

# 성능치 접근법을 이용한 시스템 신뢰도 기반 최적설계

## System Reliability-Based Design Optimization Using Performance Measure Approach

강수창\* · 고현무\*\*

Kang, Soo-Chang · Koh, Hyun-Moo

### Abstract

Structural design requires simultaneously to ensure safety by considering quantitatively uncertainties in the applied loadings, material properties and fabrication error and to maximize economical efficiency. As a solution, system reliability-based design optimization (SRBDO), which takes into consideration both uncertainties and economical efficiency, has been extensively researched and numerous attempts have been done to apply it to structural design. Contrary to conventional deterministic optimization, SRBDO involves the evaluation of component and system probabilistic constraints. However, because of the complicated algorithm for calculating component reliability indices and system reliability, excessive computational time is required when the large-scale finite element analysis is involved in evaluating the probabilistic constraints. Accordingly, an algorithm for SRBDO exhibiting improved stability and efficiency needs to be developed for the large-scale problems. In this study, a more stable and efficient SRBDO based on the performance measure approach (PMA) is developed. PMA shows good performance when it is applied to reliability-based design optimization (RBDO) which has only component probabilistic constraints. However, PMA could not be applied to SRBDO because PMA only calculates the probabilistic performance measure for limit state functions and does not evaluate the reliability indices. In order to overcome these difficulties, the decoupled algorithm is proposed where RBDO based on PMA is sequentially performed with updated target component reliability indices until the calculated system reliability index approaches the target system reliability index. Through a mathematical problem and ten-bar truss problem, the proposed method shows better convergence and efficiency than other approaches.

**Keywords** : *reliability-based design optimization(RBDO), system reliability-based design optimization(SRBDO), performance measure approach(PMA), probabilistic constraints*

### 요 지

구조물을 설계함에 있어서 작용하중, 재료특성 및 제작오차 등의 불확실성을 고려하여 안전성을 확보함과 동시에 경제적 효율성을 고려해야 한다. 이에 대한 가장 합리적인 해결방안으로서, 불확실성과 경제성을 동시에 고려하는 시스템 신뢰도 기반 최적설계 분야에 대한 관심이 증대되었으며 이를 구조물 설계에 적용하기 위한 많은 시도가 이루어졌다. 기존의 확정론적 최적설계와는 다르게 시스템 신뢰도 기반 최적설계는 요소 확률구속조건 및 시스템 확률구속조건에 대한 평가를 수행해야 한다. 하지만, 요소 신뢰도 지수 및 시스템 신뢰도 지수를 매 확률구속조건을 평가할 때마다 산정해야 하므로 대형구조 해석이 필요한 경우에는 과도한 계산시간이 요구된다. 따라서, 대형구조해석을 필요로 하는 경우에 대하여 보다 효율적인 SRBDO 알고리즘 개발이 필요하다고 할 수 있다. 이 연구에서는 성능치 접근법을 이용하여 보다 더 안정적이고 효율적인 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 제안하였다. 신뢰도 기반 최적설계에 효과적으로 적용된 성능치 접근법은 직접적으로 신뢰도 지수 및 파괴확률을 산정할 수 없어 시스템 신뢰도 기반 최적설계에는 적용할 수 없는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위해서 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 신뢰도 기반 최적설계 부분과 시스템 신뢰도 해석만을 수행하는 신뢰도 기반 최적설계 부분으로 나누어, 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 신뢰도 기반 최적설계에 성능치 접근법을 적용하였다. 시스템 신뢰도 지수가 목표 시스템 신뢰도 지수를 만족할 때까지 각 요소 한계상태에 대한 목표 신뢰도 지수를 변경하면서 신뢰도 기반 최적설계를 수행하였다. 수학적 문제 및 트러스 문제에 대하여 제안된 방법을 적용한 결과, 수렴성 및 효율성 측면에서 우수한 성능을 보여줌을 확인하였다.

**핵심용어** : 신뢰도 기반 최적설계, 시스템 신뢰도 기반 최적설계, 성능치 접근법, 확률 구속조건

\*정회원 · 교신저자 · 포항산업과학연구원 강구조연구소 선임연구원 · 공학박사 (E-mail : sckang@rist.re.kr)

\*\*정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 교수 · 공학박사 (E-mail : hmkoh@snu.ac.kr)

## 1. 서 론

구조물의 설계에는 본질적으로 재료성질, 작용하중 및 시공오차 등의 불확실성이 내포되어 있으며, 이러한 불확실성과 경제성을 동시에 고려한 설계가 합리적인 설계라 할 수 있다. 기존의 확정론적 최적설계에서는 이러한 불확실성을 고려하기 위하여 주로 과거의 경험적 사실에 기반한 안전계수를 사용하였지만, 과거에 설계경험이 없는 새로운 구조물의 경우에는 안전계수의 선정에 한계가 있으며, 구조물에 요구되는 안전성 및 신뢰도가 보장되지 않는다. 이러한 문제를 해결하기 위해 최적설계 및 신뢰성 해석을 동시에 수행하는 신뢰도 기반 최적설계(Reliability-based design optimization, RBDO)에 대한 연구가 수행되어 왔다(조효남 등, 1999; Moses, 1997; Frangopol and Maute, 2003; 강수창, 고휘문, 2006; 함대기 등, 2006).

신뢰도 기반 최적설계는 확정론적 최적설계와 달리 확률구속조건을 가지고 있으며 각 확률구속조건에 대한 신뢰도 해석으로부터 얻어진 신뢰도 지수 및 파괴확률이 목표 신뢰도 지수 혹은 목표 파괴확률을 만족하는 영역 내에서 최적설계값을 구하는 것이다. 이때, 확률구속조건을 평가하는 방법에 따라 신뢰도 지수 접근법(Reliability index approach, RIA)(Enevoldsen and Sorensen, 1994; Chandu and Grandi, 1995, Lin and Frangopol, 1996) 및 성능치 접근법(Performance measure approach, PMA)(Tu 등, 1999; Lee 등, 2002; Youn 등, 2003; Youn and Choi, 2004a; Youn and Choi, 2004b)이 있다. 일반적으로 비교적 최근에 개발된 PMA가 RIA보다 수렴성 및 계산 효율성 측면에서 더 우수하다는 비교연구가 수행된바 있다(Youn 등, 2003; Youn and Choi, 2004b). 하지만 이러한 연구는 주로 각각의 한계상태에 대한 요소 신뢰도만을 고려하였을 뿐 모든 한계상태를 동시에 고려한 시스템 신뢰도는 고려하지 않았다.

시스템 신뢰도 해석은 국내외 연구자들에 의해 많은 응용 분야에 적용되어 오고 있다(조효남, 신재철, 1995; 양승이, 한상철, 2001; 박미연 등, 2006; Frangopol and Imai, 2004). 하지만 이러한 시스템 신뢰도를 신뢰도 기반 최적설계에 적용한 연구는 한계상태식이 양함수(explicit function)이거나 단순한 구조해석이 포함된 경우에만 적용(Kim and Wen, 1990; Frangopol and Hendawi, 1994; Al-Harthly and Frangopol, 1997; Moses, 1997)되었을 뿐 복잡한 구조해석을 요구하는 문제에는 적용된 바가 없다. 이는 최적화 과정에서 많은 한계상태평가 혹은 구조해석이 요구되어 과도한 계산시간이 소모되기 때문이다. 또한 시스템은 한계상태식들 간의 교집합 혹은 합집합의 연산자로 구성되어 있기 때문에 시스템 신뢰도 지수에 대한 미분정보를 구하기 어려우며, 이로 인해 수렴성이 크게 저하되는 것도 또 하나의 이유이다. 따라서, 보다 수렴성이 좋고 효율적인 시스템 신뢰도 기반 최적설계 기법의 개발이 필요하다고 할 수 있다.

이 논문에서는 수치적으로 안정되고 계산시간을 효과적으로 줄여주는 시스템 신뢰도 기반 최적설계 기법을 제안하고자 한다. Yi 등(2008)의 기존 연구에서 PMA는 직접

적으로 신뢰도 지수 및 파괴확률을 산정할 수 없어 시스템 신뢰도 기반 최적설계에는 적용할 수 없다라는 단점이 제기된 바 있다. 이 단점을 해결하기 위하여 Aoues 등(2008)에 의해 제안된 알고리즘을 이용하여 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 신뢰도 기반 최적설계 부분과 시스템 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계 부분으로 나누어 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 신뢰도 기반 최적설계에 PMA를 적용하였다. 제안된 방법의 효율성을 검토하기 위해서 수치적 문제 및 10-바 트러스 문제에 대하여 시스템 신뢰도 기반 최적설계를 수행하였다.

## 2. 신뢰도 기반 최적설계의 정의

신뢰도 기반 최적설계는 다음 식 (1)과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to } P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) \leq P_f^i, i = 1, \dots, NC \\ & \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ 는  $n$ 개의 설계변수를 가지는 벡터,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 는  $m$ 개의 확률변수를 갖는 벡터,  $f(\mathbf{d})$ 는 목적함수,  $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 는  $i$ 번째 한계상태식,  $NC$ 는 확률구속조건 개수,  $P_f^i$ 는  $i$ 번째 확률구속조건 목표파괴확률,  $\mathbf{d}^L, \mathbf{d}^U$ 은 각각 설계변수벡터의 하한 및 상한벡터이다, 즉, 신뢰도 기반 최적설계는 각각의 한계상태에 대한 파괴확률이 목표파괴확률보다 작아야 한다는 조건을 만족하는 설계변수를 찾는 문제이다.

한계상태식  $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 에 대한 파괴확률은 다음 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) = F_{G_i}(\mathbf{d}, 0) = \int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

여기서,  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 는  $\mathbf{x}$ 의 결합확률밀도함수,  $F_{G_i}(\mathbf{d}, 0)$ 는 누적확률분포함수이다. 또한 목표 파괴확률  $P_f^i$ 는 목표 신뢰도 지수  $\beta_{fi}$ 와 근사적으로 다음 식 (3)과 같은 관계를 가지고 있다.

$$P_f^i = \Phi(-\beta_{fi}) \quad (3)$$

여기서,  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규누적분포함수이다.

식 (1)에서 확률구속조건  $P(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0) \leq P_f^i$ 는 다음 식 (4) 및 (5)와 같이 두가지 방법으로 표현된다(Tu 등, 1999; Youn and Choi, 2004a).

$$\beta_{fi}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) = -\Phi^{-1}(F_{G_i}(\mathbf{d}, 0)) \geq \beta_{fi} \quad (4)$$

$$G_{pi}(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \beta_{fi}) = F_{G_i}^{-1}(\mathbf{d}, \Phi(-\beta_{fi})) \geq 0 \quad (5)$$

여기서,  $\beta_{fi}(\mathbf{d}, \mathbf{x})$  및  $G_{pi}(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \beta_{fi})$ 는 각각  $i$ 번째 한계상태식에 대한 신뢰도 지수(Reliability index) 및 확률성능치(Probabilistic performance measure)이다. 식 (4)처럼 신뢰도 지수로 표현되는 확률구속조건을 이용한 방법을 RIA, 식 (5)처럼 확률성능치를 적용한 방법을 PMA라고 한다.

### 3. 신뢰도 기반 최적설계에서의 확률구속조건 평가

#### 3.1. 신뢰도 지수 접근법(Reliability index approach, RIA)

식 (4)와 같은 신뢰도 지수 계산을 수행하기 위한 직·간접적인 방법으로는 FORM(First Order Reliability Method) (Hasofer and Lind, 1974; Rackwitz and Fiessler, 1978)과 MCS(Monte Carlo Simulation) (Bjorager, 1988) 등이 있다. FORM을 적용하여 식 (4)의 신뢰도 지수를 구하기 위해서는 먼저 비정규분포 확률변수  $\mathbf{x}$ 를 표준정규분포 확률변수  $\mathbf{u}$ 로 변환하고(Rackwitz and Fiessler, 1978), 다음 식 (6)과 같이 한 개의 구속조건을 갖는 최적화를 수행한다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } |\mathbf{u}| \\ & \text{subject to } G(\mathbf{d}, \mathbf{u})=0 \end{aligned} \quad (6)$$

이로부터 얻어진 최적값인 MPP(Most Probable Point)가  $\mathbf{u}_{RIA}^*$  이라 했을 때, 신뢰도 지수는 원점에서 한계상태식까지의 최단거리인  $\beta_i(\mathbf{d}) = |\mathbf{u}_{RIA}^*|$ 로 표현된다.

#### 3.2. 성능치 접근법(Performance measure approach, PMA)

PMA에서도 확률구속조건 식 (5)를 평가하기 위해서는 먼저 RIA에서와 마찬가지로 확률변수  $\mathbf{x}$ 를 표준정규분포 확률변수  $\mathbf{u}$ 로 변환해야 한다. 이때 확률성능치는  $\mathbf{u}$ 공간상에서 한 개의 구속조건을 갖는 최적화 문제로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } G(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \\ & \text{subject to } |\mathbf{u}| = \beta_i \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $|\mathbf{u}| = \beta_i$  위의 최적값인 MPP를  $\mathbf{u}_{PMA}^*$  이라 했을 때, 확률성능치는  $G_{pi}(\mathbf{d}) = G(\mathbf{d}, T^{-1}(\mathbf{u}_{PMA}^*))$ 로 나타내어진다.

식 (7)의 최적화 문제를 푸는 수치해석적 알고리즘으로는 AMV(Advanced Mean-Value)방법, CMV(Conjugate Mean-Value)방법 및 HMV(Hybrid Mean-Value)방법(Youn, 2003) 등이 있다. AMV 방법은 한계상태식이 볼록함수(convex function)인 경우에는 빠른 수렴성을 보이지만 오목함수(concave function)인 경우에는 수렴이 느리거나 발산하는 성질을 갖고 있다. 반면에 CMV는 AMV 방법과는 달리 오목함수인 경우에는 매우 효율적이지만, 볼록함수인 경우에는 그 수렴이 느리다. 이러한 AMV와 CMV 장점을 결합한 방법이 HMV 방법이다. 이 방법은 매 반복계산 과정에서, MPP에서의 함수 형태가 볼록함수인 경우에는 AMV 방법을 적용하고 오목함수인 경우에는 CMV 방법을 적용한다. HMV 방법에서 함수형태를 판단하는 식은 다음 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta^k &= (\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1})) \cdot (\mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) - \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})) \\ \text{where } \mathbf{n}(\mathbf{u}^k) &= -\frac{\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{d}, \mathbf{u}^k)}{\|\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{d}, \mathbf{u}^k)\|} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $\mathbf{n}^k$ 는  $k$ 번째  $\mathbf{u}^k$ 에서의 한계상태식에 대한 최대급경사방향(Steepest descent direction)이다.  $\zeta^k$ 이 부호에 따라  $k+1$ 번째의 설계점  $\mathbf{u}^{k+1}$ 은 다음 식 (9)로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \beta_i \mathbf{n}(\mathbf{u}^k) \quad \text{when } \text{sign}(\zeta^k) > 0 \text{ or } 0 \leq k \leq 1 \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \beta_i \frac{\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})}{\|\mathbf{n}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-1}) + \mathbf{n}(\mathbf{u}^{k-2})\|} \quad \text{when } \text{sign}(\zeta^k) \leq 0 \text{ and } k \geq 2 \end{aligned} \quad (9)$$

### 4. 기존의 시스템 신뢰도 기반 최적설계

신뢰도 기반 최적설계는 식 (1)에서와 같이 각각의 한계상태에 대한 요소 신뢰도 해석을 수행하여 확률구속조건을 평가한다. 하지만, 구조물의 파괴는 하나의 한계상태보다는 여러 개의 한계상태에 의해 지배되며, 각각의 한계상태들은 독립적이지 않으며 서로 연관되어 있다. 따라서, 구조물 전체의 파괴 거동을 설명하기 위해서는 한계상태간의 상관관계를 고려하여 구조물의 시스템 신뢰도를 평가하는 것이 필요하다. 시스템의 한계상태는 각 한계상태식간의 논리합수(교집합 혹은 합집합)로 이루어져 있으며 직렬, 병렬 등의 시스템으로 구성된다. 직렬 시스템은 각각의 한계상태들이 합집합 연산자로 이루어진 경우이며 그림 1의 정정 트러스와 같이 요소 중 하나의 파괴도 전체 시스템의 파괴를 유발하는 경우이다. 병렬시스템은 그림 2의 병렬 트러스 요소와 같이 모든 요소의 파괴가 전체 시스템의 파괴로 연결되는 경우이며 수학적으로 교집합 연산자의 조합으로 정의할 수 있다.

시스템에 대한 파괴확률을 산정하는 기법으로는 최근에 Linear programming을 이용한 방법(Song and Der Kiureghian, 2003) 및 Matrix 기반 시스템 신뢰도 평가 방법(Kang 등, 2008) 등이 개발되었지만 이 논문에서는 일반적으로 가장 많이 사용되는 Ditlevsen(1979)의 상·하한기법(Bound technique)을 이용하여 시스템의 파괴확률 및 신뢰도 지수를 산정하였다.

시스템 신뢰도 지수에 대한 구속조건을 갖는 문제를 시스템 신뢰도 기반 최적설계라 하며 다음 식 (10)과 같이 정의할 수 있다(Moses, 1997).

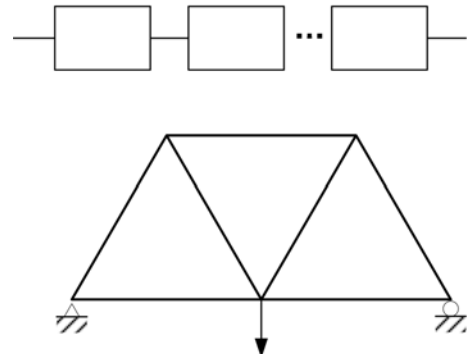


그림 1. 직렬 시스템

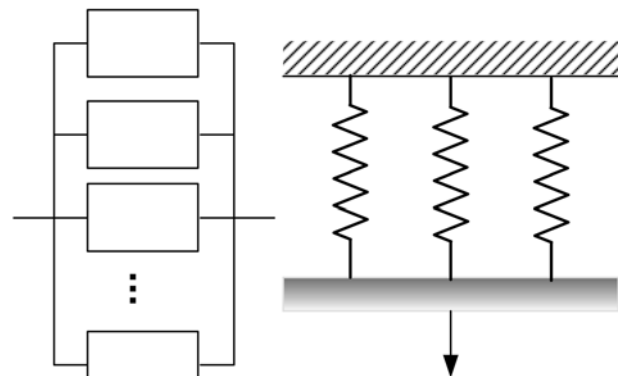


그림 2. 병렬 시스템

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to} && \beta_{\text{sys}}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq \beta_{t\_sys} \\ & && \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $\beta_{\text{sys}}(\mathbf{d}, \mathbf{x})$ 는 시스템 신뢰도 지수이고  $\beta_{t\_sys}$ 는 목표 시스템 신뢰도 지수이다. 식 (10)과 같은 최적화 문제를 풀 경우, 비록 시스템 신뢰도 지수에 대한 구속조건은 만족하지만 요소별 신뢰도 지수에 대해서는 만족하지 않을 수 있기 때문에 식 (11)과 같이 확률구속조건이 요소 및 시스템 신뢰도로 이루어진 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘이 제안되었다(Kim and Wen, 1990; Frangopol and Hendawi, 1994; Al-Harthy and Frangopol, 1997).

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to} && \beta_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq \beta_{ti}, i = 1, \dots, NC \\ & && \beta_{\text{sys}}(\mathbf{d}) \geq \beta_{t\_sys} \\ & && \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서 확률구속조건을 평가하기 위해서는 각 한계상태에 대한 신뢰도 평가뿐만 아니라 전체 한계상태에 대한 시스템 신뢰도도 함께 평가되어야 하기 때문에 복잡한 구조물에 대해서는 과도한 해석시간이 요구된다. 또한, 식 (11)의 해를 구하는 최적설계 알고리즘으로는 일반적으로 SQP(Sequential Quadratic Programming)(Rao, 1996)가 많이 사용되는데, 이는 각 설계변수에 대한 시스템 신뢰도 지수의 미분정보를 필요로 한다. 하지만, 교집합 혹은 합집합 연산자로 구성된 시스템의 신뢰도에 대한 미분정보를 구하기 어렵기 때문에 수치적 불안정성이 높아 수렴성이 매우 떨어진다. 따라서, 보다 안정적으로 수렴하면서 효율적인 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘 개발이 필요하다고 할 수 있다.

## 5. PMA기법을 이용한 시스템 신뢰도 기반 최적설계

이 논문에서는 PMA기법을 이용한 시스템 신뢰도 기반 최적설계 기법을 제안한다. 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계 부분과 시스템 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계 부분으로 나누어 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계에 PMA를 적용하였다. 목표 시스템 신뢰도가 만족될 때까지 요소별 목표 신뢰도 지수를 갱신해나가는 것으로 식 (12)와 식 (13)과 같은 두 개의 최적화 과정을 반복해서 수행한다.

먼저 다음 식 (12)와 같은 신뢰도 기반 최적설계를 수행한다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{d}) \\ & \text{subject to} && G_{pi}(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \beta_{ti}^{\text{updated}}) \geq 0, i = 1, \dots, NC \\ & && \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\beta_{ti}^{\text{updated}}$  및  $G_{pi}(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \beta_{ti}^{\text{updated}})$ 는 각각  $i$ 번째 한계상태식에 대한 갱신된 목표 신뢰도 지수 및 확률성능치이다. 식 (12)의 확률구속조건을 평가하기 위해서 PMA를 수행하고 이때 MPP는  $\|\mathbf{u}\| = \beta_{ti}^{\text{updated}}$  위에 존재하게 된다.

식 (12)로부터 얻어진 설계변수  $\mathbf{d}$ 로 부터 계산된 각각의 한계상태식에 대하여 FORM을 이용한 신뢰성 해석을 수행하여 신뢰도 지수를 계산한다. Ditlevsen의 상·하한기법으

로 시스템 신뢰도 지수를 구하기 위해서는 상관계수 행렬  $\rho$ 를 결정해야 하는데, 이 상관계수 행렬의 요소인  $\rho_{ij}$ 는 원점에서  $i$ 번째 한계상태식 MPP까지의 방향벡터와 원점에서  $j$ 번째 한계상태식 MPP까지의 방향벡터가 이루는 각에 대한 코사인 값으로부터 결정된다. 얻어진 신뢰도 지수 및 상관관계 행렬을 이용하여 다음 식 (13)과 같은 최적화 과정을 수행한다. 이는 시스템 신뢰도 지수가 목표 시스템 신뢰도 지수보다 크다는 조건하에서, 갱신된 목표 신뢰도 지수와 실제 신뢰도 지수와의 평균자승(Mean square)차이를 최소화하는 것이다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{i=1}^{NC} (\beta_{ti}^{\text{updated}} - \beta_i)^2 \\ & \text{subject to} && \beta_{\text{sys}}(\beta_{ti}^{\text{updated}}, \rho) \geq \beta_{t\_sys} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,  $\beta_{ti}^{\text{updated}}$ 는 최적화 알고리즘으로부터 구해야 할 설계변수가 되며,  $\beta_{\text{sys}}(\beta_{ti}^{\text{updated}}, \rho)$ 는 구해야 할 시스템 신뢰도 지수를 뜻한다. 상관계수 행렬인  $\rho$ 는  $\beta_{ti}^{\text{updated}}$ 가 변해도 일정하다는 가정을 도입하면  $\beta_{\text{sys}}(\beta_{ti}^{\text{updated}}, \rho)$ 를 평가함에 있어서 한계상태에 대한 함수평가 혹은 구조해석을 수행할 필요가 없게 된다. 식 (13)으로부터 얻어진 최적값인  $\beta_{ti}^{\text{updated}}$ 는 다시 식 (12)에 적용하여 새로운 설계변수를 찾는다. 제안된 방법의 구체적인 알고리즘은 그림 3과 같으며 그 절차는 다음과 같다.

Step 1: 설계변수, 확률변수, 한계상태식 및 초기 요소별 목표 신뢰도 지수를 정의한다.

Step 2: 식 (12)에 대해서 PMA를 이용한 신뢰도 기반 최적설계를 수행하여 최적 설계변수  $\mathbf{d}^*$ 를 결정한다.

Step 3: Step 2에서 결정된 최적 설계변수  $\mathbf{d}^*$ 를 적용한 각 한계상태에 대하여 신뢰도 해석(FORM)을 수행하고, 이로부터 신뢰도 지수  $\beta_i$ , 상관계수 행렬  $\rho$  및 시스템 신뢰도 지수를 결정한다. 시스템 신뢰도 수가 목표 시스템 신뢰도 지수와 부합하지 않을 경우 다음 단계를 수행한다.

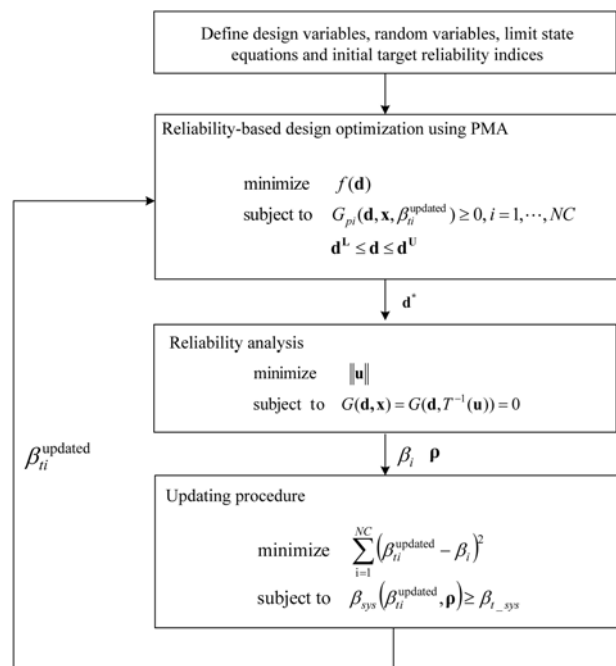


그림 3. PMA를 이용한 시스템 신뢰도 기반 최적설계 흐름도

Step 4: 식 (13)을 풀어 시스템의 신뢰도 지수가 목표 시스템 신뢰도 지수와 부합되도록 목표 신뢰도 지수  $\beta_{ti}^{updated}$  를 갱신한다.

Step 5: 갱신된 목표 신뢰도 지수  $\beta_{ti}^{updated}$  에 대해서 시스템 신뢰도 지수가 목표 시스템 신뢰도 지수와 부합될 때까지 Step 2~Step 4 과정을 반복해서 수행한다.

## 6. 해석예제

### 6.1 예제 1 : 수학적 문제

개발된 방법의 효용성을 검증하기 위하여 기존 논문에서 제시되었던 수학적 문제(Youn and Choi, 2004b)에 시스템 신뢰도에 대한 구속조건을 추가하여 해석하였다. 이 문제는 다음 식 (14)와 같이 2개의 설계변수, 2개의 확률변수 및 3개의 확률구속조건으로 구성된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{d}) = d_1 + d_2 \\ & \text{subject to } P(G_i(\mathbf{x}) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_{ti}), i = 1, 2, 3 \\ & \beta_{sys}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq \beta_{t\_sys} \\ & 0 \leq d_i \leq 10, i = 1, 2 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 세 개의 한계상태식은 다음 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 / 20 - 1 \\ G_2(\mathbf{x}) &= (x_1 + x_2 - 5)^2 / 30 + (x_1 - x_2 - 12)^2 / 120 - 1 \\ G_3(\mathbf{x}) &= 80 / (x_1^5 + 8x_2 - 5) - 1 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 설계변수는  $\mathbf{d} = [d_1, d_2]$  이고, 확률변수는  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$  이며 설계변수  $d_1$  및  $d_2$ 는 확률변수  $x_1$  및  $x_2$ 의 평균값이다. 확률변수는 정규분포를 따르고 표준편차는 모두 0.3 이다. 초기 설계변수 값은  $\mathbf{d}^0 = [5.0, 5.0]^T$  이고, 목표 신뢰도 지수  $\beta_{ti} = 3.0$  이며 시스템 목표 신뢰도 지수  $\beta_{t\_sys} = 3.0$  이다. 시스템 신뢰도 기반 최적설계를 수행하기 위해서는 확률변수에 대한 한계상태식의 미분값이 필요하게 되는데, 비록 식 (15)가 양함수이기 때문에 직접적으로 그 미분값을 구할 수 있지만 구조해석이 포함된 음함수로 가정하고 FFD(Forward Finite Difference)방법을 사용하여 미분값을 구하였다.

먼저 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건을 갖는 식

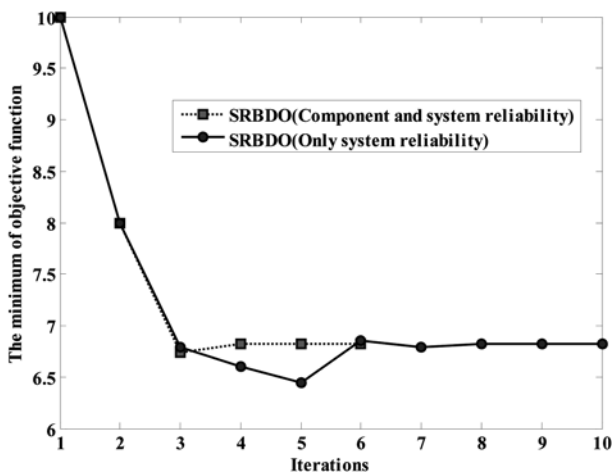


그림 4. 예제 1에서 반복과정에 따른 목적함수 최소값의 변화추이

표 1. 예제 1에서 반복과정에 따른 설계변수의 변화추이

Iterations	SRBDO (Only system reliability)		SRBDO (Component and system reliability)	
	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>
1	5.0000	5.0000	5.0000	5.0000
2	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
3	3.0883	3.6991	3.3985	3.3433
4	3.4884	3.1186	3.4197	3.4000
5	3.1348	3.3106	3.4264	3.3937
6	3.3701	3.4813	3.4218	3.3992
7	3.4233	3.3684		
8	3.4198	3.3990		
9	3.4229	3.3983		
10	3.4229	3.3982		

표 2. 예제 1에서 각 한계상태식을 평가하는 횟수

	Number of function evaluations (NFE)			
	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>3</sub>	Total
SRBDO (Component and system reliability)	485	1655	604	2744
SRBDO (Only system reliability)	794	2697	1239	4730

(10)과 요소 및 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건을 갖는 식 (11)에 대하여 해석을 수행하였다. 그림 4는 반복과정에 따른 목적함수의 최소값의 변화추이를 나타내고 표 1은 반복과정에 따른 설계변수의 변화추이를 나타낸다. 요소 및 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건을 모두 고려한 경우가 시스템 신뢰도만 확률구속조건으로 고려한 것보다 좀 더 안정적으로 빨리 수렴함을 알 수 있다. 표 2에서는 그림 4와 표 1에서의 최종적인 결과가 나올 때까지의 각각의 한계상태식을 평가한 횟수(Number of function evaluation, NFE)를 나타내었다. 비록 요소 및 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건을 갖는 경우가 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건만을 갖는 경우보다 더 많은 구속조건을 갖고 있지만, 수렴성은 더 우수하여 전체 NFE는 더 적음을 알 수 있다.

식 (14)에 대해서 요소 및 시스템 신뢰도에 대한 확률구속조건을 모두 고려한 시스템 신뢰도 기반 최적설계와 RIA 및 PMA를 이용하여 식 (12)와 식 (13)을 순차적으로 푸는 시스템 신뢰도 기반 최적설계(Sequential SRBDO)를 수행하였다. 그림 5와 6은 초기 목표 신뢰도 지수  $\beta_{ti}^{updated} = 3.0$  인 경우에 제안된 방법(Sequential SRBDO(PMA))에 의한 시스템 신뢰도 지수의 변화추이 및 목적함수 최소값의 변화추이를 나타낸다. 이로부터 제안된 방법이 원만하게 수렴됨을 확인할 수 있다. 표 3은 SRBDO, RIA를 이용한 Sequential SRBDO 및 PMA를 이용한 Sequential SRBDO에 대한 결과를 나타낸다. SRBDO는 2744번의 함수평가가 필요한 반면 제안된 방법은 1514번의 함수평가만을 필요로 함을 알 수 있다. 또한 요소별 신뢰도 지수에서 SRBDO의 최소는

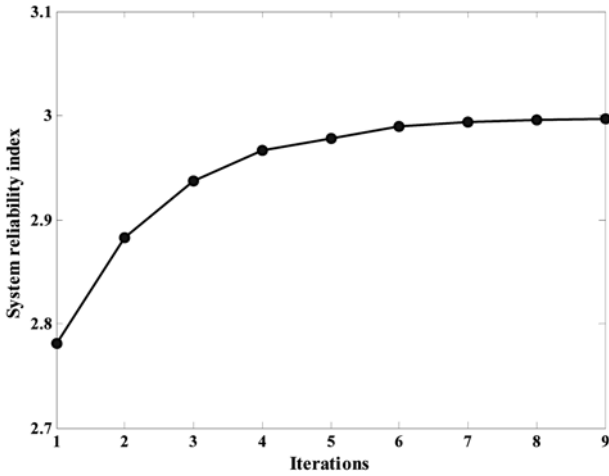


그림 5. Sequential SRBDO(PMA)기법에 의한 시스템 신뢰도 지수의 변화추이

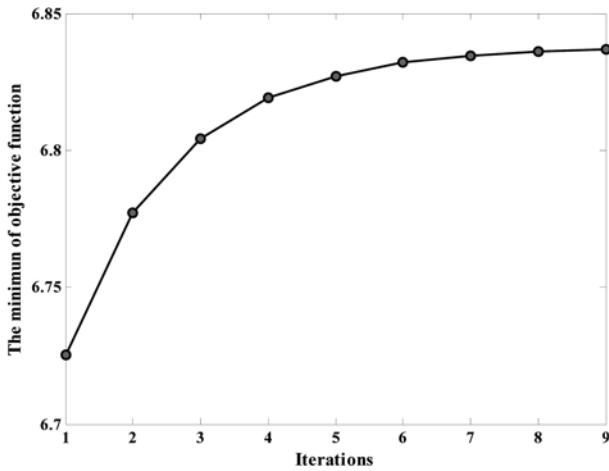


그림 6. Sequential SRBDO(PMA)기법에 의한 목적함수 최소값의 변화추이

3.0971이고 최대는 9.8759인 반면 SRBDO-PMA에서는 최소가 3.1943이고 최대는 9.7994이다. 즉 제안된 방법은 목표 시스템 신뢰도 지수를 만족하면서 동시에 가장 낮은(위험한) 요소 신뢰도 지수를 높여주고 높은 요소 신뢰도 지수는 낮추어, 보다 균형있는 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

### 6.2 예제 2 : 10-bar 트러스

검증예제로 다음 그림 7과 같은 10-bar 트러스(Choi 등, 2007; Yi 등 2008)의 단면최적화 문제에 시스템 신뢰도 구속조건을 추가하여 SRBDO, Sequential SRBDO(RIA) 및 Sequential SRBDO(PMA) 방법을 이용하여 해석하였다.

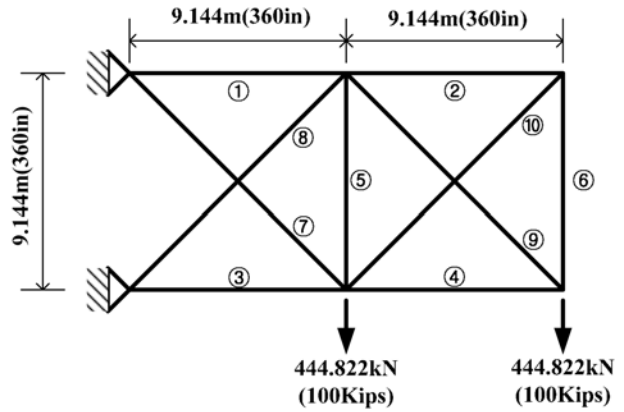


그림 7. 10-bar 트러스 구조물

시스템 신뢰도 기반 최적화 문제는 다음 식 (16)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } V = \sum_{i=1}^{10} A_i L_i \\
 &\text{subject to } P(G_i(\mathbf{A}, R) \leq 0) \leq \Phi(-\beta_{ti}) \quad (i=1, \dots, 10) \\
 &\quad \beta_{sys}(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq \beta_{t\_sys} \\
 &\quad G_i = R - |\sigma_i(\mathbf{A})| \quad (i=1, \dots, 10) \\
 &\quad 0.1 \leq A_i \leq 10 \quad (i=1, \dots, 10)
 \end{aligned} \tag{16}$$

설계변수는 각 트러스 부재의 단면적(10개)이고, 확률변수는 트러스 부재의 단면적(10개) 및 허용응력이다. 한계상태는 각 트러스 부재의 응력이 허용응력을 초과하면 파괴로 설정하였다. 각 확률변수의 확률분포 및 목표 신뢰도 지수는 다음 식 (17)과 같이 표현된다. 즉, 허용응력 및 트러스 부재의 단면적은 정규분포를 따르고 시스템 목표 신뢰도지수는 2.0이다.

$$\begin{aligned}
 R &\sim N(2.5E4, (1.25E)^2) \text{ psi} \\
 A_i &\sim N(\mu_{A_i}, (0.05\mu_{A_i})^2) \text{ (in}^2\text{)} \\
 \beta_{ti} &= 2.0 \\
 \beta_{t\_sys} &= 2.0
 \end{aligned} \tag{17}$$

초기 설계값을  $\mathbf{A}^0 = [5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0]^T$ 로 해석을 수행한 결과, SRBDO는 수렴이 되지 않은 반면 Sequential SRBDO(RIA) 및 Sequential SRBDO(PMA)는 수렴이 되었다. 따라서, SRBDO인 경우에는 초기 설계값을  $\mathbf{A}^0 = [7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0, 7.0]^T$ 로 설정하여 수행하였다. 초기 목표 신뢰도 지수는 각 한계상태식 모두

표 3. 예제 1에서 각 방법에 따른 결과 비교

	The minimum of objective function and design variables	Reliability indices ( $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ )	System reliability index	NFE
SRBDO	6.8211 (3.4218, 3.3992)	3.0971 3.3718 9.8759	3.0000	2744
Sequential SRBDO(RIA)	6.8326 (3.4675, 3.3651)	3.1922 3.2128 9.8139	2.9971	3001
Sequential SRBDO(PMA)	6.8368 (3.4749, 3.3619)	3.2107 3.1943 9.7994	2.9972	1514

표 4. 예제 2에서 각 방법에 따른 신뢰도 지수 비교

	Reliability indices		
	SRBDO	Sequential SRBDO using RIA	Sequential SRBDO using PMA
$\beta_1$	2.6519	2.6722	2.6772
$\beta_2$	6.6983	7.1500	7.1498
$\beta_3$	2.6296	2.6731	2.6712
$\beta_4$	2.8903	2.6743	2.6685
$\beta_5$	7.1544	7.1743	7.1716
$\beta_6$	6.7164	7.1500	7.1498
$\beta_7$	2.6461	2.6653	2.6668
$\beta_8$	2.6153	2.6709	2.6733
$\beta_9$	2.6328	2.6711	2.6691
$\beta_{10}$	4.4214	3.9916	3.9913
$\beta_{sys}$	2.0000	2.0047	2.0045

표 5. 예제 2에서 각 방법에 따른 설계변수 및 목적함수 최소값 비교

	Design variables		
	SRBDO	Sequential SRBDO (RIA)	Sequential SRBDO (PMA)
$d_1$	9.6648	9.6837	9.6874
$d_2$	0.1001	0.1000	0.1000
$d_3$	9.7788	9.8085	9.8070
$d_4$	4.8937	4.8148	4.8126
$d_5$	0.1005	0.1000	0.1000
$d_6$	0.1003	0.1000	0.1000
$d_7$	6.9471	6.9528	6.9534
$d_8$	6.7450	6.7801	6.7815
$d_9$	6.7797	6.8045	6.8035
$d_{10}$	0.1090	0.1000	0.1000
The minimum of objective function	1934.78	1936.54	1936.59

표 6. 예제 2에서 각 방법에 따른 함수평가횟수(NFE) 비교

	Number of function evaluation		
	SRBDO	Sequential SRBDO using RIA	Sequential SRBDO using PMA
$G_1$	44,096	448	246
$G_2$	79,822	848	363
$G_3$	44,170	448	246
$G_4$	48,830	448	246
$G_5$	88,949	835	431
$G_6$	79,741	848	363
$G_6$	45,306	435	246
$G_8$	43,909	435	246
$G_9$	46,023	448	246
$G_{10}$	69,567	638	333
Total	590,413	11,510	6,638

$\beta_{ii}^{updated} = 2.0$  로 설정하였다. 표 3과 표 4는 각 방법에 따른 신뢰도 지수, 설계변수 및 목적함수의 최소값을 나타내었

다. 3가지 방법 모두 큰 차이는 나지 않고 거의 유사함을 알 수 있다. 하지만 표 5에서 함수평가횟수(NFE) 혹은 구조해석 횟수를 비교해 보면 SRBDO는 총 590,413번, Sequential SRBDO(RIA)는 총 11,510번, Sequential SRBDO(PMA)는 6,638번의 구조해석을 요구함을 알 수 있다. 특히, SRBDO는 상당히 많은 구조 해석을 요구하여 복잡한 구조해석을 요구하는 문제의 경우에는 거의 불가능함을 알 수 있다. 반면에 제안된 방법인 Sequential SRBDO(PMA)은 매우 효과적으로 구조해석 횟수를 줄여줌을 확인 할 수 있다.

## 7. 결 론

이 연구에서는 PMA를 이용하여 보다 더 효율적인 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 제안하였다. 일반적으로 신뢰도 기반 최적설계에 효과적으로 적용된 PMA는 직접적으로 신뢰도 지수 및 파괴확률을 산정할 수 없어 시스템 신뢰도 기반 최적설계에는 적용할 수 없다는 단점이 제기된 바 있지만, 시스템 신뢰도 기반 최적설계 알고리즘을 요소 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계 부분과 시스템 신뢰도 해석만을 수행하는 최적설계 부분으로 나누어 해석함으로써 기존의 문제를 극복할 수 있었다.

개발된 기법의 검증을 위하여 수학적 문제 및 10-바 트러스 문제에 적용한 결과, 특정한 문제의 경우에 기존의 시스템 신뢰도 기반 최적설계는 수렴성이 느려 과도한 구조해석을 요구함을 알 수 있었고, 반면에 제안된 방법은 안정적인 수렴성을 보여주면서 동시에 계산 효율성을 증대시켜줌을 확인할 수 있었다. 향후, 응답면 기법 등을 사용하여 더욱더 개선된 알고리즘의 개발이 가능할 것이며 다양한 분야에 적용이 가능할 것으로 생각된다.

## 감사의 글

이 연구는 국토해양부 건설기술혁신사업의 연구비 지원(08 기술혁신E01-초장대교량 사업단)에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

- 강수창, 고현무(2006) Performance measure approach를 이용한 강거더 교량의 신뢰성 기반 최적설계. **대한토목학회 2006년도 정기 학술대회 논문집**, 대한토목학회, pp. 441-444.
- 박미연, 조효남, 조태준(2006) 붕괴모드 조합 예측법에 의한 PSC 사장교의 위험도 평가. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제26권 제4A호, pp. 647-657.
- 양승이, 한상철(2001) 교량의 생애체계신뢰성해석에 기초한 잔존 수명예측 연구. **한국강구조학회논문집**, 한국강구조학회, 제13권 제5호, pp. 467-476.
- 조효남, 신재철(1995) R.C 박스거더교의 체계신뢰성 해석 및 안전도 평가. **한국콘크리트학회논문집**, 한국콘크리트학회, 제7권 제3호, pp. 187-198.
- 조효남, 이두화, 정지승, 민대홍(1999) 신뢰성에 기초한 강상형 연속교의 단면 최적설계. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제19권 제1-3호, pp. 397-406.
- 함대기, 박원석, 박관순, 고현무(2006) 사장교에 장착된 MR 댐퍼의 비용효율성 평가 및 최적설계 연구. **한국지진공학회논문집**, 한국지진공학회, 제10권 제6호, pp. 1-10.

- Al-Harthy, A.S. and Frangopol, D.M. (1997) Integrating system reliability and optimization in pre-stressed concrete design. *Computers and Structures*, Vol. 64, No. 1-4, pp. 729-35.
- Aoues, Y. and Chateaufneuf, A. (2008) Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety - Application to RC frames. *Structural Safety*, Vol. 30, pp. 144-161.
- Bjerager, P. (1990) On computational methods for structural reliability analysis, *Structural Safety*, Vol. 9, No. 2, pp. 79-96.
- Chandu, S. and Grandi, R. (1995) General purpose procedure for reliability based structural optimization under parametric uncertainties. *Advances in Engineering Software*, Vol. 23, pp. 7-14.
- Choi, S.K., Grandhi, R.V., and Canfield, R.A. (2007) *Reliability-based structural design*, Springer.
- Ditlevsen, O. (1979) Narrow Reliability Bounds for Structural System. *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 7, No. 4, pp. 453-472.
- Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D. (1994) Reliability-based optimization in structural engineering. *Structural Safety*, Vol. 15, No. 3, pp. 169-196.
- Enevoldsen, I. and Sorensen, J.D. (1993) Reliability-based optimization of series system of parallel systems. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No. 14, pp. 1069-1084.
- Frangopol, D.M. and Hendawi, S. (1994) Incorporating of corrosion effects in reliability-based optimization of composite hybrid plate girders. *Structural Safety*, Vol. 16, No. 1-2, pp. 145-169.
- Frangopol, D.M. and Imai, K. (2004) Reliability of long span bridges based on design experience with the Honshu-Shikoku bridges. *J. Construction Steel Res.*, Vol. 60, No. 3-5, pp. 373-392.
- Frangopol, D.M. and Maute, K. (2003) Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures, *Computers and Structures*, Vol. 81, pp. 397-410.
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C. (1974) Exact and invariant second-moment code format. *J. Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 100, pp. 111-121.
- Kang, W.H., Song, J., and Gardoni, P. (2008) Matrix-based system reliability method and application to bridge networks. *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 93, No. 11, pp. 1584-1593.
- Kim, S.H. and Wen, Y.K. (1990) Optimization of structures under stochastic loads. *Structural Safety*, Vol. 7, No. 2-4, pp. 177-190.
- Lee, J.O., Yang, Y.S., and Ruy, W.S. (2002) A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization. *Computers and Structures*, Vol. 80, pp. 257-269.
- Lin, K.Y. and Frangopol, D.M. (1996) Reliability-based optimum design of reinforced concrete girders. *Structural Safety*, Vol. 18, No. 2/3, pp. 239-258.
- Moses, F. (1997) Problems and prospects of reliability-based optimization. *Engineering Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 293-301.
- Murotsu, Y., Shao, S., and Watanabe, A. (1994) An approach to reliability-based optimization of redundant structures. *Structural Safety*, Vol. 16, No. 1-2, pp. 133-143.
- Rackwitz, R. and Fiessler, B. (1978) Structural reliability under combined random load sequences. *Computers and Structures*, Vol. 9, pp. 489-494.
- Rao, Singiresu S. (1996) *Engineering optimization: Theory and Practice*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- Song, J. and Der Kiureghian, A. (2003) Bounds on system reliability by linear programming. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 129, No. 6, pp. 627-636.
- Tu, J., Choi, K.K., and Park, Y.H. (1999) A new study on reliability based design optimization. *J. Mechanical Design*, Vol. 121, No. 4, pp. 557-564.
- Yi, P., Cheng, G., and Jiang, L. (2008) A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization, *Structural Safety*, Vol. 30, No. 2, pp. 91-109.
- Youn, B.D. and Choi, K.K. (2004b) Selecting probabilistic approaches for reliability-based design optimization. *AIAA J.*, Vol. 42, No. 1, pp. 124-131.
- Youn, B.D. and Choi, K.K. (2004a) A new response surface methodology for reliability-based design optimization. *Computers and Structures*, Vol. 82, pp. 241-256.
- Youn, B.D., Choi, K.K., and Park, Y.H. (2003) Hybrid analysis method for reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 125, No. 2, pp. 221-232.

(접수일: 2008.11.7/심사일: 2009.4.7/심사완료일: 2010.1.22)