

등가하중을 이용한 비선형 정적 응답 위상최적설계의 기초연구

이현아* · Ahmad Zeshan* · 박경진*†

* 한양대학교 기계공학과

Preliminary Study on Nonlinear Static Response Topology Optimization Using Equivalent Load

Hyun-Ah Lee*, Ahmad Zeshan* and Gyung-Jin Park*†

* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received March 9, 2010 ; Revised October 13, 2010 ; Accepted October 13, 2010)

Key Words : Topology Optimization(위상최적설계), Equivalent Load(등가하중), Nonlinear Response Structural Optimization(비선형 응답 구조최적설계), Boundary Nonlinearity(경계 비선형), Material Nonlinearity(재료 비선형), Geometric Nonlinearity(기하 비선형)

초록: 실제 대부분의 공학 문제들은 크고 작은 비선형성을 내포한다. 구조물의 최적설계 과정에서는 다수의 구조물 사이에 발생하는 접촉이나 비선형 물성치를 가지는 재료, 또는 대변형을 고려해야만 한다. 그러나 민감도 계산이 고가이기 때문에 비선형성을 최적화에 고려하는 것은 매우 어렵다. 따라서 비선형 정적 반응 위상최적설계를 위하여 등가하중법을 사용한다. 등가하중이란 비선형 해석에서 유발되는 반응장과 동일한 반응장을 유발하는 선형 정적하중이다. 등가하중법은 치수/형상최적설계를 위하여 연구되어 왔다. 위상최적설계는 치수/형상최적설계에 비하여 설계변수가 많기 때문에 기존의 등가하중법을 그대로 적용할 수 없기 때문에 위상최적설계를 위하여 등가하중법을 확장하고 수정한다. 간단한 예제를 통하여 등가하중법을 이용한 위상최적설계 결과가 수치적으로 도출한 결과와 유사함을 보이고 실제 공학 예제의 위상최적설계를 통하여 기존의 선형 정적 위상최적설계와 결과를 비교한다.

Abstract: Most components in the real world show nonlinear response. The nonlinearity may arise because of contact between the parts, nonlinear material, or large deformation of the components. Structural optimization considering nonlinearities is fairly expensive because sensitivity information is difficult to calculate. To overcome this difficulty, the equivalent load method was proposed for nonlinear response optimization. This method was originally developed for size and shape optimization. In this study, the equivalent load method is modified to perform topology optimization considering all kinds of nonlinearities. Equivalent load is defined as the load for linear analysis that generates the same response field as that for nonlinear analysis. A simple example demonstrates that results of the topology optimization using equivalent load are very similar to the numerical results. Nonlinear response topology optimization is performed with a practical example and the results are compared with those of conventional linear response topology optimization.

1. 서론

위상최적설계는 구조최적설계 기법 중 하나로 주어진 구조물의 설계영역 안에서 재료의 분포상태를 결정한다. 위상최적설계 방법은 Bense와 Kikuchi에 의해 개발된 균질화법(Homogenization method)⁽¹⁾과 이후 Bense에 의해 제안된 밀도법(Density method)⁽²⁾으로 나뉜다. 밀도법은 매개변수

화된 각 유한요소의 밀도를 설계변수로 한다. 등방성 재료 모델을 기반으로 발달된 밀도법⁽³⁾ 설계변수가 0의 값이면 요소가 존재하지 않고, 1에 가까운 값이면 요소가 존재하는 것을 의미한다. 균질화법에 비하여 수치적 구현이 뛰어나 최근 많이 사용되기 때문에⁽³⁾ 위상최적설계를 수행하는 상용소프트웨어는 밀도법 기반으로 되어 있다.

실제 대부분의 공학문제들은 비선형성을 가지고 있다. 그러나 위상최적설계는 선형 정적 반응을 기본으로 발달되어 왔다. 이는 최적설계 과정에서 구조물은 선형 물성치의 재료로 구성되며, 소변형

† Corresponding Author, gjpark@hanyang.ac.kr
© 2010 The Korean Society of Mechanical Engineers

(Small deformation)만을 일으킨다고 가정하는 것이다. 그러나 실제 구조물을 소변형으로 표현하는 것에 한계가 있다. 1999년 Yuge는 균질화법을 이용하여 대변형(Large deformation)을 고려한 위상최적설계를 수행하였다.⁽⁴⁾ 2000년 Buhl은 기하 비선형을 고려한 위상최적설계에 대하여 연구하고 선형 최적설계결과와 비교하였다.⁽⁵⁾ Mayer는 탄소성 재료(Elastoplastic material)로 구성된 구조물의 위상최적설계를 수행하였다.⁽⁶⁾ 2004년에 Jung은 기하 비선형과 재료 비선형을 모두 고려한 위상최적설계 방법을 연구하였다.⁽⁷⁾

비선형성이 존재하는 구조물의 경우 지배방정식 내의 강성행렬과 질량행렬 등이 설계변수와 상태변수의 함수로 이루어진 비선형 행렬이다. 따라서 비선형성을 고려한 구조최적설계에서는 구조물의 지배방정식 내에 존재하는 비선형 항을 설계변수에 대하여 미분하는 민감도 계산 과정과 설계의 방향을 결정하는 비선형 해석에 시간과 비용이 많이 든다.^(3,8,9) 그러나 최근 비선형 해석기와 컴퓨터의 성능 향상으로 인하여 민감도 해석에 요구되는 시간과 비용이 절감되고 있다. 또한 비선형성을 고려한 민감도 계산이 시간과 비용적 측면에 크게 증가하지 않는 방법론에 제시되어왔다.^(10,11) 비선형 설계민감도를 계산할 때 해석으로부터 도출된 탄젠트 강성행렬을 다음 비선형 해석에 적용하는 방법 등이 제안되면서 비선형 민감도를 계산하는 비용을 절감할 수 있다.⁽¹²⁾ 그러나 이러한 방법론 역시 선형을 고려한 민감도 계산에 비하여 시간과 비용이 많이 든다. 본 논문에서는 비선형 민감도가 아닌 선형 민감도를 이용한 비선형성을 고려한 구조최적설계를 하기 위하여 2007년 신문균과 박경진은 증가하중법을 제안하였다.⁽¹³⁾ 증가하중은 비선형 해석으로부터 유발된 반응장과 동일한 반응장을 선형 해석에서 유발할 수 있는 선형하중을 의미한다. 증가하중법은 잘 발달되어온 비선형 해석과 선형 정적 구조최적설계 방법을 이용하는 것으로 비선형성을 고려한 구조최적설계 과정에서 비선형 민감도를 사용하지 않고 선형 민감도를 이용하기 때문에 구조최적설계 상에서 가장 많은 비용을 차지하는 해석 비용을 절감할 수 있다.

증가하중법은 비선형 정적 반응 구조최적설계를 위하여 선형 민감도를 이용하여 설계를 수행한 후 설계 결과에 대한 비선형 해석을 수행하기 때문에 실제 문제의 비선형 민감도와 설계 시의 선형 민감도 사이에 차이가 발생한다. 이러한 민감도 차이를 극복하기 위하여 구조최적설계와 비선형 해석을 반복 수행한다. 2003년 박경진과 2007년 신문균은 증가하중법을 이용한 구조최적설계로부터 도출된 설계해가 카루시-쿤-

터커 필요조건(Karush-Kuhn-Tucker necessary condition)을 만족하며 설계 최적점에서의 비선형 민감도와 선형 민감도가 유사함을 증명하였다.⁽¹³⁻¹⁵⁾ 증가하중법을 이용한 설계 과정은 3.1절에서 자세히 설명한다.

비선형성을 고려한 증가하중법은 치수 및 형상 최적설계를 위하여 연구되어왔다.⁽¹⁶⁻¹⁸⁾ 구조물의 지배방정식 내에 존재하는 비선형항(강성행렬, 질량행렬 및 상태변수 등)을 설계변수로 미분하는 과정인 민감도 해석 시에 위상최적설계와 같이 설계변수의 개수가 많은 경우 다수의 연립방정식을 계산해야 하기 때문에 치수 및 형상최적설계에 비하여 많은 시간과 비용이 필요하다. 또한 위상최적설계는 치수 및 형상최적설계에 비하여 많은 설계변수를 가지기 때문에 기존의 증가하중법을 그대로 적용하는 데 어려움이 있다. 본 논문에서는 비선형을 고려한 위상최적설계를 위하여 증가하중법을 확장하고 수정한다. 간단한 예제를 통하여 증가하중을 이용한 위상최적설계의 결과가 비선형 민감도를 직접 고려하여 얻은 위상최적설계와 유사함을 보인다. 또한 실제적 예제에 적용하고 선형 정적 반응 위상최적설계 결과와 비교한다.

2. 배경 이론

2.1 비선형 정적 해석

선형 정적 해석은 구조물에 발생하는 변위나 변형이 극히 작은 것으로 간주하여 변형전의 형상(Configuration)과 변형후의 형상의 차이를 무시하는 소변형(Small deformation)을 고려하고 응력과 변형률 사이의 관계가 선형적 관계를 가지는 것을 의미한다. 또한 구조물이 변형될 때 가해지는 하중의 방향이 변하지 않음을 의미한다. 그러나 실제 구조물은 위와 같은 가정에 기반하여 거동하지 않는 경우가 많다. 이러한 비선형성은 크게 세가지로 구분된다. 재료 물성의 비선형성으로 인한 재료 비선형(Material nonlinearity)과 기하학적 구조물의 특성으로 인한 기하 비선형(Geometric nonlinearity), 다수개의 구조물이 서로 접촉을 할 때 발생하는 경계 비선형(Boundary nonlinearity)으로 구분된다.⁽¹⁹⁻²¹⁾

기하 비선형은 구조물의 변형된 형상에 따라서 평형 방정식을 새로 써야 할 만큼 큰 변형(Large deformation)을 보이는 경우를 말한다. 이 경우에는 구조물의 변형으로 인해서 하중의 방향과 크기가 바뀌는 경우도 포함한다. 즉, 변위와 변형률 사이의 관계가 비선형성을 갖는다. 재료 비선형성은 변형률과 응력 사이의 관계가 비선형적인 관계를 갖는 경우이다. 재료가 탄성구간을 넘어 소성영역에서 거동을

묘사해야 하는 경우 재료 비선형성을 포함해야 한다. 경계 비선형은 다수개의 구조물이 거동하면서 서로 일정 부분이 접촉하는 것을 의미한다. 예를 들어 두 개의 구조물이 서로 거동한다고 가정할 때 각 구조물이 가지는 강성은 접촉하는 순간 상대 구조물의 영향을 받아 강성이 변하게 된다.

위와 같은 비선형성을 묘사하기 위해 유한요소법에서는 점진적 증분 과정을 통해 해를 찾아간다. 각 증분 과정마다 평형을 만족하는 해를 찾고 다음 증분과정으로 넘어가면서 최종적인 해를 구할 수 있다. 조밀한 증분 단계의 필요성으로 인해 해석 시간이 매우 길다. 비선형성을 고려하여 최적설계를 수행한다면, 민감도를 계산할 때 이러한 증분 과정이 미분을 어렵게 하고 고가의 계산 비용이 필요하다.

2.2 위상최적설계

위상최적설계는 치수 및 형상최적설계와 같이 구조최적설계 기법 중 하나이다. 일반적으로 설계는 개념설계와 상세설계로 나눈다. 구조최적설계에서 치수와 형상최적설계가 상세설계에 속한다면 위상최적설계는 개념설계에 속한다. 위상최적설계는 주어진 설계영역 내에서 구조물에 요구되는 설계조건을 가장 잘 만족하는 재료 분포를 결정하는 방법이기 때문이다. 위상최적설계 기법은 크게 균질화법(Homogenization method)⁽¹⁾과 밀도법(Density method)⁽²⁾으로 나뉜다. 본 논문은 밀도법을 이용하여 위상최적설계를 수행한다.

밀도법 기반의 위상최적설계에서 설계변수는 매개변수화 된 각 유한요소의 밀도이다. 설계변수는 0과 1사이의 값을 가지게 되며, 0에 가까우면 유한요소의 재료가 없는 것으로 간주하며 1에 가까우면 재료가 존재함을 의미한다. 위상최적설계 정식화는 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Find} && \mathbf{b} \\ & \text{to minimize} && \text{compliance} \\ & \text{subject to} && \sum \mathbf{v}_e \mathbf{b} \leq V \\ & && 0 < \mathbf{b}_{\min} \leq \mathbf{b} \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{b} 는 각 유한요소의 밀도인 설계변수 벡터, \mathbf{v}_e 는 각 유한요소의 부피, V 는 전체 구조물의 부피이며, \mathbf{b}_{\min} 은 0에 가까운 아주 작은 값으로 설계변수의 하한치이다. 일반적으로 위상최적설계는 구조물의 강성을 최대화하는 것을 목적으로 하며 이는 구조물의 평균균성(Compliance)을 최소화하는 것과 같다.⁽³⁾

각 요소의 물성치와 설계변수의 관계는 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{b}^{(k)p} \mathbf{E}_0 \\ \rho &= \mathbf{b}^{(k)q} \rho_0 \end{aligned} \quad (2)$$

\mathbf{E} 는 등방성 탄성재료에서의 탄성계수(Young's modulus)로 \mathbf{E}_0 는 구조물의 초기 탄성계수이고 ρ 는 재료의 밀도(Density)로 ρ_0 는 초기 밀도이다. 일반적으로 p 는 2에서 3의 값을 가지고, q 는 1의 값을 가진다. 선형 정적 위상최적설계에서 식 (2)를 이용하여 설계를 반복한다.

3. 등가하중법

민감도 계산은 목적함수와 제한조건함수의 설계변수에 대한 편미분 값을 구하는 것으로 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식을 가지고 구하게 된다. 실제로 구조최적설계에서는 민감도 계산이 설계과정 중에 차지하는 비중이 매우 크다. 구조최적설계 시 비선형성을 고려하여 민감도를 계산하는 것은 매우 고가이다. 또한 위상최적설계는 모든 유한요소가 설계변수이기 때문에 비선형성을 직접 고려하여 수행하는 것이 더욱 어렵다. 이러한 점을 극복하기 위하여 등가하중법을 이용한다.

3.1 등가하중의 정의

등가하중(Equivalent load)은 비선형 해석으로부터 유발되는 변위장과 동일한 변위장을 발생시키는 선형 정적 응답 해석에서의 하중을 의미한다. 정의에 따르면 고비용의 비선형 해석을 수행하지 않고도 상대적으로 저렴한 선형 정적 응답 해석으로부터 동일한 응답을 얻을 수 있다.

등가하중을 이용한 최적화 과정은 Fig. 1과 같이 해석영역(Analysis domain)과 설계영역(Design domain)으로 나누어진다. 주어진 하중과 조건을 이용하여 해석영역에서 비선형 해석이 수행된다. 해석 결과를 바탕으로 설계영역에서 사용될 등가하중이 계산되고 이를 이용하여 선형 정적 위상최적설계가 수행된다. 설계영역에서의 설계 결과를 바탕으로 다시 해석을 수행하여 제한조건의 만족을 검증한다. 이러한 과정을 설계주기(Design cycle)라 하며 이는 설계값이 수렴할 때까지 반복적으로 수행한다. Fig. 1에서 보듯이, 등가하중법은 지금까지 잘 발달되어온 비선형 해석과 선형 정적 위상최적설계 방법을 그대로 이용하여 비선형성을 고려한 위상최적설계를 수행할 수 있다.

비선형 거동을 하는 시스템의 평형방정식은 식 (3)과 같다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N = \mathbf{f} \quad (3)$$

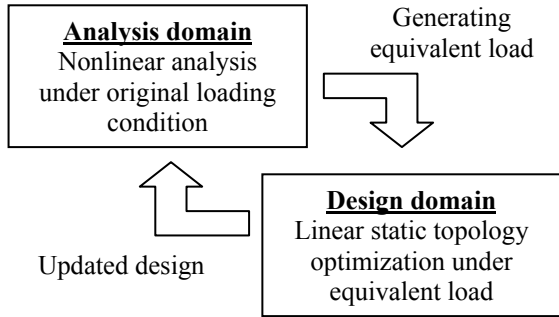


Fig. 1 Schematic process between the analysis domain and the design domain

여기서 $\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N)$ 는 비선형 강성행렬, \mathbf{b} 는 설계 변수 벡터, \mathbf{z}_N 은 비선형 변위 벡터, \mathbf{f} 는 외력 벡터이다. 하첨자 N 은 비선형 응답임을 의미한다. 등가하중은 선형 강성행렬과 비선형 변위 벡터의 곱으로 식 (4)를 이용하여 계산한다.

$$\mathbf{f}_{eq} = \mathbf{K}_L \mathbf{z}_N \quad (4)$$

\mathbf{f}_{eq} 는 등가하중 벡터이고 하첨자 L 은 선형해석으로부터 유발된 응답을 의미한다. 식 (5)와 같이 계산된 등가하중을 이용하여 선형 해석을 수행하여 도출된 선형 변위 벡터 \mathbf{z}_L 은 비선형 변위 벡터 \mathbf{z}_N 과 동일하다.

$$\mathbf{K}_L(\mathbf{b})\mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq} \quad (5)$$

이렇게 계산된 등가하중은 선형 정적 위상최적설계에서 외력으로 사용된다.

3.2 등가하중을 이용한 위상최적설계

등가하중을 사용한 비선형 정적 반응 위상최적설계 과정은 Fig. 2와 같으며 내용은 다음과 같다.

과정 1. 설계주기 번호 k 와 설계변수 $\mathbf{b}^{(k)}$ 의 초기값을 선정한다. ($k=0, \mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(0)}$)

과정 2. 식 (3)을 이용하여 비선형 정적 해석을 수행한다.

과정 3. 식 (4)를 이용하여 등가하중을 계산한다.

과정 4. 식 (6)의 정식화를 이용하여 선형 정적 반응 위상최적설계를 수행한다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && b_i && ; i = 1, \dots, n \\ &\text{to minimize} && \text{compliance} \\ &\text{subject to} && \mathbf{K}_L \mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq} && (6) \\ &&& g_j(\mathbf{b}) \leq 0; j = 1, \dots, m \\ &&& 0 < \mathbf{b}_{min} \leq \mathbf{b} \leq 1 \end{aligned}$$

여기서 n 은 설계변수 개수, m 은 제한조건 수이다.

과정 5. $k=0$ 일 때 과정 6으로 간다. $k>0$ 일 때 식

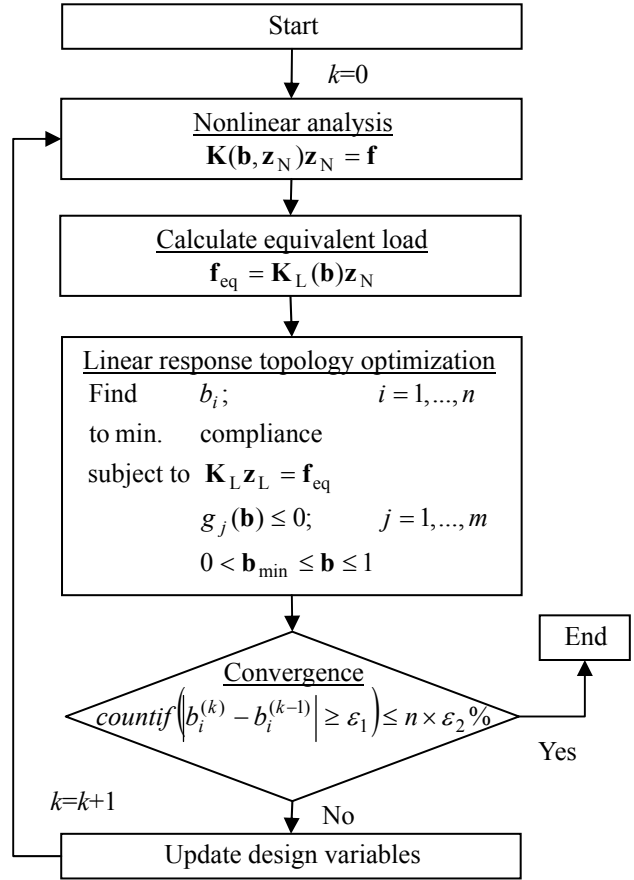


Fig. 2 Process of topology optimization using equivalent load

(7)을 이용하여 수렴조건을 확인한다. 수렴조건을 만족한다면 설계과정을 종료하고 그렇지 않다면 과정 6으로 간다.

$$\text{countif}(|b_i^{(k)} - b_i^{(k-1)}| \geq \epsilon_1) \leq n \times \epsilon_2 \% \quad (7)$$

수렴조건 확인을 위하여 먼저 현재 설계주기 (k)와 이전 설계주기 ($k-1$)일 때 설계변수 값의 차가 ϵ_1 보다 큰 설계변수의 개수를 확인한다. 확인된 개수가 전체 설계변수 개수의 ϵ_2 퍼센트 보다 작다면 수렴한 것으로 간주한다. 기존의 등가하중의 경우 설계변수 값의 차가 ϵ_1 보다 큰 설계변수가 없을 때 수렴한 것으로 간주하였다. 그러나 위상최적설계는 유한요소개수만큼 설계변수가 존재하기 때문에 모든 설계변수가 기존의 수렴조건을 만족하는 것은 불가능하다. 따라서 식 (7)과 같은 수렴조건을 사용하며 ϵ_1 과 ϵ_2 는 매우 작은 값이다.

과정 6. 설계변수를 갱신한다. 위상최적설계 결과로부터 각 유한요소는 0과 1사이의 값을 가지게 된다. 이때 0과 1사이의 임의의 값보다 작은 설계

변수 값을 가지는 유한요소는 구조물에서 삭제하고 다음 과정을 진행한다. 위상최적설계 결과에서 대부분의 요소는 0 또는 1에 가까운 값을 가진다. 따라서 0에 가까운 값을 가지는 유한요소를 삭제하고 1에 가까운 값을 가지는 유한요소를 남긴다. 특정 요소 자체를 삭제함으로써 설계의 방향이 바뀔 수 있는 가능성은 존재하나 미미하다. 이에 대한 수학적 정의가 수반될 필요성이 존재한다. 이러한 설계변수 갱신법에 의하여 요소가 삭제된 유한요소모델로 비선형해석을 수행한다. 이때 삭제된 요소의 절점에는 변위가 발생하지 않기 때문에 등가하중이 계산되지 않는다. 만약 다음 설계주기에서 위상최적설계 시에 요소가 삭제된 모델로 설계를 수행한다면 한 번 지워진 요소는 다시 생성될 수 없으며 변경된 설계의 방향을 복원할 수 없다는 단점이 있다. 따라서 과정 6의 위상최적설계 결과로부터 갱신된 유한요소모델은 과정 2의 비선형 해석에서만 사용된다. 과정 4의 위상최적설계는 항상 초기의 위상최적설계 설계영역을 모두 이용하여 수행한다.

1장에서 설명하였듯이 비선형 해석과 선형 정적 위상최적설계의 민감도는 서로 일치하지 않는다. 따라서 비선형 반응과 선형 반응 사이의 민감도 차이를 극복하기 위하여 위의 과정을 반복적으로 수행하며, 수렴조건을 만족할 때까지 반복한다. 비선형 정적 구조최적설계에 대하여 반복과정을 통하여 도출된 설계해는 카루시-쿤-터커(Karush-Kuhn-Tucker) 필요조건을 만족하며 최적점에서의 비선형 민감도와 선형 민감도는 유사함이 증명되었다⁽¹³⁻¹⁵⁾

4. 예 제

등가하중을 이용하여 비선형 정적 반응 위상최적설계를 수행한다. 평판 구조물을 이용하여 재료 및 기하 비선형성을 고려하고 공학 문제로의 적용을 위하여 핵 원자로 내에 장착되는 지지격자체의 스프링을 설계한다. 또한 경계 비선형을 고려하기 위하여 미셀 구조물의 위상최적설계를 수행한다. 비선형 해석과 위상최적설계를 위하여 NASTRAN 2008⁽²²⁾을 사용한다.

4.1 재료 및 기하 비선형을 고려한 평판 구조물

Fig. 3에 평판 구조물을 보였다. 길이는 1600 mm, 높이는 200 mm이고 구조물의 양 끝단이 고정되어 있다. 구조물의 아랫단 중앙에 30 N의 힘이 가해진다. 위상최적설계는 네 개의 해석조건을 고려하여 이루어졌다. (a) 기존의 선형 정적 위상최적설

계 (b) 재료 비선형을 고려한 위상최적설계 (c) 기하 비선형을 고려한 위상최적설계 (d) 재료 및 기하 비선형을 고려한 위상최적설계이다. 위의 선형 위상최적설계와 세 개의 등가하중을 이용한 위상최적설계 결과는 Jung에 의하여 수행된 수치적 위상최적설계 결과⁽⁷⁾와 비교한다. 참고문헌 (7)은 위상최적설계를 위하여 비선형 민감도를 직접 계산하였다. 재료의 탄성계수(Young's modulus)는 30 MPa, 푸아송비(Poisson's ratio)는 0.3이다. 항복점을 넘어선 소성구간에서의 경화계수는 15 MPa이다.

등가하중을 이용한 위상최적설계를 위한 정식화는 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Find} && b_i && ; i = 1, \dots, 3200 \\
 &\text{to minimize} && \text{compliance} \\
 &\text{subject to} && \mathbf{K}_L \mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq} && (8) \\
 &&& \text{mass} \leq \text{mass}_{\text{initial}} \times 0.2 \\
 &&& 0 < \mathbf{b}_{\text{min}} \leq \mathbf{b} \leq 1
 \end{aligned}$$

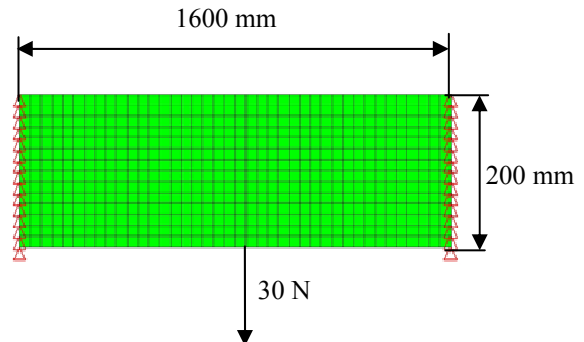
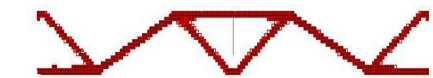
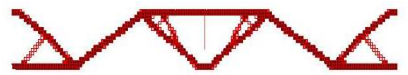


Fig. 3 Finite element model of a plate



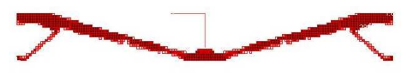
(a) Linear response topology optimization



(b) Topology optimization with material nonlinearity



(c) Topology optimization with geometric nonlinearity



(d) Topology optimization with material and geometric nonlinearity

Fig. 4 Results of linear response and nonlinear response topology optimization using equivalent load with a plate structure

유한요소의 개수는 총 3200개로 설계변수의 개수와 동일하다. 평균굴성의 최소화를 목적으로 하며 구조물의 질량이 초기 구조물 질량의 20%이하가 되도록 한다.

Fig. 4에 등가하중을 이용한 위상최적설계 결과를 보인다. Fig. 4(a)는 선형 정적 위상최적설계를 수행한 것이고, Fig. 4(b)는 재료 비선형, (c)는 기하 비선형, (d)는 재료 비선형과 기하 비선형을 모두 고려한 것이다. Fig. 5는 참고문헌 (7)에서 발췌한 것으로 동일한 문제에 대하여 수치적 방법으로 도출한 위상최적설계 결과이다. Fig. 4와 5를 비교할 때 등가하중을 이용하여 위상최적설계를 수행한 결과가 수치적으로 비선형 민감도를 직접 계산하여 위상최적설계를 수행한 결과와 유사함을 볼 수 있다.

Table 1에 등가하중을 이용한 위상최적설계 시 수행된 비선형 해석의 회수를 보인다. 재료 비선형만을 고려한 경우는 총 3번의 설계반복을 하였다. 이는 3번의 비선형 해석만을 통하여 Fig. 4(b)의 해를 얻었음을 의미한다. 기하 비선형만을 고려한 경우는 4번, 재료와 기하 비선형을 고려한 경우는 총 6번의 비선형 해석을 수행하였다. 결과에서 보듯이 등가하중을 이용한 위상최적설계는 적은 횟수의 비선형 해석을 통하여 만족할 만한 설계결과를 도출할 수 있다.

Table 1 Topology optimization results of a plate

	(a)	(b)	(c)	(d)
No. of iterations	32	-	-	-
No. of cycles (No. of nonlinear analysis)	-	3	4	6

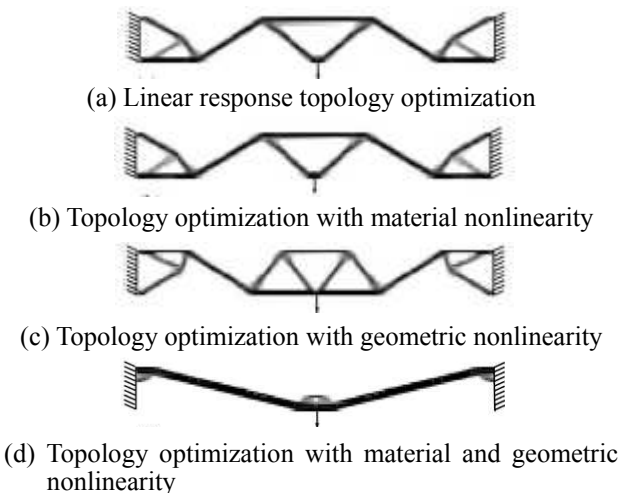


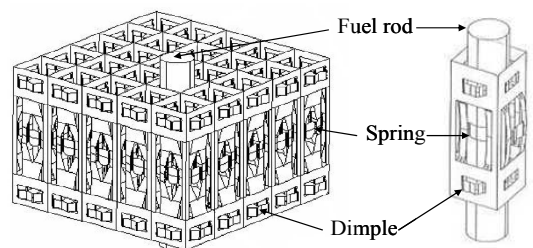
Fig. 5 Results of numerical topology optimization with a plate structure [Ref. 7]

4.2 지지격자 스프링

평판 구조물의 위상최적설계를 통하여 검증된 등가하중법을 이용하여 실제적인 공학 문제에 적용하기 위하여 지지격자 스프링(23)을 설계한다. 핵연료 집합체는 골격체와 핵연료봉으로 구성되어 있다. 골격체는 상·하단 고정체, 안내관, 지지격자체로 구성되어 있으며 핵연료봉을 고정시켜주는 기능을 하고 있다. 세장비(Slenderness ratio)가 큰 핵연료봉은 지지격자체에 의해 지지된다. Fig. 6(a)에 보인 지지격자체는 Fig. 6(b)의 지지격자 단일체로 이루어져 있다. 지지격자 단일체는 4개의 지지격자로 이루어져 있으며 1개의 핵연료봉을 원자로내에 고정시키는 역할을 한다. 지지격자는 연료봉을 지지하는 스프링(Spring)과 딥플(Dimple)로 구성된다.

딥플은 스프링에 비하여 강성이 매우 크므로 핵연료봉을 지지격자체에 삽입할 때 변형은 거의 무시할 수 있다. 원전연료가 원자로에 장전 된지 1년 이내에 지지격자 스프링은 초기 스프링력의 90% 이상을 잃게 된다. 이는 지지격자가 운전되면서 손실되는 기능으로 시간에 대한 지지격자 스프링의 재료가 보이는 변형과 지속적 운전에 따른 마모에 관련되어 있다. 그러나 지지격자 스프링력이 손실된 되는 시점에서 원자로의 안전을 보장할 수 없다. 또한 지지격자 스프링의 초기 강성을 향상시키면 지지격자 스프링력의 손실을 방지할 수 있다.(17) 따라서 지지격자 스프링은 핵연료봉의 안전한 지지를 위하여 일정 강성을 유지해야 한다. 이를 감안하여 지지격자의 위상최적설계를 위한 설계영역은 Fig. 7(a)와 같이 지지격자 스프링 부분에 국한한다. 또한 위상최적설계를 위하여 기존 지지격자 스프링 주변부에 유한요소를 구성한다.

실제 환경에서 지지격자체에 연료봉이 삽입되면 지지격자 스프링은 연료봉으로 인하여 0.3 mm 늘린다. 따라서 지지격자 스프링 중심부에 0.3 mm 강제 변형을 발생시키는 하중을 산출하여 위상최적설계 시 초기 외력으로 적용한다. 또한 지지격자 스프링은 딥플과 연결되어 있기 때문에 Fig. 7(b), (c)와 같이 연결부분을 고정한다.



(a) Spacer grid set (b) A unit spacer grid set

Fig. 6 Schematic view of a spacer grid set

Table 2 Stress-strain value for a stress-strain curve of spacer grid spring

Sr. no	Stress [MPa]	Strain
1	0.00E+00	0
2	3.00E+04	0.001
3	1.03E+06	0.101
4	1.00E+07	1.001
5	1.00E+08	10.001

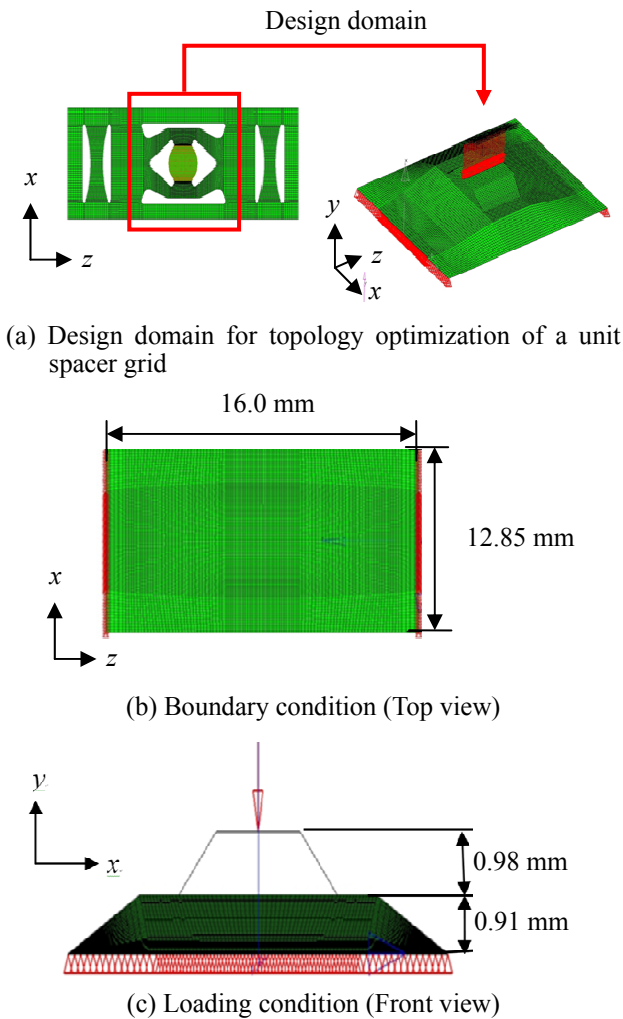


Fig. 7 Finite element model of the spacer grid spring

지지격자에 사용된 재료의 탄성구간 영률은 30,000 GPa, 항복강도는 30 GPa, 푸아송비는 0.3, 밀도는 6550 kg/m³이다. 위상최적설계에서는 탄성영역에서의 재료 물성치를 이용하고 비선형 해석에는 Table 2에 보인 재료 물성치를 이용한다.

지지격자 스프링의 설계변수는 10,592개이며 전체 구조물의 50% 질량만을 이용해야 한다. 등가하중을 이용하여 재료 비선형성을 고려한 지지격자의 위상

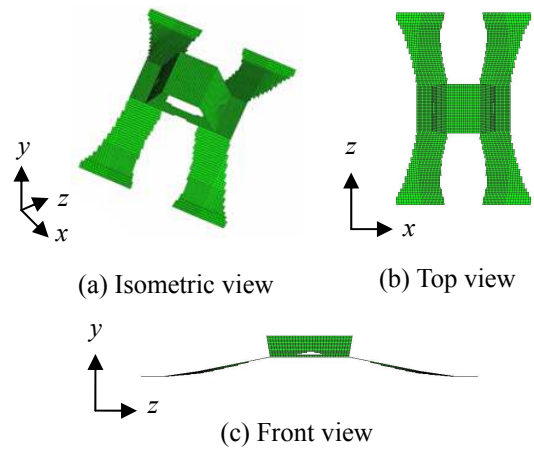


Fig. 8 Results of nonlinear response topology optimization using EL of a spacer grid spring

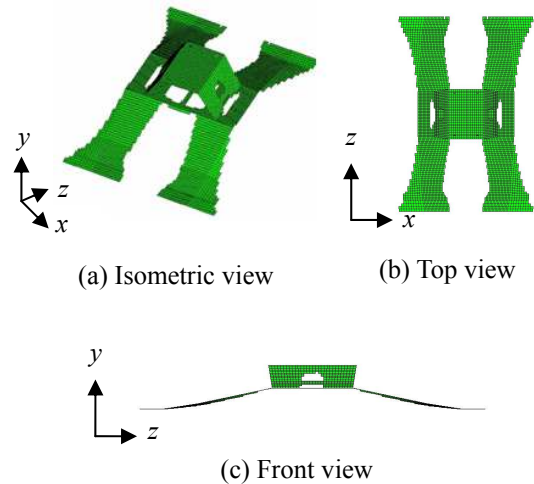


Fig. 9 Results of linear response topology optimization of a spacer grid spring

최적설계를 수행한다. 또한 선형 정적 위상최적설계를 수행하여 결과를 비교한다.

본 예제는 설계변수의 개수가 크다. 따라서 유한 요소법을 이용한 구조물의 지배방정식을 가지고 목적 함수와 제한조건함수의 설계변수에 대한 편미분 값을 구하는 민감도 계산과정에서 많은 연립방정식을 계산하여야 하기 때문에 민감도 계산과 비선형 해석에 많은 비용이 필요하다. 최근 민감도 계산과 비선형 해석의 비용을 줄이기 위한 다양한 방법론이 제시되고 있다.^(10,11) 그러나 선형 반응 위상최적설계에 비하여 고가이며, 설계변수의 증가(요소 개수의 증가)에 대비하여 계산시간도 함께 증가하기 때문에 위상최적설계에 어려움이 존재한다. 본 예제를 통하여 선형 민감도를 이용하는 등가하중법에 대하여 설계변수가 많은 공학문제로의 적용가능성을 확인한다.

Fig. 8에 등가하중을 이용한 위상최적설계 결과

Table 3 Topology optimization results of a spacer grid spring

	Linear response topology optimization	Nonlinear topology optimization using EL
No. of iterations	23	-
No. of cycles (No. of nonlinear analysis)	-	3

를 보이고 Fig. 9에 선형 정적 위상최적설계 결과를 보인다. Fig. 8과 9의 결과와 기존 지지격자 스프링인 Fig. 7(a)를 비교해보면 지지격자 스프링에서 양 가장자리에 재료가 사라진 것을 알 수 있다. Fig. 8(a)와 9(a)를 보면 스프링 아랫단에 z축 방향으로 재료의 유무에 차이가 있음을 알 수 있다. Fig. 8(b)와 9(b)에서는 스프링의 지지단부분에도 재료의 유무에 차이를 보인다. Table 3에 비선형 해석의 횟수를 보인다. 등가하중을 이용한 위상최적설계는 세 번의 비선형 해석을 통하여 설계결과를 도출하였다.

4.3 경계 비선형을 고려한 미셀 구조물

경계 비선형은 다수의 구조물이 서로 접촉할 때 순간적으로 구조물의 강성이 변하는 것이다. 경계 비선형을 고려한 위상최적설계를 위하여 Fig. 10의 미셀 구조물을 이용한다. Fig. 10(a)에서 보듯이 구조물은 두 부분으로 구성된다. 아래쪽 구조물은 설계영역으로 한쪽단이 고정되어 있다. 위쪽 구조물은 비설계영역으로 강제요소로 이루어져 있다. 비설계영역에는 경계조건이 없으며, 하중은 비설계영역에만 분포하중으로 가해진다. Fig. 10(b)에서 보듯이 설계영역과 비설계영역은 일정 부분 접촉하고 있으며 접촉 부분을 통하여 비설계영역에 가해지는 하중이 설계영역으로 전달된다.

설계 정식화는 식 (9)와 같다. 설계영역의 전체 요소개수는 4000개이며 질량 제한조건은 초기 질량의 40%이다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Find} && b_i && ; i = 1, \dots, 4000 \\
 &\text{to minimize} && \text{compliance} \\
 &\text{subject to} && \mathbf{K}_L \mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq} && (9) \\
 &&& \text{mass} \leq \text{mass}_{\text{initial}} \times 0.4 \\
 &&& 0 < \mathbf{b}_{\text{min}} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

Fig. 11에 위상최적설계 결과를 보인다. 위상최적설계는 3번의 설계반복을 통하여 수렴하였고 설

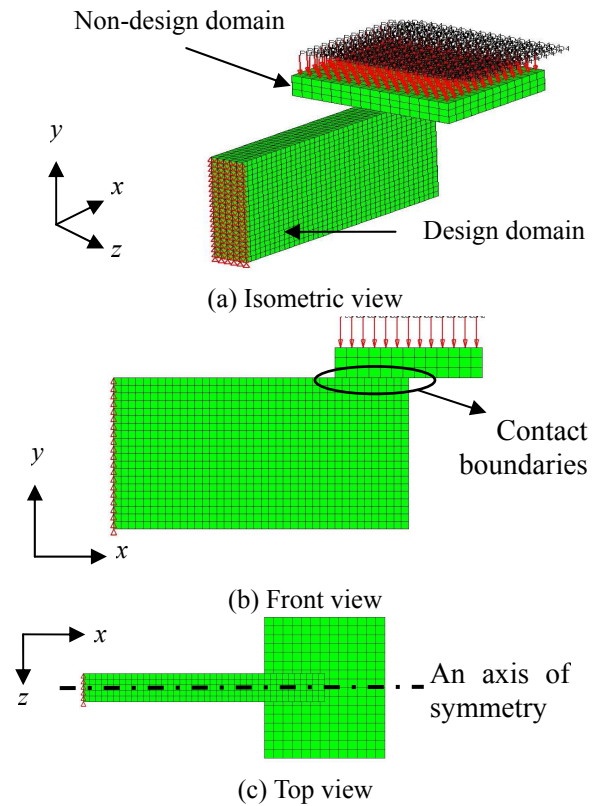


Fig. 10 Finite element model of the Michell structure

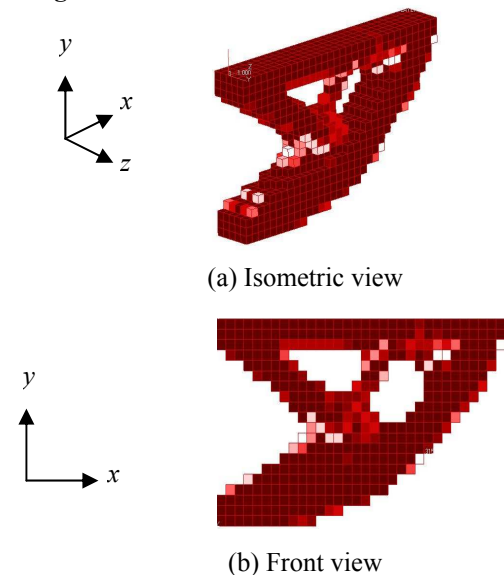


Fig. 11 Results of topology optimization using EL

계영역의 상단 끝단에 하중이 가해질 때 구조물의 강성을 최대화 하는 형상으로 위상최적설계 결과를 하였다. 본 논문의 경우 비선형 정적 반응 위상최적설계에 대한 기초연구로 경계 비선형성을 고려한 위상최적설계의 가능성 확인하였다. 따라서 향후 복잡한 접촉 비선형성을 가지는 구조물로

의 방법론 적용이 필요하다.

5. 결 론

다양한 신소재의 개발과 복잡한 구조물의 형태로 인하여 비선형성을 고려한 위상최적설계 기법의 필요성은 커지고 있다. 위상최적설계는 설계변수의 수가 매우 많기 때문에 비선형 민감도를 직접 고려한 위상최적설계는 민감도 계산에 고가의 비용이 든다. 본 논문에서는 이러한 어려움을 극복하기 위하여 등가하중을 이용한 비선형 정적 반응 위상최적설계 방법을 제안하였다.

비선형 정적 반응 위상최적설계를 위하여 등가하중법에 새로운 설계변수 갱신 방법을 제시하였다. 위상최적설계 결과로부터 0에 가까운 낮은 설계변수 값을 가지는 요소를 삭제하고 다음 설계단계의 비선형 해석을 수행한다. 이때 한번 삭제된 유한요소는 다시 생성되기 어렵다는 단점이 있기 때문에 요소가 삭제된 유한요소모델은 비선형 해석에만 사용하고 다음 설계 단계의 위상최적설계에서는 요소가 모두 존재하는 초기 모델을 이용하여 설계를 수행하였다.

재료 및 기하 비선형성을 고려한 평판 예제로 위상최적설계를 수행하고 비선형 민감도를 직접 이용하여 수행한 위상최적설계 결과와 비교함으로써 등가하중을 이용한 위상최적설계 결과가 타당함을 증명하였다. 또한 경계 비선형을 가지는 구조물의 경우에도 설계가 가능함을 보였다. 지지격자 스프링의 위상최적설계를 통하여 설계변수가 매우 많은 실제 공학 문제에서도 등가하중의 적용이 용이함을 확인하였다.

향후 비선형 정적 위상최적설계 과정에서 사용되는 설계변수 갱신방법에 대한 수학적 고찰과 설계 결과의 타당성에 대한 증명이 필요하다. 또한 본 논문에서 사용된 예제 이외에 다양한 비선형성을 가지는 공학 예제로의 적용이 필요하다.

후 기

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2007-521-D00039).

참고문헌

(1) Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method," *Computer Method in*

Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, Issue 2, pp. 197~224.

(2) Bendsoe, M.P., 1989, "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem," *Structural Optimization*, Vol. 1, No. 4, pp. 193~202.

(3) Park, G.J., 2007, *Analytic Methods for Design Practice*, Springer, Germany, pp. 237~243.

(4) Yuge, K., Iwai, N. and Kikuchi, N., 1999, "Optimization of 2-D structures Subjected to Nonlinear Deformations Using the Homogenization Method," *Structural Optimization*, Vol. 17, No. 4, pp. 286~299.

(5) Buhl, T., Pedersen, C.B.W. and Sigmund, O., 2000, "Stiffness Design Of Geometrically Nonlinear Structures Using Topology Optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 19, No. 2, pp. 93~104.

(6) Mayer, R.R., Kikuchi, N. and Scott, R.A., 1996, "Application of Topological Optimization Techniques to Structural Crashworthiness," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, Issue 8, pp. 1383~1403.

(7) Jung, D.Y. and Gea, H.C., "Topology Optimization of Nonlinear Structures," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, Issue 11, pp. 1417~1427.

(8) Arora, J.S., 2004, *Introduction to Optimum Design*, second ed., Elsevier, CA, USA.

(9) Haftka, R.T and Gurdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

(10) Choi, K.K. and Santos, J.L.T., 1987, "Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Structural Systems Part I: Theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, No. 11, pp. 2039~2055.

(11) Trier, S.D. Marthinsen, A. and Sivertsen, O.I., 1996, "Design sensitivities by the Adjoint Variable Method in Nonlinear Structural Dynamics," SIMS Simulation Conference, Trondheim, Norway.

(12) Vidal, C.V. and Haber, R.B., 1993, "Design Sensitivity Analysis for Rate-independent Elastoplasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 107, No. 3, pp. 393~431.

(13) Shin, M.K., Park, K.J. and Park, G.J., 2007, "Optimization of Structures with Nonlinear Behavior Using Equivalent Loads," *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, Issue 4-6, pp. 1154~1167.

(14) Park, G.J. and Kang, B.S., 2003, "Mathematical Proof for Structural Optimization with Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 27, No. 2, pp. 268~275.

- (15) Park, G.J. and Kang, B.S., 2003, "Validation of Structural Optimization Algorithm Transformation Dynamic Loads into Equivalent Static Loads," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 118, No. 1, pp. 191~200.
- (16) Kim, Y.I., Park, G.J., Kolonay, R.M., Blair, M. and Canfield, R.A., 2008, "Nonlinear Response Structural Optimization of a Joined-Wing using Equivalent Loads," *AIAA Journal*, Vol. 46, No. 11, pp. 2703~2713.
- (17) Kim, D.W., Lee, H.A., Song, K.N., Kim, Y.I. and Park, G.J., 2007, "Nonlinear Response Structural Optimization of a Spacer Grid Spring for a Nuclear Fuel Rod Using the Equivalent Loads," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 31, No. 12, pp. 1165~1172.
- (18) Kim, Y.I. and Park, G.J., 2007, "Case Studies of Nonlinear Response Structural Optimization Using Equivalent Loads," *Trans. of the KSME (A)*, Vol. 31, No. 11, pp. 1059~1068.
- (19) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- (20) Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and Witt, R.J., 2002, *Concepts and Applications of finite Element Analysis*, 4th edition, pp. 595~638.
- (21) Reddy, J.N., 2004, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press., NY, USA.
- (22) MSC. *NASTRAN 2008 Reference Manual*, 2008, MSC Software Corporation.
- (23) Shin, M.K., Lee, H.A., Lee, J.J., Song, K.N. and Park, G.J., 2008, "Optimization of a Nuclear Fuel Spacer Grid Spring Using Homology Constraints," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 238, Issue 10, pp. 2624~2634.