

# 끝단 집중 질량을 갖는 회전 외팔보의 DTM을 이용한 진동 해석

## Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam with Tip Mass Using DTM

김민주\* · 강남철†

Minju Kim and Namcheol Kang

(2010년 9월 10일 접수 ; 2010년 10월 7일 심사완료)

**Key Words** : Differential Transformation Method(미분변환법), Rotating Cantilever Beam(회전 외팔보), Tip Mass(끝단 질량), Vibration Analysis(진동해석), Convergence(수렴성)

### ABSTRACT

The vibration analysis of a rotating cantilever beam with tip mass was studied by using DTM(differential transformation method). DTM is one of the numerical methods, for finding series solutions by transforming differential equations to algebraic ones similar with Laplace transform. The advantages of the DTM are that it is easy to understand and is effective in finding numerical solutions. Applying DTM, the natural frequencies of a rotating cantilever beam were obtained taking into consideration the effects of tip mass. Also, convergence study of DTM was performed to decide the number of terms used in eigenvalue problems. Numerical results obtained by DTM show good agreement with those by other methods. As a result, it is expected that DTM can be a useful method in vibration analysis such as that of a rotating cantilever beam with tip mass.

### 기 호 설 명

$w(x,t)$  : 면의 방향(transverse) 변위  
 $\omega$  : 회전 외팔보의 고유진동수  
 $\Omega$  : 외팔보의 회전속도  
 $\lambda$  : 회전속도에 대한 고유진동수의 비( $=\omega/\Omega$ )  
 $R$  : 강체 축의 반지름  
 $L$  : 외팔보의 길이  
 $\delta$  : 외팔보의 길이에 대한 강체 축의 반지름의 비( $=R/L$ )  
 $\rho$  : 보의 단위 부피 당 밀도  
 $A$  : 보의 단면적

$E$  : 보의 탄성계수(Young's modulus)  
 $\gamma^2$  : 무차원화된 회전 속도( $=\rho A \Omega^2 L^4 / EI$ )  
 $M_0$  : 끝단 집중 질량  
 $\mu$  : 보의 질량에 대한 집중 질량의 비( $=M_0 / \rho AL$ )

### 1. 서 론

기계 구조물을 설계하고 제작 및 구동하는 과정에서 고유진동수는 대상 물체의 특성을 파악할 수 있는 매우 중요한 요소이다. 이는 실험, 수학적 계산, 그리고 수치적 해석으로 얻을 수 있다. 실험으로 물체의 특성을 파악하는 방법은 가장 실제적인 고유치를 얻을 수 있다는 장점이 있으나 실험장비와 구조물의 제작을 위한 비용이 요구되며 상황에 따라 발생하는 시행착오를 거쳐야 한다는 단점이 있다. 한편, 수학적으로 고유진동수를 계산하기 위해서는 지배방정식을 만족 시키는 해를 찾아야 한

† 교신저자; 정회원, 경북대학교 기계공학부  
 E-mail : nckang@knu.ac.kr  
 Tel : (053)950-7545, Fax : (053)950-6550  
 \* 정회원, 경북대학교 대학원 기계공학부

다는 어려움이 있어서 구조물의 형상이 간단한 경우에는 가능하나 복잡한 구조물을 해석하는 대부분의 경우에는 매우 힘든 방법이다. 또한, 수치해석적인 방법은 계산기나 컴퓨터를 이용하여 수학적 연산을 하는 방식인데 복잡한 형태의 구조물에 관한 해석이 비교적 쉽고 상황과 조건을 변경하기 용이하며 신뢰성이 높고, 반복 시행에 대한 다른 비용이 들지 않는다. 이러한 관점에서 많은 공학자들이 수치해석을 통한 연구를 하고 있으며, 현재 수치해석의 중요성은 매우 높다고 할 수 있다. 과거부터 해석 구조물의 형태와 특징에 따라 다양한 수치해석법이 소개되었으며 대표적인 예로는 Myklestad's method, Rayleigh-Ritz method, FEM, Galerkin method 등이 있다.

최근에는 미분변환법(differential transformation method, DTM)이 Zhou에 의해 소개되면서<sup>(1)</sup>, 이를 이용한 기계 요소의 해석이 수행되었다<sup>(2)</sup>. 미분변환법은 미분 형태의 지배방정식을 정해진 연산을 수행하여 다항식의 형태로 변형하여 해석하는 방법으로서, 복잡한 형태의 연산을 간단화시켜 해를 구할 수 있다는 장점이 있다.

회전하는 외팔보의 진동에 관한 연구는 예로부터 기계 역학의 중요한 연구분야로서 많은 해석이 수행되어 왔다<sup>(3,4)</sup>. 공학적인 응용 사례로는 헬리콥터, 풍력발전기의 블레이드, 우주 비행을 모방한 놀이기구 등이 있으며 현재도 꾸준히 연구의 중요성이 강조되는 분야이다. 회전 외팔보에 대한 해석 또한 여러 방법으로 행해져 왔는데 Bhat<sup>(5)</sup>, Hoa<sup>(6)</sup>, 유홍희<sup>(7)</sup> 등이 Rayleigh-Ritz method, 유한요소해석법, 하이브리드 변형변수를 이용한 해석 등의 방법으로 연구한 바 있다.

이 논문에서는 끝단에 집중 질량을 가지는 회전 외팔보의 운동방정식에 DTM을 적용하여 진동 특성을 해석하였다. 또한, 수치해석 시 해의 수렴 특성에 대하여 살펴보고, 해석 결과를 참고문헌과 비교하여 DTM의 신뢰성과 실제 적용 가능성을 검토하였다.

## 2. 운동방정식

회전하는 외팔보의 면의 방향(transverse) 변위,  $w(x,t)$ 를 해석하기 위하여 단위 길이 당 밀도  $\rho$ ,

단면적  $A$ , 탄성계수(Young's modulus)  $E$ , 단면의 관성모멘트  $I$ 인 구조물을 고려한다(Fig. 1 참조). 이때, 집중 질량  $M_0$ 가 길이  $L$ 인 외팔보의 끝단에 부착되어있고, 반지름이  $R$ 인 강체 축에 고정되어 각속도  $\Omega$ 로 회전한다. 외팔보는 균일(homogeneous)하고 단면적이 일정한 Bernoulli-Euler 보로 가정하며, 회전에 의한 원심력(centrifugal force),  $T(x)$ 를 고려하면 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

이때, 임의의 점  $x$ 에 작용하는 원심력은  $x$ 에서  $L$ 까지 존재하는 보의 질량과 집중 질량의 회전에 의하여 발생하므로 다음과 같이 계산된다.

$$T(x) = \int_x^L \rho A (R+\eta) \Omega^2 d\eta + M_0 (R+L) \Omega^2 \quad (2)$$

여기서,  $\eta$ 는 더미 변수(dummy variable)이다.

끝단 집중 질량을 갖는 회전 외팔보는 다음과 같은 고정단 및 자유단의 경계조건을 갖는다. 즉,

$$x=0, \quad w(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$x=L, \quad EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} - T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = M_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

보의 길이가  $L$ 인 지점에서는 모멘트가 0이고 전단력과 원심력의 합이 관성력과 평형이 되는 조건을 만족한다(Fig. 2 참조).

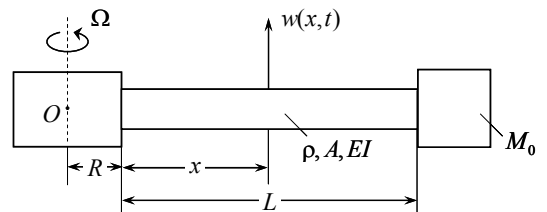


Fig. 1 Rotating cantilever beam with tip mass

회전 외팔보가 조화진동을 한다고 가정하면 면의 방향 변위는 다음과 같고,

$$w(x,t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (5)$$

변수분리법(separation of variables)을 이용하면 다음과 같은 4차 상미분 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} W(x) - \frac{1}{EI} \frac{dT(x)}{dx} \frac{dW(x)}{dx} - \frac{1}{EI} T(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

변수 분리에 따른 경계 조건 식(3)과 식(4)는 다음과 같이 변경된다.

$$x=0, \quad W(x) = \frac{dW(x)}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$x=L, \quad \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^3 W(x)}{dx^3} - \frac{T(x)}{EI} \frac{dW(x)}{dx} = -\frac{\omega^2 M_0}{EI} W(x) \quad (8)$$

해석의 편의를 위하여, 다음과 같은 무차원 변수(nondimensional variables)를 도입하고,

$$\lambda = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad (9)$$

$$\mu = \frac{M_0}{\rho AL}, \quad \gamma^2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI}$$

식(2)로부터 원심력을 대입하면 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻는다.

$$W''''(\xi) - \lambda^2 \gamma^2 W(\xi) + \gamma^2 (\delta + \xi) W'(\xi) - \frac{1}{2} \gamma^2 (1 - \xi) (2\delta + 1 + \xi) W'''(\xi) - \mu \gamma^2 (\delta + 1) W''(\xi) = 0 \quad (10)$$

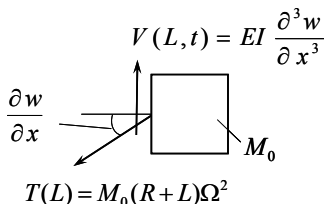


Fig. 2 Forces acting on the tip mass

$$W(0) = W'(0) = 0 \quad (11)$$

$$W'''(1) = W''''(1) - \mu(\delta + 1)\gamma^2 W'(1) + \mu\gamma^2 \lambda^2 W(1) = 0 \quad (12)$$

### 3. 미분변환법

미분변환법(differential transformation method, DTM)은 Taylor 급수에 바탕을 둔 수치해석의 한 방법으로써 선형 및 비선형의 해석에 사용되고 있다<sup>(8)</sup>. 해석가능(analytical)한 임의의 함수  $W(\xi)$ 의 미분변환(differential transformation) 함수,  $\bar{W}[k]$ 를 다음과 같이 정의한다<sup>(1)</sup>.

$$\bar{W}[k] = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k W(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} \quad (13)$$

따라서, 식(13)과 같이 미분 변환된 항들로 구성된 대수방정식의 해를 각각의  $k$ 에 대하여 구할 수 있다. 이제, 식(13)의 미분역변환(inverse transform)을 다음과 같이 정의하면,

$$W(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \bar{W}[k] \quad (14)$$

식(13)을 식(14)에 대입하여, 원함수  $W(\xi)$ 를 다음의 관계식을 통하여 얻을 수 있다.

$$W(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k W(\xi)}{d\xi^k} \right]_{\xi=0} \quad (15)$$

식(15)는  $\xi$ 가 0인 지점 근처에서 Taylor 급수 전개한 것과 같은 형태로써, 미분방정식과 경계조건식을 만족하는 해가 된다.

DTM의 기본 연산 특성을 파악하기 위하여 라플라스 변환(laplace transform)과 비교하여 Table 1에 나타내었다. 라플라스 변환과 DTM은 모두 선형성을 만족하고 미분방정식을 대수방정식으로 변환한다는 공통적인 특징이 있지만, 라플라스 변환은 일반적으로 유리식의 형태로 변환되어 특이점(singular point)에서 불연속 함수가 되는 반면, DTM은 다항식의 형태가 되어 연속 함수의 특성을 유지한다. 그 밖에 DTM은 함수의 곱이 급수의 형태로 변환되

는 특징이 있으며, 다항식은 Kronecker delta 함수로 변환되어 수치 계산에 편리한 이점이 있다. 식 (14)의 실제 연산에서는  $W(\xi)$ 를 유한한 개수의 항으로 계산하게 되므로,  $k$ 를 자연수  $N$ 까지 전개하여 고유치의 근사값을 구하며, 이때  $N$ 은 해의 수렴 특성에 의하여 결정한다.

앞에서 구한 무차원화된 운동방정식 (10)에 DTM을 적용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & (k+4)(k+3)(k+2)(k+1) \bar{W}[k+4] \\ & - \frac{\gamma^2}{2} \{1+2\mu+2\delta(1+\mu)\} (k+2)(k+1) \bar{W}[k+2] \\ & + \gamma^2 \delta (1+k)^2 \bar{W}[k+1] \\ & + \frac{\gamma^2}{2} (k+k^2-2\lambda^2) \bar{W}[k] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

또한, 경계조건 식 (11)과 식 (12)를 DTM으로 변환하여 나타내면 각각 다음과 같다.

$$\xi = 0, \quad \bar{W}[0] = \bar{W}[1] = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \xi = 1, \quad & \sum_{k=0}^N k(k-1) \bar{W}[k] = 0 \\ & \mu \gamma^2 \lambda^2 \sum_{k=0}^N \bar{W}[k] - \mu \gamma^2 (1+\delta) \sum_{k=1}^N k \bar{W}[k] \\ & + \sum_{k=2}^N (k-2)(k-1)k \bar{W}[k] = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)에  $k$ 를 순차적으로 대입하면  $\bar{W}[k]$ 에 관한 값을 얻을 수 있다. 이때,  $\bar{W}[2]$ 와  $\bar{W}[3]$ 을 미

지수  $c_2$ 와  $c_3$ 로 각각 가정하면, 순차적으로 나머지 항을 구할 수 있다. 즉,

$$\bar{W}[2] = c_2 \quad (19)$$

$$\bar{W}[3] = c_3 \quad (20)$$

$$\bar{W}[4] = \frac{1}{24} \gamma^2 (1+2\delta+2\mu+2\delta\mu) c_2 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}[5] = & -\frac{1}{30} \gamma^2 \delta c_2 \\ & + \frac{1}{40} \gamma^2 \{1+2\mu+2\delta(1+\mu)\} c_3 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}[6] = & -\frac{1}{40} \gamma^2 \delta c_3 \\ & + \frac{\gamma^2}{1440} \left[ 4(\lambda^2-3) + \gamma^2 \{1+2\mu+2\delta(1+\mu)\}^2 \right] c_2 \end{aligned} \quad (23)$$

식 (19)~(23)에 계산된 미분 변환된 식들을 식 (18)의 경계 조건식에 대입하여 정리하면, 미지수  $c_2, c_3$ 에 관한 2개의 방정식을 얻게 되며, 이를 행렬식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

이때, 임의의 값  $c_2$ 와  $c_3$ 가 자명해(trial solution)를 갖지 않게 하기 위하여 행렬식(determinant)이 0이 되어야 하는 조건으로부터, 시스템의 특성 방정식(characteristic equation)을 얻을 수 있다. 따라서 특성방정식의 해를 수치적으로 계산하면 무차원화

Table 1 Properties of DTM and laplace transform

Original function	DTM	Laplace transform
$y(x) = \alpha f(x) \pm \beta g(x)$	$\bar{Y}[k] = \alpha \bar{F}[k] \pm \beta \bar{G}[k]$	$Y(s) = \alpha F(s) \pm \beta G(s)$
$y(x) = \frac{d f(x)}{d x}$	$\bar{Y}[k] = (k+1) \bar{F}[k+1]$	$Y(s) = sF(s) - f(0)$
$y(x) = \frac{d^2 f(x)}{d x^2}$	$\bar{Y}[k] = (k+2)(k+1) \bar{F}[k+2]$	$Y(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$
$y(x) = f(x) \cdot g(x)$	$\bar{Y}[k] = \sum_{l=0}^k \bar{F}[l] \bar{G}[k-l]$	
$y(x) = (f * g)(x)$		$Y(s) = F(s) \cdot G(s)$
$y(x) = x^m$	$\bar{Y}[k] = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = m \\ 0, & \text{if } k \neq m \end{cases}$	$Y(s) = \frac{m!}{s^{m+1}}$

된 고유진동수  $\lambda$ 을 구할 수 있다.

### 4. DTM의 계산 결과

DTM을 이용하여 집중 질량을 가지는 회전 외팔보의 진동 특성을 알아보았다. DTM의 적용 가능성을 확인하고자 고유치의 수렴성을 파악하였으며, 회전 속도와 끝단 집중 질량의 증가에 따른 고유진동수를 Matlab을 사용하여 계산하였다. 무차원화 된

집중질량  $\mu$ 가 10이고 속도  $\gamma$ 가 1, 그리고 회전 반경  $\delta$ 가 0인 경우, 회전 외팔보의 고유진동수 계산 결과를 Fig. 3에 도시하였다. 급수의 항의 개수  $N$ 이 증가함에 따라 고유진동수가 수렴함을 확인 하였다. 고차의 경우, 수렴에 필요한  $N$  또한 증가된다. 특히 할 만한 것은 Rayleigh-Ritz method의 경우,  $N$ 이 증가할수록 고유치  $\lambda$ 가 작은 값으로 수렴하는 반면<sup>9)</sup>, DTM의 경우는 수렴 방향의 일관성을 찾기 힘들다는 점이다.

신뢰할 만한 수렴성을 토대로, 무차원화 된 회전 속도의 증가에 의한 고유진동수를 계산하였으며, 유한요소해석<sup>10)</sup>과 Rayleigh-Ritz method를 이용한 결과와 거의 일치하는 결과를 얻었다(Table 2 참조). 따라서, DTM을 이용한 해석은 타당하다 할 수 있으며, 진동해석 시 유용한 방법으로 사용 가능함을 알 수 있다.

추가적으로, 집중 질량의 증가에 따른 고유진동수 변화를 알아보기 위해  $d$ 가 0이고  $N$ 이 40인 경우에 대하여 고유진동수를 계산하였다(Fig. 4 참조). 또한, 보가 회전하는 경우( $\gamma=1$ )와 정지한 경우( $\gamma=0$ )에 대하여 집중 질량에 따른 고유진동수를 함께 도시하였다. 회전 시 외팔보의 고유진동수는 원심력에 따른 강성 효과(stiffening effect)로 인하여 정지 시

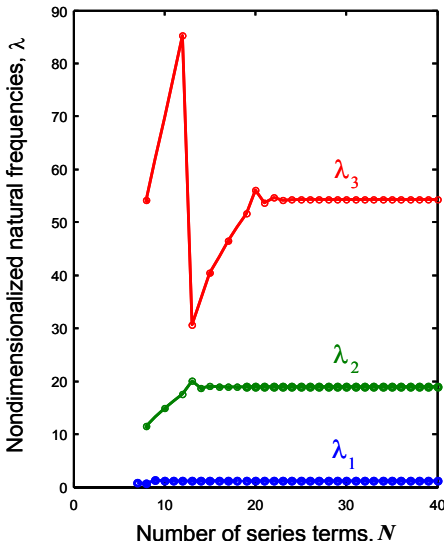


Fig. 3 Convergence of nondimensionalized natural frequencies (when,  $\mu = 10, \gamma = 1, \delta = 0$ )

Table 2 Comparisons of nondimensionalized natural frequencies of a rotating cantilever beam

$\gamma$	First		Second	
	DTM	FEM <sup>(10)</sup>	DTM	FEM <sup>(10)</sup>
0	3.5160	3.5160	22.034	22.0345
1	3.6817	3.6817	22.181	22.1810
2	4.1374	4.1373	22.615	22.6149
3	4.7973	4.7973	23.320	23.3203
4	5.5851	5.5850	24.273	24.2734
5	6.4496	6.4495	25.446	25.4461
6	7.3604	7.3604	26.809	26.8091
7	8.2997	8.2996	28.334	28.3341
8	9.2569	9.2568	29.995	29.9954
9	10.2257	10.2257	31.771	31.7705
10	11.2023	11.2023	33.640	33.6404

when,  $\mu = 0, \delta = 0, N = 30$ (DTM)

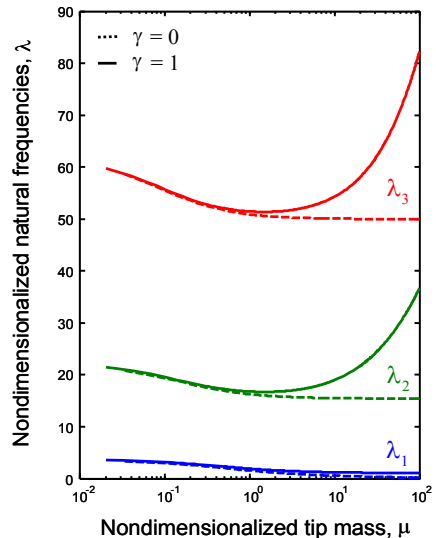


Fig. 4 Nondimensionalized natural frequencies with respect to nondimensionalized tip mass (when,  $\delta = 0, N = 40$ , dashed line for  $\gamma = 0$ , and solid line for  $\gamma = 1$ )

보다 높게 나타난다. 또한, 보가 정지한 경우의 고유진동수는 질량 효과(mass effect)로 인하여 집중 질량이 증가함에 따라 감소하는 결과를 보였다. 하지만, 회전하는 외팔보의 고유진동수는 집중 질량 증가 시, 진동 모드에 따라 서로 다른 양상을 나타낸다. 즉, 1차 모드의 경우는 끝단 집중 질량이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하지만, 2차, 3차의 경우는 일정량의 끝단 집중 질량까지는 감소하나 끝단 집중 질량이 매우 클 경우에는 고유진동수가 다시 증가하는 결과를 나타낸다. 이러한 현상은 고차 모드의 경우 회전에 의한 집중 질량의 강성 효과가 질량 효과보다 급격히 커지기 때문인 것으로 판단된다.

## 5. 결론 및 토의

이 연구에서는 집중 질량을 가지는 회전 외팔보의 진동 특성을 DTM을 이용하여 해석하였다. 고유진동수를 구하는 과정에서 DTM은 비교적 단순화된 연산과정으로 해를 얻을 수 있다는 장점이 있었다. 수렴 특성을 파악하였고 회전 외팔보가 집중 질량을 가지고 회전 하는 경우에 대하여 기존의 연구와 비교하여 신뢰할 수 있는 결과를 얻었다.

또한, 집중 질량의 증가 및 회전 속도에 따른 외팔보의 고유진동수를 DTM을 적용하여 해석하였다. 정지한 외팔보는 집중 질량이 증가할 경우 질량 효과(mass effect)에 의하여 고유진동수가 감소함을 확인하였으며, 회전하는 외팔보는 원심력에 의한 강성 효과(stiffening effect)와 질량 효과의 상호 작용에 의하여 진동 모드에 따라 상이한 고유진동수의 변화를 확인하였다.

## 감사의 글

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2010-0006654).

## 참 고 문 헌

(1) Zhou, J. K., 1986, *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan China(In Chinese).

(2) Özdemir, Ö. and Kaya, M. O., 2006, "Flapwise Bending Vibration Analysis of a Rotating Tapered Cantilever Bernoulli-Euler Beam by Differential Transform Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 289, pp. 413~420.

(3) Southwell, R. V. and Gough, B. S., 1921, "On the Free Transverse Vibrations of Airscrew Blades," *British A. R. C Reports and Memoranda*, No. 766.

(4) Lee, J. H. and Yoo, H. H., 2009, "Vibration Analysis of Tip Mass Cantilever Beam Having Tapered Cross Section," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 363~369.

(5) Bhat, R. B., 1986, "Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199~210.

(6) Hoa, S. V., 1979, "Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 67, No. 3, pp. 369~381.

(7) Yoo, H. H., 1994, "Dynamic Analysis of Tip Mass Cantilever Beam Undergoing Rigid Body Motion," *Journal of the Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, Vol. 22, No. 6, pp. 86~91.

(8) Chen, C. and Chen, S., 2004, "Application of the Differential Transformation Method to a Non-linear Conservative System," *Mathematics and Computation*, Vol. 154, No. 2, pp. 431~441.

(9) Meirovitch, L., 2001, *Fundamentals of Vibrations*, McGraw-Hill Companies, Inc., NewYork.

(10) Wright, A. D., Smith, C. E., Thresher, R. W. and Wang, J. L. C., 1982, "Vibration Modes of Centrifugally Stiffened Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 197~202.