Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 33, No. 3, pp.63－70, September 2010.

Busy Period 기대값을 사용하여 삼변수 Min(N, T, D)와 Max(N, T, D) 운용방침사이의 관계식 설정

이 한 교†

한남대학교 산업경영공학과

Construction of a Relation Between the Triadic Min(N, T, D) and Max(N, T, D) Operating Policies Based on their Corresponding Expected Busy Periods

Hahn-kyou Rhee†

Department of Industrial and Management Engineering Hannam University

Based on the known results of the expected busy periods for the triadic Min (N, T, D) and Max (N, T, D) operating policies applied to a controllable M/G/1 queueing model, a relation between them is constructed. Such relation is represented in terms of the expected busy periods for the simple N, T and D, and the dyadic Min (N, T), Min (T, D) and Min (N, D) operating policies. Hence, if any system characteristics for one of the two triadic operating policies are known, unknown corresponding system characteristics for the other triadic operating policy could be obtained easily from the constructed relation.

Keywords : Expected busy period, Triadic or Dyadic or Simple Operating policy, Queueing model

1. 서 론

서비스를 제공하는 대기 시스템에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없는 경우, server는 서비스 창구를 폐쇄하고 다른 보조업무를 수행하도록 규정되어 있는 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)과 서비스를 기다리는 고객이 없어도 서비스 창구를 폐쇄할 수 없는 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)과의 가장 큰 차이점은 server의 유휴시간의 활용성 여부이다. 다시 말해, 일반적인 대기모형에서는 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어도 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server는 항상 서비스 창구에서 대기상태를 유지하고 있어야 한다. 이러한 조건은 서비스를 받기 위해 대기 시스템에 도착하는 고객에게는 즉시 서비스를 제공 받을 수 있다는 편리성이 확보되지만 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없는 경우 서비스 창구에서의 server의 역할이 없어지게 됨으로 다시 서비스를 받기 위해 새로운 고객이 도착할 때까지 유휴시간이 발생하기 때문에 server의 업무활용도가 낮아지게 된다. 모든 일반적인 대기모형에서 나타나는 이러한 형태의 server의 유휴시간이 발생되는 문제점을 개선할 수 있는 방법, 즉 server의 업무활용도를 향상시키기 위해 제안된 방법이 새로운 형태의 조정가능한 대기모형을 활용하는 것이다. 조정가능한

논문접수일 : 2010년 06월 10일　　게재확정일 : 2010년 08월 23일
† 교신저자 hkrhee@hnu.kr
※ 이 논문은 2010년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

대기 모형에서는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server의 유휴시간이 발생하지 않게 하기 위해 서비스 창구를 즉시 폐쇄하고 server는 다른 보조업무를 수행하도록 규정되어 있어 server의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 그러나 일단 폐쇄된 서비스 창구는 server가 수행중인 다른 보조업무의 연속성을 어느 정도 유지할 수 있도록 하기 위해 미리 정해진 조건이 충족되어야만 서비스 창구를 재개하여 서비스를 받기 위해 기다리는 고객들에게 다시 서비스를 제공할 수 있도록 규정하고 있다. 다시 말해 서비스 창구가 폐쇄된 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 도착하더라도 미리 정해진 조건이 만족되지 않을 경우 서비스 제공을 위한 서비스창구의 재개는 허용되지 않는다. 이러한 미리 정해진 서비스창구의 재개조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 따라서 조정가능한 대기모형의 운용방침에는 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 위한 조건이 포함되어 있기 때문에 대기모형의 운용에 매우 중요한 역할을 한다. 이러한 연유로 대기시스템의 상태에 따라 탄력적으로 운용할 수 있는 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있다(Teghem[11]). 활용중인 운용방침들은 대기 시스템 상태를 나타내는 입력변수가 몇 개가 포함되어 있는가에 따라 다음과 같이 단순(simple), 이변수(dyadic), 그리고 삼변수(triadic) 운용방침으로 분류된다.

(1) 단순 운용방침 : 대기시스템의 상태를 나타내는 입력변수 한 개가 포함되어 있는 운용방침으로 가장 대표적인 것에는 아래와 같이 정의되는 N, T 그리고 D 운용방침이 있다.

(i) N운용방침 : Yadin and Naor[12]가 제안한 것으로, 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 N ($N \geq 1$)명이 되는 순간 재개되어 서비스를 받기 위해 기다리는 고객에게 서비스를 제공하기 시작하여 또다시 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

(ii) T운용방침 : Heyman[4]등이 제안한 것으로 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 T단위시간이 경과한 뒤, 대기시스템 내부에 만약 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 있을 경우 서비스의 제공이 재개되며 다시 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 그러나 T 단위 시간이 경과된 후 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 경우 또다시 T단위 시간 혹은 또 다른 T단위 시간 등 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 최소한 한 명이상이 있을 때까지 서비스창구는 폐쇄된다.

(iii) D운용방침 : Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 대기시스템 내부에서 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 예상되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D단위 시간을 초과하는 순간부터 재개되어 서비스를 제공하기 시작하여 다시 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

(2) 이변수 운용방침 : 대기 시스템 내부의 조건을 나타내는 두 종류의 단순 운용방침으로 구성된 새로운 형태의 운용방침으로 Gakis, Rhee and Sivazlian[3]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 위한 조건은 대기 시스템의 상태를 나타내는 단순 운용방침 두 개가 특이한 형태로 결합되어 있기 때문에 단순 운용방침보다 대기 시스템 운용의 유연성이 증가되도록 구성되어 있다. 여기에는 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$, $Min(T, D)$, $Max(N, T)$, $Max(T, D)$ 그리고 $Max(N, D)$ 운용방침 등이 있다. $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침은 다음과 같은 의미로 정의되며 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee and Sivazlian[3] 혹은 Rhee[6, 7]).

(i) $Min(N, D)$ 운용방침 : 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 N명이 되거나 혹은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 예상되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 다시 말해서 단순 N 혹은 D운용방침에 따른 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스창구는 서비스를 받기 위해 기다리는 고객에게 서비스 제공이 재개되어 다시 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 D운용방침과 동일함을 쉽게 확인 할 수 있다.

(ii) $Max(N, D)$ 운용방침 : 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어서 폐쇄된 서비스창구는 그 후 처음으로 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 N명 이상이 되고 또한 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D단위 시간을 처음으로 초과하는 순간, 즉 다시 말해서 단순 N운용방침과 D 운용

방침 두 조건 모두가 처음으로 만족되는 순간, 재개되어 서비스를 받기 위해 기다리는 고객에게 서비스 제공이 시작되어 다시 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 N운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 D운용방침과 동일하게 됨을 알 수 있다.

(3) 삼변수 운용방침 : 특히 최근에는 대기 시스템 운용에 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 종류의 단순 운용방침이 특이한 형태로 결합된 운용방침으로 Rhee, Oh[8, 9]에 의해 제안되었다. 여기에는 대표적으로 아래와 같이 정의되는 $Min(N, T, D)$과 $Max(N, T, D)$운용방침이 있다. 다양한 대기 시스템 상태를 고려할 수 있도록 세 종류의 단순 운용방침 결합되어 있어서 대기 시스템 운용에 유연성이 확보된다는 장점과 입력변수 수의 증가는 대기 시스템 분석의 과정이 단순 혹은 이변수 운용방침의 경우보다는 더 복잡해지고 어려워지는 단점이 서로 상충되는 문제점을 포함하고 있다.

(i) $Min(N, T, D)$ 운용방침 : 대기 시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server는 즉시 서비스창구를 폐쇄하고 다른 업보조무를 수행한다. 그 후 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 N 명 이상이 되거나 혹은 $mT(m = 1, 2, 3..)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명이상의 고객이 서비스를 받기 위해 도착하거나, 그리고 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 세 가지 조건 중 어느 것이나 먼저 하나가 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 보조업무를 중단하고 폐쇄된 서비스 창구를 재개하여 서비스를 받기 위해 기다리는 고객에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$ 운용방침과 동일하고, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(D, T)$ 운용방침과 동일하며 $T \to \infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다.

(ii) $Max(N, T, D)$ 운용방침 : 단순 혹은 이변수 운용방침과 마찬가지로 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없으면 server는 즉시 서비스창구를 폐쇄하고 다른 보조업무를 수행한다. 그 후, 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객수가 N명 이상이 되고, $mT(m = 0, 1, 2, ..)$ 단위 시간이 경과할 때 최소한 한 명이상의 고객이 서비스를 받기 위해 도착하며 또한 서비스를 받기 위해 기다리는 모든 고객에게 예상되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D단위 시간 이상의 조건 모두를 처음으로 만족하는 순간 server는 수행중인 다른 보조업무를 중단하고 폐쇄된 서비스 창구를 재개하여 서비스를 받기 위해 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to 0$ 이면 $Max(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 또한 $N \to 1$ 이면 $Max(T, D)$과 동일하게 되고, 그리고 $T \to 0$ 이면 $Max(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다.

2. 연구 목적

서비스를 제공해 주는 server의 유휴시간을 효과적으로 활용하기 위해 개발된 조정가능한 대기모형이 실제 환경에 활용되기 위해서는 선정된 운용방침이 적용되었을 때 발생되는 총비용을 최소로하는 운용방침에 포함된 입력변수의 최적해를 구한 결과에 따라 운용되어야 한다. 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 유도하기 위해서는 조정가능한 대기모형의 운용과정에서 발생되는 모든 비용을 나타내는 총비용 함수를 구축해야한다. 이러한 총비용함수를 구축하기 위해서는 대기 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기대값, 대기모형이 운용될 때의 busy period 기대값 등의 다양한 대기 시스템의 특성치들이 필요하게 된다. 여기에서 busy period는 server가 폐쇄된 서비스 창구를 재개하여 서비스를 받기 위해 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 대기시스템 내부에 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어 서비스 창구를 다시 폐쇄할 때까지 소요되는 시간간격을 말한다(Rhee and Sivazlian[10]). 이러한 대기 시스템 특성치는 한사람의 고객이 대기 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 소요되는 비용, 한사람의 server가 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용 그리고 서비스 창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용과 결합되어 대기 시스템 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하게 된다. 그러나 삼변수 운용방침이 적용되는 경우 대기시스템 운용과정에서 유연성 확보되는 장점이 있지만 총비용함수의 구성에 필요한 대기시스템 특성치를 유도하는 과정이 매우 복잡하고 어려워지는 단점을 피할 수 없게 된다. 더구나 여러 종류의 삼변수 운용방침을

탄력적으로 적용할 경우 각각의 운용방침에 따른 총비용함수 구성에 필요한 대기 시스템 특성치를 일일이 유도해야 하기 때문에 많은 시간과 노력이 필요하게 된다. 이로 인해 신속하게 산업현장에서 삼변수 운용방침이 적용될 수 없는 경우가 발생하게 된다. 이러한 문제점이 해결될 수 있는 삼변수 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침사이의 관계식을 구축하는 것을 본 연구의 목적으로 설정한다. 두 삼변수 운용방침 사이의 관계식은 삼변수 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 분석하여 단순 N, T와 D 그리고 이변수 $Min(N, T)$, $Min(N, D)$와 $Min(T, D)$ 혹은 $Max(N, T)$, $Max(T, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값이 포함된 형태로 구축된다. 구축된 이러한 관계식을 활용하면 $Min(N, T, D)$ 혹은 $Max(N, T, D)$ 두 운용방침 중 하나의 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값이 유도되면 나머지 다른 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값을 단순 그리고 이변수 운용방침에 따른 busy period 기대값을 사용하여 수월하게 구할 수 있게 된다. 더구나 다른 대기시스템 특성치, 즉 대기시스템에 있는 고객수의 기대값 등의 유도에도 활용될 수 있어 삼변수 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형의 분석이 단순 혹은 이변수 운용방침의 경우처럼 수월해질 수 있다는 가능성을 제시한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태 (steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형은 다음과 같은 사항을 만족한다고 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 고객들은 랜덤하게 대기시스템에 도착한다고 가정한다. 즉 포아손과정(Poisson process)에 따라 연속된 두 고객의 도착시간간격은 평균이 $1/\lambda$인 지수분표(exponential distribution)에 따른다. 즉 t단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $x=0,1,2,\cdots$에 대해 $N(t)$의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t)=x]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \quad (1)$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_j(T)=P[N(T)\ge j]=\sum_{x=j}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^x}{x!} \quad (2)$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호 독립(independent)이며 동일한 분포(identical distribution)라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시하며, 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(j)}(D)=\int_0^D [f_S(t)]^{*(j)}dt \quad (3)$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 j차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Conolly[2] or Kleinrock[5]).

$$E[B_o]=\frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \quad (4)$$

4. 단순, 이변수 그리고 삼변수 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값

Gakis, Rhee and Sivazlian[3]의 결과에 따르면, 만약 단순 N, T 그리고 D운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period 기대값을 각각 $E[B_N]$, $E[B_T]$와 $E[B_D]$라고 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N]=NE[B_o] \quad (5)$$

$$E[B_T]=\frac{\lambda TE[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \quad (6)$$

$$E[B_D]=E[B_o]\sum_{j=1}^{\infty}G^{(j-1)}(D) \quad (7)$$

여기에서 $E[B_o]$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 주어져 있고 $G^{(j)}(D)$는 식 (3)에 정의되어 있다.

이변수 $Min(N, D)$, $Min(N, T)$, $Min(T, D)$, $Max(N, D)$, $Max(N, T)$와 $Max(T, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기 모형에 적용되었을 때의 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,D)}]$, $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$, $E[B_{Max(N,D)}]$, $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$라고 하면 이들은 또한 다음과 같이 주어진다(Rhee[6]).

$$E[B_{Min(N,D)}] = E[B_o]\sum_{j=1}^{N} G^{(j-1)}(D) \tag{8}$$

$$E[B_{Min(N,T)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{9}$$

$$E[B_{Min(T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty} H_j(T)\,G^{(j-1)}(D) \tag{10}$$

$$E[B_{Max(N,D)}] = E[B_0]\left\{N+\sum_{j=N+1}^{\infty} G^{(j-1)}(D)\right\} \tag{11}$$

$$E[B_{Max(N,T)}] = N[B_0]+\frac{\lambda T E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} E[B_{Max(T,D)}] = &\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}\{H_j(T) \\ &+[H_1(T)-H_j(T)]\,G^{(j-1)}(D)\} \end{aligned} \tag{13}$$

여기에서 $H_j(T)$는 식 (2)에 정의되어 있다.

삼변수 $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,T,D)}]$와 $E[B_{Max(N,T,D)}]$라 정의하면 다음과 같이 유도되었다(Rhee and Oh[8, 9]).

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = \frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N} H_j(T)\,G^{(j-1)}(D) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} E[B_{Max(N,T,D)}] = &N[B_0] \\ &+\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N}^{\infty}\{[H_1(T) \\ &-H_n(T)]G^{(N)}(D)+H_{n+1}(T)\} \end{aligned} \tag{15}$$

5. $Max(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값의 분석

식 (15)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$를 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[B_{Max(N,T,D)}] = &N[B_0]+\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T) \\ &+\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_1(T)\,G^{(j-1)}(D) \\ &-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\,G^{(j-1)}(D) \end{aligned} \tag{16}$$

그런데 식 (2)에서 정의된 $H_j(T)$를 사용하면

$$H_1(T) = P[N(T) \geq 1] = 1-P[N(T)=0]$$

또한 식 (1)로부터 구해진 $P[N(T)=0]=e^{-\lambda T}$ 대입하면

$$H_1(T) = 1-e^{-\lambda T} \tag{17}$$

따라서 식 (17)의 $H_1(T)$를 식 (16)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[B_{Max(N,T,D)}] = &N[B_0]+\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T) \\ &+E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty} G^{(j-1)}(D) \\ &-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)\,G^{(j-1)}(D) \end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$는 4개의 항으로 구성되어 있다. 그러나 첫 번째 항은 식 (5)에서 주어진 $E[B_N]$의 결과와 일치함을 확인할 수 있다. 따라서 나머지 3개의 항을 다음과 같이 분석한다.

5.1 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)$의 분석

식 (18)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 두 번째 항 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)$에 포함된 $\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T) = \sum_{j=1}^{\infty} H_j(T) - \sum_{j=1}^{N} H_j(T) \tag{19}$$

식 (19)의 결과를 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty} H_j(T)$에 대입하면

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)$$
$$=\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\left[\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)-\sum_{j=1}^{N}H_j(T)\right]$$
$$=\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_j(T) \quad (20)$$

또한 식 (2)로부터 $\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)=\sum_{j=1}^{\infty}P[N(T)\geq j]$. 그런데 $\sum_{j=1}^{\infty}P[N(T)\geq j]=E[N(T)]=\lambda T$. 따라서

$$\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)=\lambda T \quad (21)$$

식 (21)의 $\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)$를 식 (20)에 대입하면

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)=\frac{\lambda TE[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_j(T) \quad (22)$$

그리고 식 (6)과 식 (9)에서 제시된 $E[B_T]$와 $E[B_{Min(N,T)}]$의 결과를 사용하면 식 (22)는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)=E[B_T]-E[B_{Min(N,T)}] \quad (23)$$

5.2 $E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)$의 분석

식 (18)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$의 세 번째 항 $E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)$에 포함된 $\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)=\sum_{j=1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)-\sum_{j=1}^{N}G^{(j-1)}(D) \quad (24)$$

따라서 식 (24)의 결과를 $E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)$에 대입하면 다음과 같다.

$$E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)$$
$$=E[B_0]\left\{\sum_{j=1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)-\sum_{j=1}^{N}G^{(j-1)}(D)\right\}$$
$$=E[B_0]\sum_{j=1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)-E[B_0]\sum_{j=1}^{N}G^{(j-1)}(D) \quad (25)$$

식 (7)과 식 (8)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[B_{Min(N,D)}]$를 사용하면 식 (25)는 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_0]\sum_{j=N+1}^{\infty}G^{(j-1)}(D)=E[B_D]-E[B_{Min(N,D)}] \quad (26)$$

5.3 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)$의 분석

식 (18)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$를 구성하고 있는 네 번째 항 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)$에 포함된 $\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)$는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)=\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)-\sum_{j=1}^{N}H_j(T)G^{(j-1)}(D) \quad (27)$$

따라서 $\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)$에 식 (27)의 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)$$
$$=\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)-\sum_{j=1}^{N}H_j(T)G^{(j-1)}(D)\right\}$$
$$=\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D)-\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{N}H_j(T)G^{(j-1)}(D) \quad (28)$$

마지막으로 식 (10)과 식 (14)의 $E[B_{Min(T,D)}]$와 $E[B_{Min(N,T,D)}]$의 결과를 사용하면 식 (28)은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=N+1}^{\infty}H_j(T)G^{(j-1)}(D) = E[B_{Min(T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}] \quad (29)$$

6. $Min(N, T, D)$와 $Max(N, T, D)$ 운용방침에 따른 busy period 기대값 사이의 관계식 설정

식 (18)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]$에 식 (5), 식 (23), 식 (26) 그리고 식 (29)의 결과를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[B_{Max(N,T,D)}] &= E[B_N]+E[B_T]-E[B_{Min(N,T)}] \\ &\quad +E[B_D]\ -E[B_{Min(N,D)}] \\ &\quad -(E[B_{Min(T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}]) \end{aligned}$$

따라서 $E[B_{Max(N,T,D)}]$와 $E[B_{Min(N,T,D)}]$사이의 관계식은 아래와 같이 설정된다.

$$\begin{aligned} &E[B_{Max(N,T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}] \\ &\quad = E[B_N]+E[B_T]+E[B_D] \\ &\quad\quad -E[B_{Min(N,T)}]-E[B_{Min(N,D)}]-E[B_{Min(T,D)}] \quad (30) \end{aligned}$$

또한 이변수 운용방침이 적용될 때의 busy period 기대값 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다(Rhee[6]).

$$E[B_{Min(N,T)}]+E[B_{Max(N,T)}]=E[B_N]+E[B_T] \quad (31)$$

$$E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Max(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D] \quad (32)$$

$$E[B_{Min(T,D)}]+E[B_{Max(T,D)}]=E[B_T]+E[B_D] \quad (33)$$

또한 식 (31), 식 (32)과 식 (33)을 다른 형태로 표현하면

$$E[B_{Min(N,T)}]=E[B_N]+E[B_T]-E[B_{Max(N,T)}] \quad (34)$$

$$E[B_{Min(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Max(N,D)}] \quad (35)$$

$$E[B_{Min(T,D)}]=E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Max(T,D)}] \quad (36)$$

식 (34)~식 (36)에서 주어진 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(N,D)}]$와 $E[B_{Min(T,D)}]$를 식 (30)에서 주어진 $E[B_{Max(N,T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}]$에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[B_{Max(N,T,D)}] &= E[B_N]+E[B_T]+E[B_D] \\ &\quad -(E[B_N]+E[B_T]-E[B_{Max(N,T)}]) \\ &\quad -(E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Max(N,D)}]) \\ &\quad -(E[B_T]+E[B_D]-E[B_{Max(T,D)}]) \\ &\quad +E[B_{Min(N,T,D)}] \end{aligned}$$

따라서 $E[B_{Max(N,T,D)}]$와 $E[B_{Min(N,T,D)}]$사이의 또 다른 형태의 관계식이 다음과 같이 설정된다.

$$\begin{aligned} &E[B_{Max(N,T,D)}]-E[B_{Min(N,T,D)}] \\ &\quad =-E[B_N]-E[B_T]-E[B_D] \\ &\quad\quad +E[B_{Max(N,T)}]+E[B_{Max(N,D)}]+E[B_{Max(T,D)}] \\ &\quad\quad +E[B_{Min(N,T,D)}] \quad (37) \end{aligned}$$

삼변수 $Min(N,\ T,\ D)$와 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period 기대값 사이의 관계식이 식 (30) 혹은 식 (37)과 같이 설정되었다. 일반적으로 단순 혹은 이변수 운용방침이 적용되었을 경우 삼변수 운용방침의 경우보다 훨씬 보다 수월하게 대기시스템 특성치를 유도할 수 있다. 따라서 두 삼변수 운용방침에 따른 busy period 기대값 중 어느 것 하나만 유도하면 다른 하나의 busy period 기대값을 단순 그리고 이변수 운용방침이 적용되었을 때 busy period 기대값을 사용하여 유도할 수 있음을 확인하였다. 또한 설정된 관계식의 형태를 활용하면 다른 대기 시스템 특성치, 예를 들면, 대기 시스템에 있는 고객수의 기대값, 등도, 유사한 방법으로 유도할 수 있는 가능성을 제시하였다.

7. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 우선, 조정 가능한 대기모형에 삼변수 $Min(N,\ T,\ D)$와 $Max(N,\ T,\ D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값은 두 운용방침중 하나의 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 유도하면 다른 삼변수 운용방침이 적용되었을 때 busy period 기대값은 N, T 그리고 D 운용방침 그리고 이변수 $Min(N,\ T)$, $Min(N,D)$ 그리고 $Min(T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값 혹은 $Max(N,T)$, $Max(N,D)$ 그리고 $Max(T,D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period 기대값을 사용하여 훨씬 수월하게 유도할 수 있음을 확인하였다. 또한 설정된 관계식을 활용하여 다른 대기시스템 특성치, 예를 들면, 대기시스템에 있는 고객수의 기대값 등도 같은 방법으로 유도할 수 있음을 확인하였다. 마지막으로 이러한 접근방법은 또 다른 형태의 삼변수 $Med(N,T,D)$ 운용방침(Rhee and Oh[9])이 적

용될 경우에도 활용할 수 있도록 모든 삼변수 운용방침과의 관계식 설정이 앞으로 수행되어야 할 중요한 과제의 하나로 제안한다.

참고문헌

[1] K. R. Balachandran and H. Tijm; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] B. Conolly(1975), Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY.

[3] K. G. Gakis, H. K. Rhee and B. D. Sivazlian; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[4] D. Heyman; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[5] L. Kleinrock(1975), Queueing Systems, 1 : Theory, John Wiley and Sons, New York, NY.

[6] H. K. Rhee(1997), "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies," 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739.

[7] H. K. Rhee; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침(Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교 논문집, 32 : 141-153, 2002.

[8] H. K Rhee and H. S. Oh; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[9] H.K Rhee and H.S. Oh; "가장 일반화된 삼변수 운용방침 개발과 그에 따른 Busy period 기대값유도", 한국산업경영시스템학회지, 32(4) : 161-168, 2007.

[10] H. K. Rhee and B. D. Sivazlian; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic(0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[11] J. Teghem; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational, 1986. Research*, 23 : 141-158.

[12] M. Yadin and P. Naor; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963.