

비원형 폐합셸의 좌굴특성 Buckling Characteristic of Non-Circular Closed Composite Shells

박원태 Park, Won-Tae* · 천경식 Chun, Kyoung-Sik**†

(Received May 6, 2010 ; Revised June 7, 2010 ; Accepted June 10, 2010)

ABSTRACT

In this study, the buckling loads and mode shapes characteristic of circular and non-circular(elliptical) closed composite shells were analyzed. To analyses the buckling behaviors, we develop and report an improved generalized shell element called 4EAS-FS through a combination of enhanced assumed strain and the substitute shear strain fields. A flat shell element has been developed by combining membrane element with drilling degree-of-freedom and a plate bending element. The combined influences of length, thicknesses, cross-sectional parameters, and fiber-angle on the critical buckling loads and mode shapes of circular and non-circular(elliptical) closed shells are examined.

요 지

본 연구는 원형 및 비원형(타원형)단면을 갖는 복합폐합셸의 좌굴하중 및 모드형상을 비교·분석하였다. 이때, 면내 회전자유도를 갖는 평면응력 요소와 추가변형률과 대체진단변형률을 도입한 횡 요소를 결합한 4절점 셸 요소(4EAS-FS)를 작성하여 좌굴해석을 수행하였다. 해석모델의 매개변수는 기하학적 형상, 중횡비 및 화이버 보강각도로 설정하여 그에 따른 영향을 고찰하였다. 본 연구에서 제시한 원형 및 비원형 단면을 갖는 폐합셸의 임계좌굴하중과 모드형상에 대한 폐합셸 길이, 두께, 단면계수 및 화이버 보강각도 등 설계변수의 영향을 비교·분석하였다.

Key Words: non-circular closed shell(비원형 폐합셸), buckling(좌굴), composite laminate(복합적층)

1. 서 론

부재가 압축력을 받았을 때의 강도는 부재를 구성하는 요소의 좌굴에 의해 영향받을 가능성이 있다. 좌굴이란 부재가 어느 한계치 이상의 압축력을 받게 되면 부재의 형상이 변화되어 내하력을 상실하는 현상으로써 전체좌굴과 구조계를 구성하는 부재의 국부좌굴로 구분된다. 어느 경우나 국부좌굴이 전체좌굴에 선행되지 않도록 하는 것이 중요하다. 즉, 구성요소가 먼저 좌굴함으로써 기능이 상실되어 부재 전체의 좌굴을 유도하게 되거나, 구성요소의 좌굴이 응력의 재분배를 일으키고 부재 전체의 내하력에 영향을 미치는 거동을 생각할 수 있다.

최근 저중량, 고강도, 고내구성이 요구됨에 따라 항공, 조선, 자동차분야에서만 국한적으로 적용되어 왔던 복합재료(FRP)는 토목, 건축 등의 건설분야에서 그 사용성이 대두되고 있다. 특히 압축력을 받는 구조물의 구성요소로 복합재료를 적용함으로써 높은 강성과 함께 보다 다양한 미적형상을 확보할 수 있으나 여전히 설계상 좌굴 등의 주요 안정검토가 필요하다. 따라서

본 논문은 원형 및 비원형 폐합셸의 좌굴거동특성을 비교·연구함으로써 교각 기둥부 외부 또는 내부에 적용가능한 폐합셸의 설계기초가 되고자 하였다. 그리고 좌굴모드형상을 예시함으로써 좌굴모드에 관한 물리적 및 공학적인 이해를 증진시키고자 하였다.

국내 관련 연구동향을 살펴보면, 축하중을 받는 등방성 원통형 셸의 기하학적 형상과 초기결합 등의 다양한 매개변수 변화에 따른 좌굴해석이 수행되었고(Koiter, 1956; Sobel et al., 1976; Chryssanthopoulos et al., 1991), 김승억 등(2001)은 회기분석을 통해 좌굴응력을 간편하게 구할 수 있는 설계식을 도출하였다. 등방성 재료에서만 국한되어 진행된 연구는 복합재료에 대한 관심이 대두되면서 점차 확대되었다. 윤석호(1999)와 박근우 등(2000)은 비등방성 복합적층판 및 셸의 휨, 자유진동 및 좌굴해석을 진단변형을 고려한 Mindlin이론에 근거하여 수행하였다. 김기두와 박대효(2000)는 CFRP 원형패널의 고유치해석과 비선형 해석으로부터 초기 기하학적 결합 형상과 진폭 크기의 효과를 분석한 후 그 결과를 토대로 CFRP 원형패널에 대한 기하학적 결합의 민감도를 분석하여 복합재료 패널의 설계

* 정회원·공주대학교 건설환경공학부 교수, 공학박사

**† 정회원·(주)바우컨설팅트 구조부 차장, 공학박사, 토목구조기술사, 교신저자(chunkspe@nate.com)

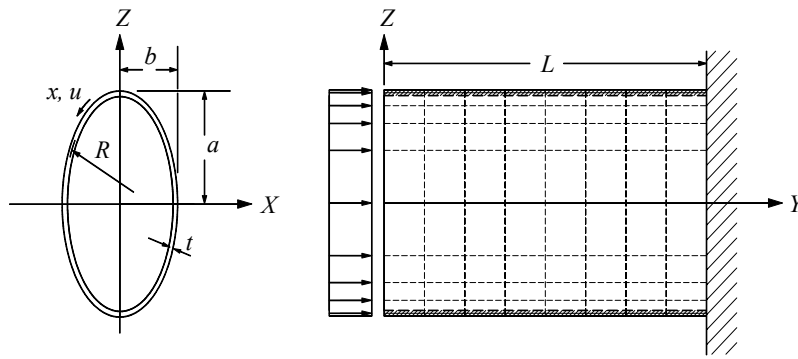


Fig. 1 비원형 폐합셸의 기하학적 형상 및 경계조건

에서 사용되는 녹다운계수(Knock down factor)를 제안하였다. 최근에는 비등방성 원통형 셸의 기하학적 비선형형을 고려한 지배방정식을 유도하여 유한차분법을 이용한 대변형해석이 이루어졌으며(천경식 등, 2002), 채널단면의 기하학적 형상변화에 따른 캔틸레버 적층 구조물의 좌굴안정성이 연구되었다(윤순중과 채수하, 1998; 박원태 등, 2004). 장석윤(2004)은 횡리브로 보강된 복합적층 원통형 셸의 좌굴거동을 다양한 매개변수(보강재 위치 및 크기, 셸의 기하학적 형상, 화이버 보강각도 등)에 따라 분석하여 효율적인 보강설계를 제시하였다. 최근에 Sambandam et al.(2003)과 Ganapathi et al.(2004)은 크로스-플라이와 앵글-플라이에 한하여 타원형 적층관의 좌굴 및 자유진동해석을 각각 수행하였으나, 모드형상을 제시하여 주지 못하는 등의 한계를 지니고 있다.

따라서, 본 연구에서는 원형 및 비원형 단면을 갖는 폐합셸의 좌굴거동을 기하학적 매개변수 변화를 통해 비교·분석하고자 한다. 매개변수에 따른 다양한 모델 및 그에 따른 해석은 공학용 수치해석 언어인 Fortran으로 프로그래밍하였다. 이때, 본 연구에서 적용한 유한요소는 전단 및 면내압감현상과 가상의 제로에너지 모드가 발생하지 않도록 추가변형률장(enhanced assumed strain)과 대체전단변형률장(substitute shear strain)으로 보강하였다. 임계좌굴하중을 위한 고유치 해석을 수행하기 위해 전체 공간의 기저벡터를 부공간의 기저벡터로 치환하여 형성한 부공간에서 Jacobi방법으로 고유치문제를 해석하는 부공간반복법을 적용하였다.

2. 연구방법

2.1 해석모델 및 재료특성치

Fig. 1은 본 논문에서 연구하고자 하는 비원형 폐합셸을 이상화한 모델이다. a 와 b 는 비원형 단반경과 장반경축 길이이며, L 은 Y 축 방향 길이를 의미한다. 요소의 중립면을 x - y 축으로, 중립면에 수직한 축을 z 축으로 설정하였으며, θ 는 화이버 보강각도를 의미한다 (Fig. 2 참조). 해석에 사용된 직교이방성 재료물성치는

$E_1/E_2 = 40$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$, $G_{23} = 0.5E_2$, $\nu = 0.25$ 이고, 각각 동일한 두께와 재료를 가진 층을 아래에서 윗방향(+ z 방향)으로 적층하되, 화이버 보강각도는 x 축을 기준으로 시계방향을 +로 설정하였다.

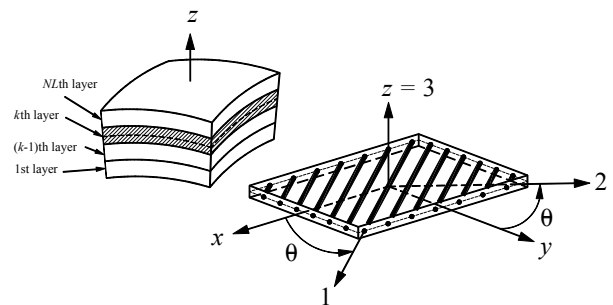


Fig. 2 적층요소와 좌표계

2.2 유한요소 정식화

Mindlin-Reissner이론을 이용한 적층셸 요소의 성능을 개선하기 위해 전단변형률에 가장변형률장(Donea and Lamain, 1987; Bathe and Dvorkin, 1984)을, 면내와 휨변형률에 Hu-Washizu의 변분수식화에 의한 추가변형률장(EAS)을 도입하였다(Simo and Rifai, 1990; Andelfinger and Ramm, 1993). 그리고 평판 휨요소에 면내 회전자유도를 지닌 평면응력 요소를 조합하여 평면 셸요소(flat shell)을 구성하였다. 여기서, 회전자유도 변위장은 Allman(1988)의 회전변위관련 형상함수로 구성하며, 정식화는 Hughes and Brezzi(1989)가 제시한 변분방정식(variational equation)을 적용하였다. 또한 막-압감현상을 제거하고 정확한 rank를 확보하여 가상의 제로에너지 모드가 발생하지 않도록 5-적분점 기법을 도입하였다.

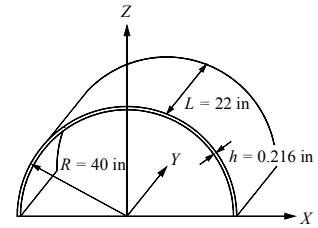
면내하중 N_x , N_y 와 N_{xy} 에 대한 좌굴해석을 수행하기 위한 기하학적 강성행렬은 다음 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K_\sigma]_{24 \times 24} = \int_V [G]_{24 \times 2} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G]_{2 \times 24} dV \quad (1)$$

$$[G] = [J]^{-1} [G_f] \quad (2)$$

Table 1 적층 원통형 셀의 임계좌굴하중 (lbs/in)

상용프로그램			Januky 등 (1999)	Rikards 등 (2001)	Present (4EAS-FS)
STAGS	ANSYS	LUSAS			
3328 (20×40)	3285 (20×40)	3332 (50×100)	3278 (20×40)	3313 (14×30)	3331 (20×40)



$$|[K_S] - \bar{\lambda}[K_\sigma]| = 0 \quad (3)$$

여기서, $[J]$ 는 Jacobian 행렬을, $|J|$ 는 Jacobian 행렬식 (determinant)을 의미하며, $[G_r]$ 는 형상함수의 ξ, η 에 관한 미분항을 나타낸다. 좌굴해석은 식 (3)과 같이 고유치 문제로 표현하며, $\bar{\lambda}$ 는 좌굴하중 N_{cr} 을, K_S 는 전체 강성행렬을 의미한다.

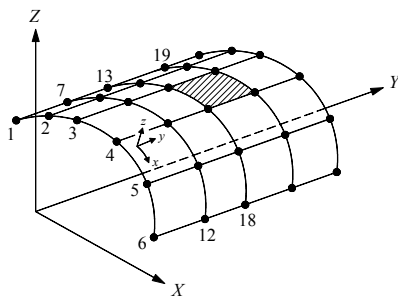


Fig. 3 유한요소 모델링

2.3 전단변형을 고려한 구성방정식

복합적층 셀요소의 변형률-변위, 응력-변형률 관계는 참고문헌(Reddy, 2003)에 제시되어 있으므로 그 부분은 생략하며 간단히 적층셀의 구성방정식을 요약하면 식 (4), (5)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij}^1 & A_{ij}^2 & 0 \\ A_{ij}^2 & A_{ij}^3 & 0 \\ 0 & 0 & E_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$A_{ij}^\alpha = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{NL} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_{k-1}^\alpha - h_k^\alpha) \quad (5a)$$

$$E_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^{NL} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left\{ (h_{k-1} - h_k) - \frac{4}{3h^2} (h_{k-1}^3 - h_k^3) \right\} \quad (5b)$$

여기서, NL 은 전체 층 적층수이며, k 는 적층단면의 임의의 층을 의미한다. A_{ij}^1 는 인장 강성도, A_{ij}^3 는 휨 강성도 그리고 A_{ij}^2 는 A_{ij}^1 와 A_{ij}^3 의 상호작용에 의한 연계강성도, E_{ij} 는 전단 강성도를 나타낸다. 두께방향 전단응력분포의 연속성을 보장받고, 경계조건을 만족시킬 수 있도록 전단보정계수를 사용하는 대신 Vinson and Chou(1975)에 의해 제시된 보간함수를 식 (5b)와 같이 적용하였다.

3. 해석 예 및 결과분석

본 연구에서는 원형 및 비원형 단면을 갖는 폐합셀의 기하학적 형상변화에 따른 좌굴하중 분포경향을 비교·분석하고자 한다. 기하학적 형상변화는 종횡비 (a/b), 길이비(L/R) 및 두께비(R/t)로 설정하였다. 여기서 $R(=c/2\pi)$ 은 Fig. 1에서 보듯이 등가반경으로 정의하며, c 는 원주길이를 $c=\pi(a+b)\beta$, $\beta=1+3e^2/\rho$, $\rho=10+(4-3e^2)^{1/2}$, $e=(a-b)/(a+b)$ 에서 계산된다 (Ramanujan, 1913). 그림과 표에 제시된 좌굴하중은 $P=N_{cr}R^2/(E_2t^3)$ 으로 무차원으로 표현하였다.

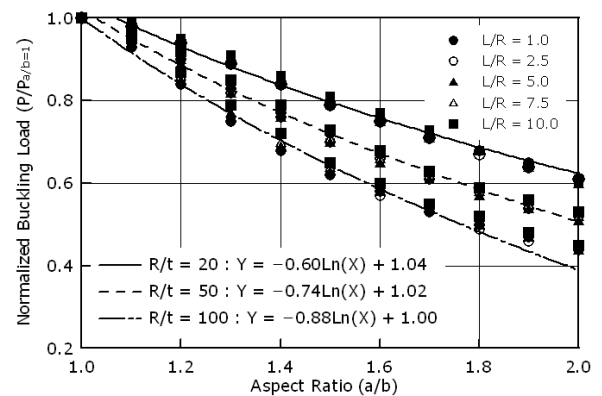
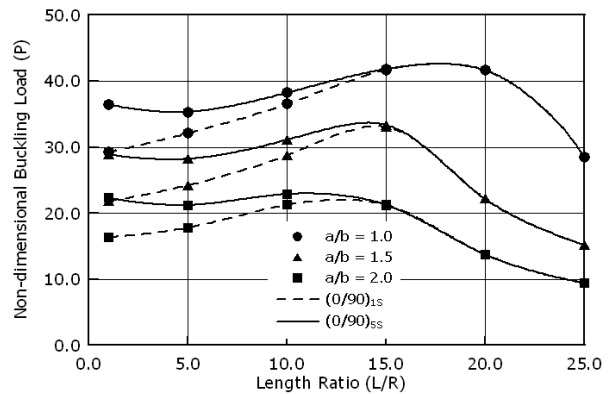


Fig. 4 길이비에 따른 임계좌굴하중

우선적으로, 프로그램(4EAS-FS)의 수치검증을 실시하였고(Table 1), 이를 토대로 대칭배열 복합폐합셀에 대해 기하학적 형상을 매개변수로 설정하여 좌굴해석을 수행하였다. 대칭배열은 연계강성인 B_{ij} 가 0이 되므로 구조적으로 보다 안정된 거동을 보이며, 이로 인

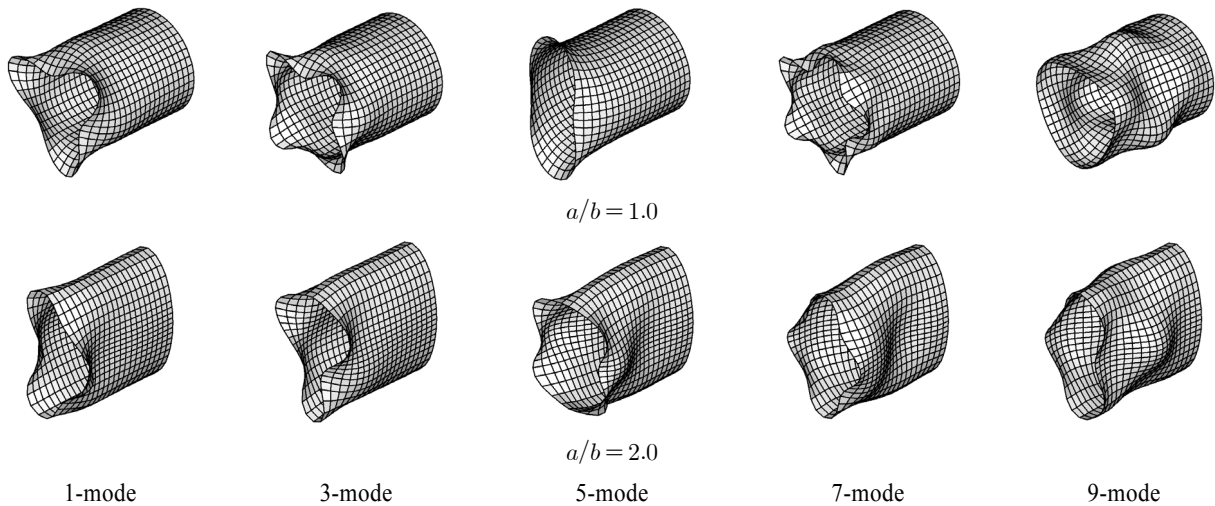


Fig. 5 대칭 크로스-플라이를 갖는 폐합셀의 좌굴모드 ($L/R=2.5$)

Table 2 탄성계수비와 중횡비에 따른 임계좌굴하중 ($L/R=5.0, (0/90)_{5s}$)

a/b	E_1/E_2			비교 %
	10	25	40	
1.00	17.972 (1.000)	28.399 (1.000)	32.341 (1.000)	49.15
1.25	15.934 (0.887)	25.791 (0.908)	32.589 (0.922)	51.11
1.50	13.180 (0.733)	21.933 (0.772)	28.228 (0.799)	53.31
1.75	10.948 (0.609)	18.786 (0.662)	24.520 (0.694)	55.35
2.00	9.271 (0.516)	16.271 (0.573)	21.237 (0.601)	56.35

해 실제 복합재료 구조물의 적층방법에서도 연계강성에 의한 영향을 최소화하기 위해 대칭배열을 선호한다. 단, 기본적인 적층수는 천경식 등(2006)의 연구결과에서 앞서 검토되어 있듯이 $(0/90)_{5s}$ 에 대해서 $n=5$ 이 상에서 일정한 좌굴하중을 갖는 것으로 나타나 기본 적층조건을 $(0/90)_{5s}$ 으로 설정하였다.

3.1 크로스-플라이 (Cross-Ply)

Fig. 4는 해석모델의 기하학적 형상변화에 따른 임계 좌굴하중을 비교하여 나타낸 것이다. 우선, 길이 L 이 증가하면서 해석모델의 좌굴하중이 서서히 증가하다가 감소하는 경향을 보이고 있다. 변곡점 전후로 모드형상을 살펴본 결과 2차원에서 3차원 좌굴형상을 나타낸다. 즉 변곡점 이상에서는 국부좌굴보다는 전체좌굴이 더 쉽게 발생함을 알 수 있다. 또한 중횡비 a/b 가 증가할수록 보다 작은 길이비(L/R)에서 전체좌굴이

발생하는 것을 알 수 있다. 비원형 단반경 축에 걸리는 곡면의 곡률이 작아져 상대적으로 그 방향으로 구조적 강성이 약해지기 때문에 국부적인 면외좌굴이 우선 발생한다. Fig. 4의 두 번째는 중횡비(a/b), 길이비 (L/R) 및 두께비(R/t) 등 다양한 기하학적 형상변화에 따른 원형($a/b=1.0$)에 대한 비원형 폐합셀의 좌굴하중을 비율로 표현하고 관계식을 산출한 것이다.

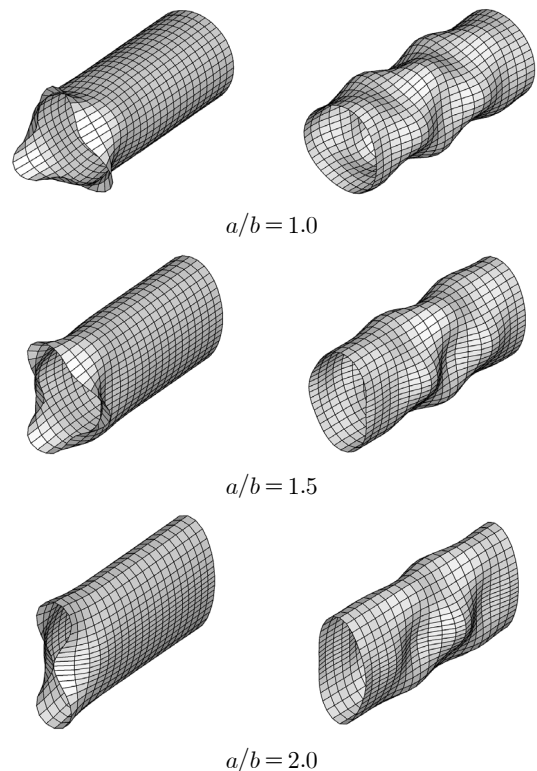


Fig. 6 좌굴모드 ($L/R=5, 1st \& 9th-mode$)

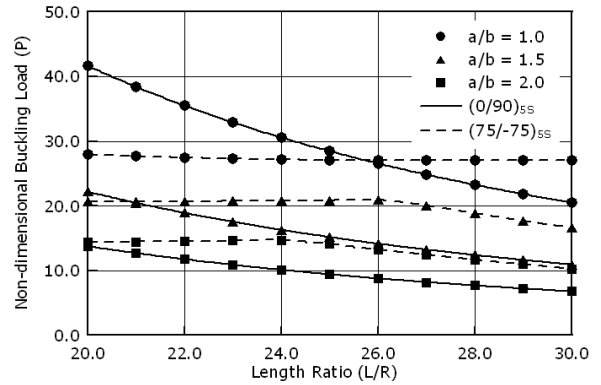
Table 2는 탄성계수비 E_1/E_2 에 따른 임계좌굴하중을 비교하여 나타낸 것이다. 종횡비 증가로 곡률($1/R_a$)이 상대적으로 작아지는 곡면에 의해 좌굴 안정성이 감소하는 것을 확인하였으며 그와 더불어 원형보다는 비원형 단면에서 재료적 강성에 크게 의존하는 것을 알 수 있다. 즉, 종횡비(a/b)가 1.0에서 2.0으로 커지면서 탄성계수비 변화에 따른 좌굴하중이 50%에서 56%이상 증가하였고, 탄성계수비 10과 40을 비교한 결과 종횡비에 따른 좌굴하중 감소율이 대략 40%에서 50%로 증가하였다. 따라서, 비원형 단면은 원형과 비교하여 탄성계수비에 대한 민감도가 상대적으로 크다.

Fig. 5은 원형($a/b=1$)과 비원형($a/b=2$)의 모드별 좌굴형상을 비교하여 나타낸 것이다. 비원형 폐합셀은 축에 대하여 대칭과 역대칭 형상을 반복하되 곡률이 작은 부분에서 좌굴이 발생하며, 고차모드에서는 측면 전체가 영향을 받는 것을 볼 수 있다. Fig. 6은 비교적 축방향 길이가 긴($L/R=5$) 경우에 한하여 종횡비별로 임계와 고차좌굴모드(9-mode)를 비교하여 나타낸 것이다. 비원형 단면으로 진행되면서 전반적으로 원주방향과 축방향으로 파형이 있는 체스판 형상의 좌굴이 측면에서 우선적으로 발생하는 것을 볼 수 있다.

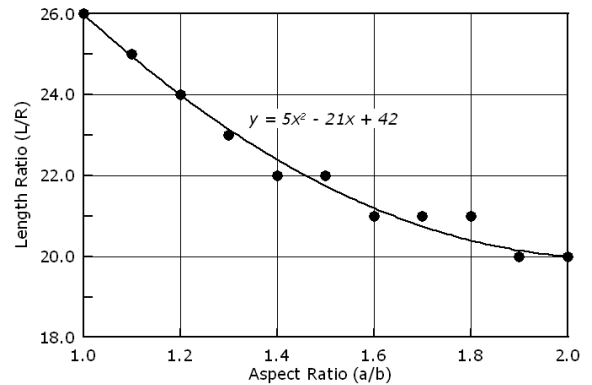
3.2 앵글-플라이 (Angle-Ply)

다음은 화이버 보강각도(θ)에 따른 좌굴하중을 종횡비(a/b)별로 비교·분석하였다. 역대칭 앵글-플라이 배열(예를 들어, $(\theta/-\theta)$, $(\theta/-\theta)_2$)은 휨과 인장 등에서 연계강성이 발생하여 구조물의 좌굴하중을 감소시키고, 예기치 않은 비틀림을 유발하는 등 거동에 큰 영향을 미친다(박근우, 2000; 천경식, 2002). 그러므로 대칭으로 적층한 경우에 한하여 기하학적 형상변화에 따른 좌굴하중 변화를 분석하였다.

Table 3은 화이버 보강각도에 대해서 우선 길이비(L/R)와 종횡비(a/b)에 따른 무차원 좌굴하중을 나타낸 것이다. 화이버 보강각도 ± 75 는 길이비에 크게 영



(a) 좌굴하중



(b) 좌굴관계식

Fig. 7 크로스와 앵글 플라이의 임계좌굴하중 비교

향을 받지 않으나 원주방향으로 보강된 경우 즉, ± 15 , ± 30 와 ± 45 는 대략 길이비 5 또는 10이후에 3차원 전체좌굴 특성을 보이면서 좌굴하중이 급격하게 작아지는 거동을 나타내었다. 또한 $(75/-75)_{5s}$ 보강시 길이비에 따른 좌굴하중은 $a/b=1.5$ 과 2.0에서 각각 $L/R=25$ 과 20 이후 $(0/90)_{5s}$ 보다 큰 좌굴하중을 보임으로써 안정성을 확보하는 것으로 나타났다. 이와 같은 현

Table 3 대칭 앵글-플라이를 갖는 폐합셀의 기하학적 형상변화에 따른 임계좌굴하중

적층배열	$a/b=1.0$				$a/b=1.5$				$a/b=2.0$			
	L/R											
	1	5	10	20	1	5	10	20	1	5	10	20
$(15/-15)_{5s}$	25.743	26.272	10.170	2.555	18.216	20.223	5.420	1.362	13.324	12.652	3.362	0.845
$(30/-30)_{5s}$	26.796	25.108	12.573	3.124	19.168	18.563	6.719	1.667	14.584	13.392	4.181	1.035
$(45/-45)_{5s}$	26.971	23.931	22.999	5.785	20.549	17.414	12.409	3.094	15.983	13.011	7.804	1.927
$(60/-60)_{5s}$	29.833	26.549	26.354	20.109	23.006	18.471	19.116	10.752	17.885	13.516	13.863	6.702
$(75/-75)_{5s}$	34.539	29.053	28.507	27.937	23.657	20.173	19.436	20.692	17.805	14.537	13.636	14.417
$(0/90)_{5s}$	36.456	35.341	38.252	41.661	28.887	28.228	31.127	22.185	22.309	21.237	22.905	13.774

상은 Fig. 7에서 보다 자세히 파악할 수 있다. 비원형 폐합셀은 특정 길이비 이후 크로스-플라이 $(0/90)_{5s}$ 보다 앵글-플라이 $(75/-75)_{5s}$ 가 구조적으로 안정하다. 이와 같은 현상을 토대로 해당 특정길이를 다양한 중횡비에 대해서 파악한 결과 즉, 중횡비별로 크로스보다 앵글-플라이에서 좌굴하중이 크게 발생하는 길이비를 산출한 결과 $y = 5x^2 - 21x + 42$ 에 집중되며, 그 그래프 우측 상단부는 $(75/-75)_{5s}$ 이 $(0/90)_{5s}$ 보다 축방향 압축좌굴에 대해서 안정함을 의미한다.

Fig. 8는 Table 3에서 가장 큰 좌굴하중을 보인 화이버 보강각도 75° 에 대해서 중횡비에 따른 좌굴형상을 모드별로 비교하여 나타낸 것이다. 한쪽 단부가 고정 지지된 해석모델의 임계좌굴모드는 자유단에서 우선적

으로 변형이 발생하며 이와 같은 형상은 고차 모드에 까지 나타난다. 또한, 좌굴모드는 중횡비에 따라 현저하게 다른 형상을 보인다. 양단 고정지지 또는 단순지지 등의 경계조건에서의 좌굴은 화이버의 강축방향을 따라 다양하게 발생하였을 것이며, 화이버 방향성으로 원형 및 비원형 폐합 복합셀의 좌굴거동을 예측하기가 매우 난해하다. 차후, 경계조건에 대한 추가연구를 통해 비원형 복합셀의 좌굴거동을 규명해야 할 것이다.

4. 결론

본 연구에서는 축방향 압축력을 받는 캔틸레버형 비원형 폐합셀을 해석모델로 설정하고, 중횡비, 길이비,

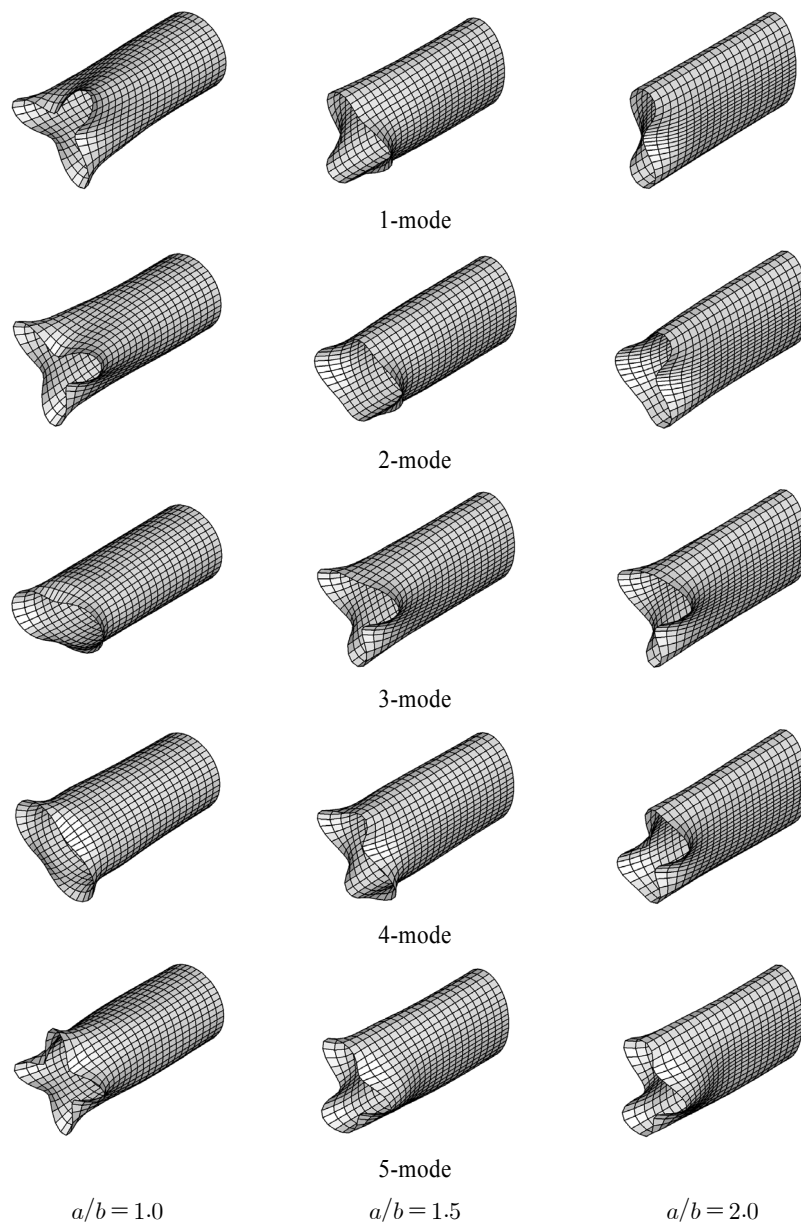


Fig. 8 대칭 앵글-플라이를 갖는 폐합셀의 좌굴모드 $((75/-75)_{5s}, L/R=5)$

두께비 및 하이버 보강각도 등의 매개변수 변화에 따른 좌굴해석을 수행하였다.

그 결과, 비원형 폐합셀은 상대적으로 작은 곡률을 갖는 곡면에서 국부좌굴이 우선 발생하며, 단면의 중횡비가 증가할수록 좌굴하중은 감소한다. 대칭 크로스-플라이를 갖는 경우 중횡비가 증가함에 따라 선형적으로 좌굴하중이 감소하였다. 또한 길이비 증가에 따른 좌굴모드는 중횡비별 특정 길이비 이상에서 3차원 좌굴형상(전체좌굴)를 나타내었으며, 이에 해당하는 길이비는 중횡비가 증가할수록 감소하였다.

또한, 본 연구에서는 대칭 크로스-플라이를 갖는 비원형 폐합셀의 좌굴하중을 원형 폐합셀에 대한 비율로 표현하되, 기하학적 매개변수별로 수식으로 제안하였으며(Fig. 4), 대칭-크로스 (0/90/...)ns 보다 앵글-플라이 ($\theta/-\theta/\dots$)ns 에서 좌굴하중이 더 크게 발생하는 중횡비별 길이비를 산출하고 이를 수식화하였다(Fig. 7).

최근 교각 기둥에 복합재료(FRP)를 랩핑(wrapping)하여 내진성능을 보강하고, 턴키(turn-key) 시장에서 상징성 및 미적요소 등이 부각되면서 원형이 아닌 다양한 비원형 형상의 기둥이 설계 적용된다는 점에서 앞으로 폐합셀로 내·외부 보강된 비원형 기둥(CFT with FRP)에 대한 연구가 필요하며, 본 연구결과는 그 토대가 될 것으로 기대한다. 추후 보다 다양한 경계조건에 대해 좌굴해석을 수행하고, 고차진단변형에 따른 영향을 분석할 필요가 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

- 김기두, 박대효 (2000) 유한요소법을 이용한 압축력을 받는 CFRP 원형 패널의 설계변수에 관한 연구, 대한토목학회 논문집, 제20권 6-A호, pp.901-911.
- 김승억, 최동호, 이동원, 김창성 (2001) 축하중을 받는 원통형 셀의 좌굴강도, 한국강구조학회 논문집, 제13권 2호, pp.191-200.
- 박근우, 임성순, 장석윤 (2000) 비등방성 원통형 셀의 안정성에 관한 연구, 한국강구조학회 논문집, 제12권 2호, pp.187-196.
- 박대용, 천경식, 장석윤 (2003) 복합적층판 해석을 위한 대체진단변형 및 비적합 등매개변수 4절점 평판요소, 대한토목학회 논문집, 제23권 6-A호, pp.1183-1192.
- 박원태, 천경식, 손병직 (2004) 채널단면의 기하학적 형상변화에 따른 캔틸레버 적층구조물의 안정성 연구, 구조물진단학회 논문집, 제8권 2호, pp.169-175.
- 윤석호 (1999) 비등방성 복합적층판 및 셀 구조의 힘, 자유진동 및 좌굴해석, 한국강구조학회 논문집, 제11권 1호, pp.55-67.
- 윤순중, 채수하 (1998) 직교이방성 판요소들로 구성된 직사각형 압축재의 국부좌굴 강도, 대한토목학회 논문집, 제18권 1-2권, pp.161-172.
- 장석윤 (2004) 횡리브로 보강된 복합적층 원통형 셀의 좌굴거동에 관한 연구, 한국강구조학회 논문집, 제16권 4호, pp.493-503.
- 천경식, 손병직, 장석윤 (2002) 대변형 효과를 고려한 비등방성 원통형 셀의 거동에 관한 연구, 한국강구조학회 논문집, 제14권 4호, pp. 489-498.
- 천경식, 손병직, 지효선 (2006) 다층 대칭배열된 비원형 적층판의 좌굴하중 및 모드해석, 대한토목학회, 제26권 3A호, pp.457-464.
- Andelfinger U. and Ramm E. (1993) EAS-elements for 2D-, 3D-, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.36, pp.1311-1337.
- Allman D.J. (1988) A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, pp.717-730.
- Bathe K.J and Dvorkin E.N. (1986) A formulation of general shell elements-the use of mixed formulation of tensorial components, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.22, pp.697-722.
- Chryssanthopoulos M.K., Baker M.J. and Dowling P.J. (1991) Imperfection modeling for buckling analysis of stiffened cylinders, *Journal of Structural Engineering*, Vol.117(7), pp.1998-2017.
- Donea J. and Lamain L.G. (1987) A modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.63, pp.183-207.
- Ganapathi M., Patel B.P. and Patel H.G. (2004) Free flexural vibration behavior of laminated angle-ply elliptical cylindrical shells, *Computers and Structures*, Vol.82, pp. 509-518.
- Jaunky, N., Knight Jr N.F., and Ambur, D.R. (1999) Buckling analysis of variable curvature panels and shells, *Composite Structures*, Vol.43(4), pp.321-329.
- Koiter W.T. (1956) Buckling and Post-buckling Behavior of a Cylindrical Panel under Axial Compression, National Luchtvaart Laboratorium, *Report and Transaction*, Vol.20, Report S. 476.
- Hughes T.J.R. and Brezzi F. (1989) On drilling degrees of freedom, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, pp.105-121.
- LUSAS 13.5 (2004), *Finite Element Analysis System*, Theory Manual, FEA, Ltd., London.
- Ramanujan S. (1913) Modular equations and approximations to π , *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol.45, pp.350-372
- Reddy J.N. (2003) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press.

23. Rikards R., Chate A. and Ozolinsh O. (2001) Analysis for buckling and vibrations of composite stiffened shells and plates, *Composite Structures*, Vol.51(4), pp.361-370.
24. Sambandam C.T., Patel B.P., Gupta S.S., Munot C.S. and Ganapathi M. (2003) Buckling characteristics of cross-ply elliptical cylinders under axial compression, *Composite Structures*, Vol.62(1), pp.7-17.
25. Simo J.C. and Rifai M.S. (1990) A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.29, pp.1595-1638.
26. Sobel L.H., Weller T. and Agarwal B.L. (1976) Buckling of cylindrical panels under axial compression, *Computers & Structures*, Vol.6, pp.29-35.
27. Vinson J.R. and Chou T.W. (1975) *Composite Materials and Their Use in Structures*, Applied Science Publishers Ltd.