 기호 표현에 대한 이해가 부족하다. 22%의 학생들은 "함수 f의 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다"는 거짓명제라고 응답하였다. 역함수의 역함수는 원함수와 같은지에 대하여 '$(f^{-1})^{-1}=f$'이 거짓이라고 응답한 학생들이 4%로서 소수 학생들만이 이 명제가 거짓이라고 응답하였다. 합성함수의 역함수에 대하여 46%의 학생들이 '$(f \circ g^{-1})^{-1}=f^{-1} \circ g$'이 거짓명제라고 올바르게 응답하였으나, 과반수 학생들은 합성연산의 역연산이 순서가 바뀌어도 이를 인식하지 못하고 있다. 두 함수의 상등과 합성함수의 역연산에 대하여 과반수 학생들이 개념 정의에 불분명하며, 기호 $f: X \rightarrow Y$, $f=g$, $f(x)$와 f의 의미를 이해하지 못하고 있다. 구조를 이해하고 새로운 개념을 습득하는데 기호는 더없이 중요하다(Skemp, 2007 p.111). 수학적으로 의사소통하는 과정에서 기호 사용의 장점을 인식할 수 있는 기회가 제공되어야 한다.

셋째, 가역적인 사고 능력을 신장할 필요가 있다. 가역적인 사고를 유발할 수 있는 개념의 예로, 변수와 상수, 정의역과 공역, x좌표와 y좌표, 직선 $y=x$에 대칭, 유리함수와 무리함수, 함수와 역함수, 회전과 역회전, 지수함수와 로그함수, 연속과 불연속, 최댓값과 최솟값, 증가와 감소, 극대와 극소, 미분과 적분 등 함수와 관련된 다양한 개념들은 '역(逆)'의 성질을 내포하고 있다. 하나의 개념을 이해하기 어려우면 그 용어의 상대적인 개념을 살펴보는 것도 유익하다. 수학적 개념은 인식 주체의 인지 활동으로 인하여 상보적 특성을 가지게 되며, 서로 대립보다 영역이나 요소들이 상보적으로 발달하며, 수학적 대상이나 개념은 각 분야에서 독자적으로 발달하는 것이 아니라 서로에게 토대를 두면서 상보적으로 발달한다(강현영 · 이동환, 2007). 따라서 역함수의 존재 이유를 설명하기 위하여 원함수의 성질을 주의깊게 살펴볼 필요가 있으며 원함수의 다양한 성질을 시각적으로 활용하여 대칭적으로 역함수에 대해서도 동일한 성질이 성립하는지 확인하는 사고 과정을 거칠 필요가 있다.

<표 Ⅳ-4> 역함수의 성질에 대한 응답율

구분	백분율
항등함수는 일대일 대응이다	12%
무리함수 $y=\sqrt{x}$의 역함수가 존재한다	11%
함수 f의 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.	22%
$(f \circ g^{-1})^{-1}=f^{-1} \circ g$	46%
$(f^{-1})^{-1}=f$	4%
무응답	5%

Ⅴ. 결론 및 제언

본고에서 가역적 사고가 요구되는 학습내용을 어떻게 이해하는지 고등학교 1, 2학년 4개 학급을 대상으로 무리함수의 개념과 가역적 사고를 알아보고자 지필검사를 실시하여 분석하였다. 첫째, 무리함수의 정의역과 치역에 대하여, 경계값과 집합의 확장에 대한 인식이 부족하다. 등호를 생략하거나,

정의역을 정수 집합의 부분집합으로 축소하여 원소를 나열하거나 부등식 풀이에 취약하다. 유한집합에서 유한집합으로의 함수에서 무한집합에서 무한집합으로의 함수에 대한 이행과정을 어려워하여 중학교의 함수 도입단계에서 표를 이용하거나 순서쌍을 이용한 그래프에 의존하고 있다. 초등학교 저학년부터 가역적인 사고의 문제해결 방법이 제시되고 있지만 학생들은 거꾸로 묻는 문제를 어려워하며, 문제 해결 방법으로서 거꾸로 풀이하는 방법에 서투르다. 따라서 실생활의 소재를 포함한 가역성이 내포된 학습 자료를 개발하여 가역적 사고 활동을 활성화할 필요가 있다.

둘째, 무리함수와 역함수의 그래프에 대하여, 그래프의 방향에 대하여 오류를 일으키거나, 그래프의 모양이 직선, 지수함수, 또는 분수함수의 유형으로 포물선 모양에서 벗어나는 등 모양에 대하여 오류를 일으킨다. 역함수의 정의역과 공역의 개념이 형성되어있지 않다. 중학교 3학년 과정에서 이차함수의 최댓값과 최솟값 다루는 문제의 정의역은 실수 전체의 집합에서 다루도록 하고 있으나, 고등학교 1학년의 이차함수에서는 정의역을 제한하여 다루고 있다. 정의역을 확장할 때와 정의역을 축소할 때, 불균형이 일어날 수 있으나, 학생들은 사전 학습 내용에 고착화되어 불균형 상태의 인지구조에 머무른 채 오류를 일으킨다. 따라서 불균형 상황을 다양하게 조성하여 탈 중심화를 스스로 자각하는 경험 기회를 제공할 필요가 있다.

셋째, 그래프를 통한 가역적 사고에 대하여, 무리함수의 성질을 이해하지 못한다. $y=\sqrt{ax}$ 의 계수 a는 무리함수의 성질을 결정하는 요소이지만 a의 값이 양수와 음수로 변하는 경우 그 성질을 이해하지 못한다. 함수 $y=\sqrt{a(x-b)}+c$의 평행이동 성분인 b,c에 대하여 c를 y절편으로 생각하거나 평행이동 성분이 숫자일 때와 문자일 때, 그 그래프가 어떻게 이동되는지 이해하지 못한다. 또한, 이차함수와 무리함수의 연결성 이해가 부족하다. 그래프를 보고 함수식을 구성하는 것은 함수식을 보고 좌표평면에 그리는 것과의 가역적인 관계이지만 무리함수와 역함수를 연결시키지 않고 개별적으로 그려서 지수함수의 그래프 또는 분수함수의 그래프를 그리는 오류를 일으킨다.

넷째, 일대일 대응과 역함수의 존재성에 대하여, 언어적인 표현 능력이 부족하고, 표기 및 'X에서 Y로의' 등 수학적 개념을 이해하지 못하여 오류를 일으키며, 시각화 자료를 활용하지 못한다. 시각화 자료는 수학적 개념을 설명하는데 유익한 도구이며 학습의 파지 효과를 높이는 학습도구이지만 활용하지 못하고 수식에만 얽매이는 경향이 있다. 수학적 개념들은 대립적 의미가 다양하게 내포되어 있지만 학생들은 상호 연결지어 사고하지 못하고, '일대일 대응이지만 역함수가 존재하지 않는다'와 같이 개별적으로 사고하여 오류를 일으킨다. 따라서 개념의 대립적 의미와 연결성을 고려하여 시각화한 학습자료 등을 제공하여 수학 학습내용의 오개념 형성을 최소화할 필요가 있다. 따라서 시각화 자료는 가역적인 사고를 할 수 있도록 하는 실마리를 제공할 수 있으며, 개념 형성에 보다 쉽게 접근할 수 있으므로 시각화할 수 있는 학습 자료를 개발할 필요가 있다.

다섯째, 항등함수, 일대일 대응 등 함수의 기본적인 개념 정의에 익숙하지 않으며, 기호 f, $f(x)$, $f=g$, $f^{-1}(x)$와 $(f\circ g)^{-1}$ 등 기호에 대한 이해 능력이 부족하다. 함수와 관련된 기호 조작과 함수 표현들을 서로 관련짓는 것을 어려워한다(Sierpinska, 1992; Sajka, 2003). 기호 표현과 사

용을 통하여 자신의 사고 과정을 반성함으로써 수학적 사고 능력의 신장을 도모하지만(교육인적자원부, 1997; 2007), 가역적인 사고를 유발하는 개념들에 대하여 학생들은 그러한 개념들 사이의 관계를 연결짓지 못하고 개별적으로 이해하려 하므로 오류를 일으킨다. 기호는 수학적으로 의사소통을 원활하게 하는 단위이며, 많은 양을 간단히 표현할 수 있으며, 개념과 연결되는 중요한 의미를 지니고 있으므로(Skemp, 2007, pp.88-108), 기호 의미에 대한 정확한 표현과 다양한 활용이 필요하며 이러한 학습 기회를 제공하며, 함수와 관련하여 저학년에서 형성된 개념 이미지의 고착화를 방지하고 불균형 상황을 통한 인지 구조의 조절 과정 및 가역적 사고 활동을 조성할 필요가 있다.

학생들은 대체로 무리함수에 대한 개념이 형성되어 있지 않거나 망각되어 인출하지 못하였다. 무리함수의 이차함수와의 가역적인 관계를 파악하지 못하고 학습 내용 이전 단계의 개념 이미지에 고착화되어 있는 경향이 있다. 함수는 정의역의 원소에 공역의 원소를 대응시키는 일종의 관계(relation)이다. 군구조에서 가역성 및 대칭성이 함수와 역함수의 관계에서 마찬가지로 일어난다. 순서쌍으로 (a,b)와 (b,a)는 역관계로서 직선 $y=x$에 대칭이며, 일대일 대응과 역함수를 대수적으로 $y=f(x)$와 $x=f^{-1}(y)$으로 나타낼 수 있으며, 그래프는 서로 대칭이다. 학생들은 함수와 역함수의 관계에 대하여 변수는 서로 교환되며, 그래프는 대칭되지만, 이를 이용하지 못하고 대수적으로 나타내는 과정에서 오류를 일으킨다.

초등학교 저학년부터 미지수, 네모, 또는 괄호 등을 사용하여 거꾸로 사고하는 문제 또는 실생활의 가역성이 내포된 상황을 통하여 가역적 사고 활동을 하도록 하고 있다. 본 고에서 함수의 이동 관계, 역함수의 그래프, 역함수가 포함된 합성연산 등 거꾸로 사고하는 문제에 대하여 살펴보았다. 각 문항의 반응율과 정답율이 상대적으로 낮으며, 가역적인 사고가 요구되는 문제에 대한 학생들의 문제 해결 능력이 부족하다. 시각적인 자료를 이용하면 역함수를 보다 쉽게 이해할 수 있으나 시각화 자료 자체를 이해 수단이라기보다 또 다른 학습해야할 대상으로 간주하여 학습부담을 증가시키는 요인으로 생각하는 경향이 농후하다.

교사의 설명으로 투입되는 '수학적 개념'이 심상으로만 수용되어 고착화되지 않도록 해야 하며, 개념의 조건은 단계적으로 확장되어가므로 지속적인 개념의 연결성 측면을 강조할 필요가 있으며, 이에 대하여 학생들이 조절 과정을 거치는지 사고 과정의 흐름을 확인할 필요가 있다. 학생들의 사고 과정을 관찰하고, 특히 가역성이 내포된 수학적인 주제에 대하여 다양한 상황을 제공하여 사고 과정을 확인할 필요가 있다. 본 고의 연구 대상은 중하위권이 대부분이며, 주변 학습 환경은 대도시에 비하여 열악하다고 볼 수 있다. 이들이 가역적 사고가 요구되는 학습내용을 어떻게 이해하는지 함수 영역 중에서 무리함수를 통하여 분석하였다. 본 고에서 다루지 못한 부분을 몇 가지 제언하고자 한다.

첫째, 학습내용의 가역적 사고를 알아보기 위하여 무리함수에 대하여 분석하였으나 다른 대수함수 또는 초월함수로 확장하여 폭넓게 분석할 필요가 있다.

둘째, 인구 조절, 경제 활동, 지진 등 각종 현상과 관련된 일련의 가역적 사고를 유발하는 학습 자료를 개발할 필요가 있다.

셋째, 주관식 문항에 응답을 못하지만 객관식에는 응답하는 학생들의 사고 유형과 수학적 성향을 파악하여 이들이 타 학생들과 어떤 차이가 있으며 어떠한 영향을 주고받는지 분석할 필요가 있다.

넷째, 본 고의 연구 대상은 성적과 지역에 한정되어 일반적인 현상을 알기에 한계가 있으므로 대상과 지역을 확대하여 일반적인 사고 유형을 포괄적으로 분석할 필요가 있다.

참 고 문 헌

강행고 외 8인 (2005). 중학교 수학 7-가. 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

강현영 · 이동환 (2007). 수학교육에서 상보성. 수학교육학연구, **17(4)**, 437-452.

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정 (교육인적자원부 고시 제2007-79호 별책 8).

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2006). 중학교 수학 7-가. 서울: (주)고려출판.

김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구. 서울: 경문사.

김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식 (1997). 수학교육학 용어 해설(7), 대한수학교육학회 논문집, **7(2)**, 397-411.

김인희 (2009). 고등학교 2학년 학생들의 함수적 상황 번역 능력. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

류성림 (1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

류성림 (1999). 수학적 사고력 신장을 위한 도형 영역의 교수학습 자료 개발에 관한 연구. Res. Sci. Math. Educ. **23**. 153-186. 대구교육대학교.

박배훈 · 김원경 · 조민식 · 김원석 · 이대현 (2006). 고등학교 수학10-나. 서울: 법문사.

박선화 (1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰- 개념정의와 개념 이미지의 관계를 중심으로. 대한수학교육학회 논문집, **3(1)**, 397-411.

박정선 (2005). 함수와 역함수 개념 이해의 수학교육적 고찰. 서울대학교 석사학위논문.

변영계 (2003). 교수 · 학습 이론의 이해. 서울: 학지사.

서울시교육청 (2002). 2002 전국연합학력평가 분석 자료집. 서울: 한솔기획

이경화 · 신보미 (2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. 대한수학교육학회, 수학교육학연구, **15(1)**, 39-56.

우정호 (1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.

우정호 (2001). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

조완영 · 양재식 (2003). 중학교 1,2학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **15**, 147-152.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽 (2006). 교육학신론. 서울: 문음사.

황혜정 (2001). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **40(2)**, 253-263.

Bayazit, I., & Gray, E. (2004). *Understanding Inverse Functions: The Relationship Teaching Practice and Student Lesrning.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2. 103-110.

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of the function: Aspects of epistemology and pedagogy* (153-174). MAA Notes, 25. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Engelke, N., Oehrtman, M., & Carson, M. (2005). *Composition of Functions: Precalculus Students' Understandings.* Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ginsburg, H., & Opper, S. (2006). 피아제의 인지발달이론. (김정민, 역). 서울: 학지사. (영어 원작은 1988년 출판).

NCTM (1998). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. (구광조 · 오병승 · 류희찬, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1989년 출판).

NCTM (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. (류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판).

Piaget, J. (1972). *Intellectual Evolution from Adolescence to Adulthood.* Human Development, **51**, 40-47.

O'bryan, K., & MacArthur, R. (1969). *Reversibility, Intelligence, and Creativity in Nine-Year-Old Boys.* Child Development, **40**, 33-45.

Polya, G. (2005). 수학적 발견(II). (우정호 외 6인 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1981년 출판).

Ramful, A., & Olive, J. (2008). *Reversibility of thought: An instance in multiplicative tasks.* Journal of Mathematical Behavior **27**, 138-151.

Roll, S. (1970). *Reversibility Training and Stimulus Desirability as Factors in Conservation of Number.* Child Development **41**, 501-507.

Sajka, M. (2003). *A Secondary School Student's Understanding of the Concept of Function - A Case Study.* Educational Studies in Mathematics **53**, 229-254.

Selden, A., & Selden, J. (1992). *Research Perpectives of Functions : Summaries and Overview.* In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of the function: Aspects of epistemology and pedagogy (1-21). MAA Notes, **25**. Washington, D.C.

Sierpinska, A. (1992). *On Understanding the Notion of Function.* In G. Harel & E. Dubinsky

(Eds.), The concept of the function: Aspects of epistemology and pedagogy (1-21). MAA Notes, **25**. Washington, D.C.

Skemp, R. R. (2007). 수학학습 심리학. (황우형, 역). 서울: (주)사이언스북스. (영어 원작은 1987년 출판)

Tall, D. (2003). 고등수학적 사고. (류희찬 · 조완영 · 김인수, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

Tall, D., & Vinner, S.(1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Paticular Reference to Limits and Continuity.* Educational Studies in Mathematics **12**, 151-169.

Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function.* Int. J. Maths, **14(3)**, 293-305.

An Analysis On Students' Misconceptions of the Reversibility of Irrational Functions

Lee, Ki Suk
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education
E-mail : kslee@cc.knue.ac.kr

Lee, Du Ho
Uiseong Technical High School
E-mail : leebkd@hanmail.net

The inverse function of a one-to-one correspondence is explained with a graph, a numerical formula or other useful expressions. The purpose of this paper is to know how low achieving students understand the learning contents needed reversible thinking about irrational functions. Low achieving students in this study took paper-pencil test and their written answers were collected. They made various mistakes in solving problems. Their error types were grouped into several classes and identified in this analysis. Most students did not connected concepts that they learned in the lower achieving students to think in reverse order in case of and to visualize concepts of functions. This paper implies that it is very important to take into account students' accommodation and reversible thinking activity.

* ZDM Classification : I12
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : irrational functions, reversibility, error types, accommodation