

경계요소법을 이용한 방음벽의 음향성능 해석

Acoustic Performance Analysis of Noise Barriers by using Boundary Element Method



김철환*

* 한국도로공사 도로교통연구원 책임연구원

1. 머리말

경계요소법(Boundary Element Method, BEM)은 미분방정식으로 표현된 지배방정식을 Green의 공식을 이용하여 경계조건을 포함한 경계상의 적분방정식으로 변환하는 경계적분방정식을 수치해석적으로 해를 구하는 방법이다. BEM은 영국의 Southampton대학에서 처음 제안된 수치해석방법으로 유한요소법(Finite Element Method, FEM)과 함께 이산화기법을 이용하여 공간의 음향문제를 해석하는 방법이지만 해석하고자 하는 대상의 표면의 경계면만을 요소분할하면 되므로 유한요소법이나 유한차분법(Finite Differential Method, FDM)과 같은 영역형 해석법에 비해 입력데이터의 양이나 계산시간을 크게 단축시킬 수 있다는 특징을 가지고 있어 큰 공간을 대상으로 하는 음향해석에 유용하게 적용될 수 있다. 특히 도로소음 대책에 많이 사용되는 방음벽의 성능해석과 같은 무한영역을 포함한 문제를 이론적으로 올바른 가정을 바탕으로 해석할 수 있다는 이점이 있다. 본 기사에서는 복잡한 형상의 방음벽이 있는 2차원 음장을 경계요소법으로 해석하는 방법과 사례에 대해 소개한다.

2. 2차원 경계적분의 정식화

Fig. 1에 경계적분의 정식화를 위해 가정한 2차원 음장을 나타내었다. 경계면 Γ 에 둘러싸인 영역을 Ω , Γ 와 무한의 가상경계면 Γ_∞ 에 둘러싸인 영역을 Ω_∞ 라고 하고, 그 영역을 음장(sound field)으로 가정한다. 음장은 정상상태(stationary state)를 가정하고 해석의 편의상 정상음의 시간표현 항 $e^{i\omega t}$ 는 생략하기로 한다. 음장 Ω 내에서의 음원(sound source)의 위치를 $r_0(x_0, y_0)$ 라 하면, 음원에 의한 임의의 위치 $r(x, y)$ 에서의 음압 $p(r)$ 은 다음과 같이 Helmholtz의 방정식을 만족한다.

$$(\nabla^2 + k^2)p(r) = 0 \tag{1}$$

여기서, k 는 파수(wave number)를 나타낸다. 그리고 임의의 함수 u, v 가 각각 미분가능한 함수라고 하면, Green의 제2정리에 의해 다음 식으로 표현된다.

$$\int_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma \tag{2}$$

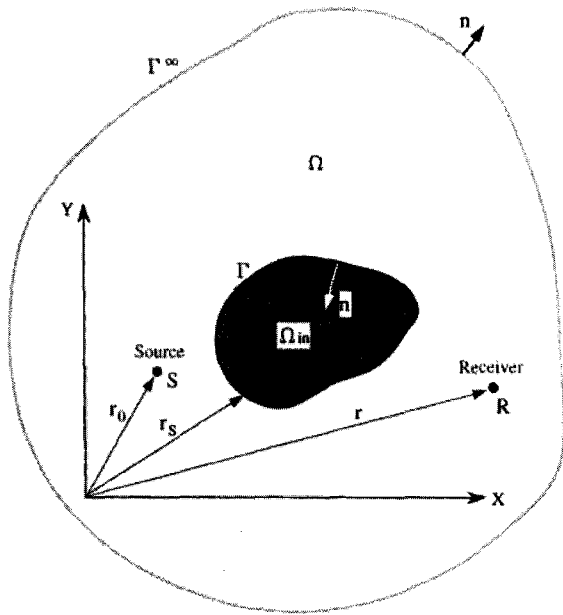


Fig. 1 Geometry and definition of symbols.

여기서, n 은 음장 Ω 의 경계 Γ 와 Γ_∞ 에서 바깥쪽을 향하는 단위 법선벡터를 의미한다. 식 (1)에 Green의 제2정리를 적용하기 위하여 2차원 음장의 Green 함수 $G(r, r_0)$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$G(r, r_0) = \frac{1}{4j} \{ H_0^{(2)}(k|r_0 - r|) \} \quad (3)$$

여기서, $H_0^{(2)}$ 는 0차 제2종 Hankel함수이다. Green함수 $G(r, r_0)$ 는 2차원 음장 Ω 내에서 다음의 방정식을 만족한다.

$$(\nabla^2 + k^2)G(r, r_0) = -\delta(r - r_0) \quad (4)$$

여기서, δ 는 Delta 함수이며, 다음과 같은 성질을 가진다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(r - r_0) dr = 1, \quad (r = r_0) \quad (5)$$

$$\delta(r - r_0) = 0, \quad (r \neq r_0)$$

그리고 무한 원거리에서의 음압은 다음의 Sommerfeld의 방사조건을 만족하는 것으로 한다.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - ik\Phi \right) = 0 \quad (6)$$

여기서, Φ 는 음압을 나타내는 함수(속도 포텐셜에 비례),

ϵ 은 1/2 (3차원 음장의 경우에는 1)의 값을 갖는 계수이다. Green 함수 $G(r, r_0)$ 와 식 (2)에서 나타낸 Green의 정리를 이용하여 식 (1)을 변형하면 다음의 적분식이 얻어진다.

$$\epsilon(r)p(r) = G(r, r_0) + \int_{\Gamma} \left(p(r_s) \frac{\partial G(r, r_s)}{\partial n(r_s)} - G(r, r_s) \frac{\partial p(r_s)}{\partial n(r_s)} \right) d\Gamma \quad (7)$$

여기서, $r_s(x_s, y_s)$ 는 경계면 Γ 상에서 임의의 위치를 나타내는 벡터이다. $\epsilon(r)$ 은 Delta 함수를 적분하는 과정에서 생기는 계수로 r 이 영역 Ω_{in} 내에 위치할 경우에는 "0", 음장 Ω 내에 위치할 경우에는 "1", 경계면 Γ 상에 위치할 경우에는 " $\Theta/2\pi$ " [Θ 는 r 이 위치하는 경계면의 각도를 의미하며 3차원의 경우에는 " $\Theta/4\pi$ " (Θ 는 r 이 위치하는 경계면의 입체각을 의미)이 된다.]의 값을 갖는다. 이 식은 Ω 내의 음압 $p(r)$ 이 직접음 성분 $G(r, r_0)$ 와 경계면 Γ 상의 음압 $p(r_s)$ 및 그 방향성분 $\partial p(r_s)/\partial n(r_s)$ 의 값을 이용하여 적분에 의해 주어지는 것을 의미한다. 그리고 경계요소법의 출발점이 되는 식 (7)을 Helmholtz-Huygens 적분방정식이라고 한다.

3. 경상법을 이용한 경계요소 모델링

지면에 방음벽이 설치된 산란음장을 해석할 때, 해석의 편의상 지면의 경계조건을 완전 반사성 지면으로 가정하는 경우가 많다. 완전 반사성 지면을 포함한 해석 모델링은 2차원 경상법을 이용한다. Fig. 2는 경계요소법을 이용한 수치해석 모델링기법을 설명하고 있다. 완전 반사성 지면에 음향적 산란체(예를 들면, 방음벽 등)가 있는 경우(a), 반사성 지면의 경계면을 경상으로 가정한 경우(b), (b)에 나타난 산란체와 산란체의 경상을 포함한 경계면 Γ 를 N 개의 경계요소 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots \Gamma_n \dots \Gamma_N$ 으로 분할하여(c) Helmholtz-Huygens적분의 이산화식을 적용한다. 단, 계산결과와의 충분한 정확도를 기대하기 위해서는 분할된 각 요소의 길이가 $\lambda/5$ 또는 $\lambda/8$ 이하가 되도록 하여야 하며, 여기서 λ 는 음파의 파장을 의미한다.²⁻⁴⁾

식 (7)의 연산에 있어서,

$$\frac{\partial}{\partial n(r_s)} \{ H_0^{(2)}(k|r_s - r|) \} = -k \cdot \cos\theta \cdot H_1^{(2)}(k|r_s - r|) \quad (8)$$

가 되므로,

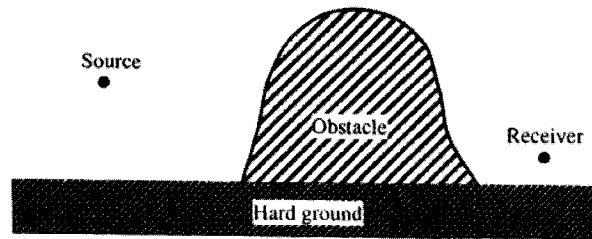
$$\frac{\partial G(r, r_s)}{\partial n(r_s)} = -\frac{k}{4j} \cdot \cos\theta \cdot H_1^{(2)}(k|r_s - r|) \quad (9)$$

여기서, θ 는 벡터 r_s - r 과 $n(r_s)$ 가 이루는 각도를 나타낸다. 그리고,

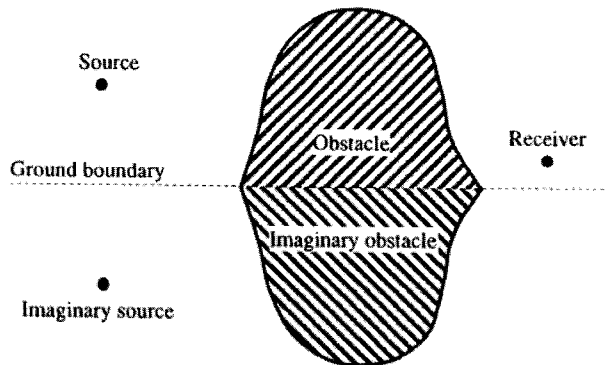
$$\begin{aligned} \frac{\partial p(r_s)}{\partial n(r_s)} &= -\rho \frac{\partial v(r_s)}{\partial t} \\ &= -\frac{\rho}{Z(r_s)} \frac{\partial p(r_s)}{\partial t} \\ &= -i\omega B(r_s)p(r_s) \\ &= -ik\rho c B(r_s)p(r_s) \\ &= -ik\beta(r_s)p(r_s) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, ρ 는 공기의 밀도, $Z(r_s)$ 는 경계면 Γ 상의 임의의 점으로 수직 음향 임피던스(acoustic impedance), $B(r_s)$ 는 음향 어드미턴스(acoustic admittance), $\beta(r_s)$ 는 비음향 어드미턴스(specific acoustic admittance)를 의미한다. 식 (9)와 식 (10)을 이용하여 식 (7)의 우변을 변형하면,

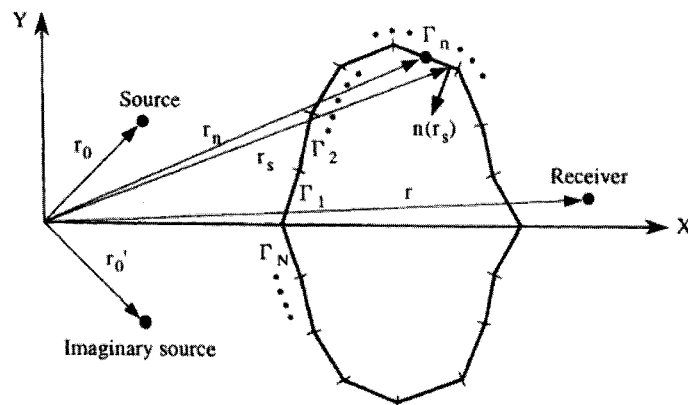
$$\begin{aligned} \epsilon(r)p(r) &= D(r, r_0) + \int_{\Gamma} p(r_s) \cdot \\ &\quad \left\{ -\frac{k}{4j} \cdot \cos\theta \cdot H_1^{(2)}(k|r_s - r| - ik\beta(r_s) G(r, r_s)) \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$



(a) Acoustic obstacle on the ground.



(b) Mirror-image modeling of the acoustic obstacle.



(c) Boundary element model and definition of symbols.

Fig. 2 Two dimensional modeling for boundary element analysis.

단, 완전 반사성 지면의 존재에 의해 직접파 성분을 나타내는 식 (10)의 우변 제1항은 실음원과 허음원의 2개의 기여로 다음 식과 같이 된다.

$$D(r, r_0) = \frac{1}{4j} \{H_0^{(2)}(kr_0 - r) + H_0^{(2)}(kr_0' - r)\} \quad (12)$$

여기서, r_0' 는 완전 반사성 지면에 의한 음원의 허상 $r_0' = (x_0, -y_0)$ 를 나타낸다.

식 (11)의 우변의 제2항에서 요소상의 음압 $p(r_s)$ 를 이산화된 임의의 요소 Γ_n 의 음압 $p(r_n)$ 으로 하고, 요소상의 음압은 일정하다고 가정한다. 수치해석을 위하여 이산화된 식으로 변환하면,

$$\begin{aligned} \epsilon(r)p(r) = & \frac{1}{4j} \{H_0^{(2)}(kr_0 - r) + H_0^{(2)}(kr_0' - r)\} \\ & - \frac{k}{4} \cdot \sum_{n=1}^N p(r_n) \cdot \int_{\Gamma_n} \{\cos\theta \cdot H_1^{(2)}(kr_s - r)\} \\ & + \beta(r_s) H_0^{(2)}(kr_s - r)\} ds(r_s) \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서 임의 위치의 음압 $p(r)$ 을 구하기 위해서는

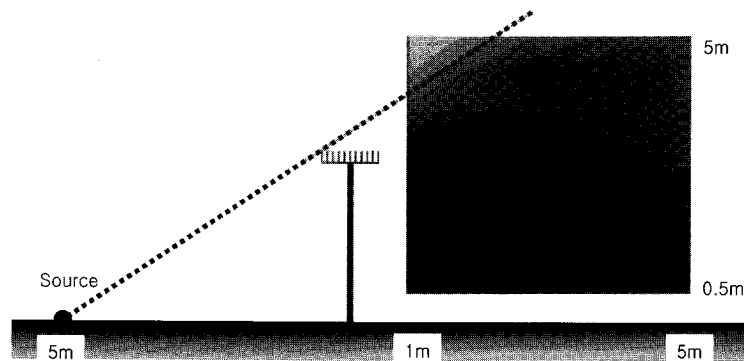
경계요소상의 음압 $p(r_n)$ 을 구해야 한다. 여기서, 식 (13)에 $r = r_m$ ($m=1, 2, 3, \dots, N$)을 대입하면 즉, 수음점의 위치를 경계요소의 중앙점으로 설정하면 N 원의 연립방정식이 얻어진다. 여기서, 식 (13)의 좌변의 $\epsilon(r_m)$ 은 $1/2$ 이 된다. 따라서,

$$\frac{1}{2} \cdot p(r_m) = \frac{1}{4j} \{H_0^{(2)}(kr_0 - r_m) + H_0^{(2)}(kr_0' - r_m)\} \quad (14)$$

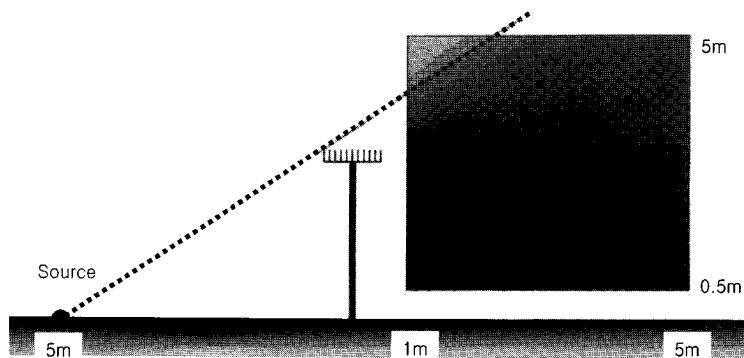
$$\begin{aligned} & - \frac{k}{4} \cdot \sum_{n=1}^N p(r_n) \cdot \int_{\Gamma_n} \{\cos\theta \cdot H_1^{(2)}(kr_s - r_m)\} \\ & + \beta(r_s) H_0^{(2)}(kr_s - r_m)\} ds(r_s) \end{aligned} \quad (m=1, 2, 3, \dots, N)$$

식 (14)를 행렬로 나타내면,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + A_1(r_1) & A_2(r_1) & \dots & A_N(r_1) \\ A_1(r_2) & \frac{1}{2} + A_2(r_2) & \dots & A_N(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1(r_N) & A_2(r_N) & \dots & \frac{1}{2} + A_N(r_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(r_1) \\ p(r_2) \\ \vdots \\ p(r_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(r_1) \\ D(r_2) \\ \vdots \\ D(r_N) \end{bmatrix} \quad (15)$$



(a) Measured insertion loss of a noise barrier.



(b) Calculated insertion loss of a noise barrier.

Fig. 3 Comparison of measured and calculated IL at 400Hz.

여기서,

$$D(r_m) = \frac{1}{4j} \{H_0^{(2)}(kr_0 - r_m) + H_0^{(2)}(kr_0' - r_m)\} \quad (16)$$


$(m = 1, 2, 3, \dots, N)$

$$A_n(r_m) = \frac{k}{4} \cdot \int_{r_n} \{ \cos\theta \cdot H_1^{(2)}(kr_s - r_m) + \beta(r_s) H_0^{(2)}(kr_s - r_m) \} ds(r_s) \quad (17)$$

식 (14)에서 구해진 $p(r_n)$ 을 식 (13)에 대입하면 수음점에서
의 음압 $p(r)$ 이 얻어진다. Fig. 3에 이상에서 소개한 2차원
경계요소 해석에 의해 계산한 결과를 측정결과와 비교하여
나타내었다. 표시된 결과는 방음벽이 있을 때와 없을 때의
음압레벨의 차이를 나타내는 방음벽의 삽입손실(insertion
loss, IL) 값이다. 그림에서 알 수 있듯이 계산결과는 측정결
과와 잘 대응하고 있음을 알 수 있다. 이와 같이 경계요소법
을 이용하면 옥외 음장에서 복잡한 형상의 방음벽 성능을
정확히 해석할 수 있다. 해석하고자 하는 방음벽의 요소 분
할 수는 파장에 반비례하므로 높은 주파수에서는 보다 많은
계산 부하가 걸리게 되고, 특히 3차원 음장을 높은 주파수가

지 해석하기 위해서는 일반적인 사양의 개인용 컴퓨터로는
아직까지는 무리가 있다. 하지만 지금과 같이 개인용 컴퓨터
의 성능이 높아져 가면 가까운 시일에는 개인용 컴퓨터로도
실제 현장에서의 관심 주파수까지 3차원 옥외 음장의 방음
벽 성능을 해석할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. Chulhwan Kim, "A study on an acoustic performance of the tube arrayed T-shape noise barrier on the top", Doctor Thesis, Kyushu Institute of Design, 1998.
2. G.R. Watts, P.A. Morgan, "Acoustic performance of an interference-type noise barrier profile", Applied acoustics, vol. 49, pp.1-16, 1996.
3. D.H. Crombie, D.C. Hothersall and S.N. Chandler-Wilde, "Multiple-edge noise barriers", Applied acoustics, vol. 44, pp. 353-369, 1995.
4. G.R. Watts, D.H. Crombie, D.C. Hothersall, "Acoustic performance of new designs of traffic noise barriers: full scale tests", J. Sound Vib. vol. 177, pp.289-305, 1994. 

[담당 : 강형택, 편집위원]