

데이터 분포특성을 이용한 다목적함수 최적화 알고리즘 개발

황인진* · 박경진*†

* 한양대학교 기계공학과

Development of a Multiobjective Optimization Algorithm Using Data Distribution Characteristics

In Jin Hwang* and Gyung Jin Park*†

* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received December 29, 2009 ; Revised August 20, 2010 ; Accepted October 14, 2010)

Key Words : Mahalanobis Distance(마하라노비스 거리), Skewed Mahalanobis Distance(치진 마하라노비스 거리), Weighting Method(가중치법), Goal Programming(목표 계획법), Standard Deviation(표준편차)

초록: 가중치법이나 목표계획법을 이용하여 다목적함수 최적화를 수행할 때 설계자는 각 함수에 적절한 가중치나 목표값을 설정해 주어야 한다. 하지만 파라미터를 잘못 설정하게 되면 파레토 최적해를 얻지 못하기 때문에 이는 설계자에게 큰 부담이 된다. 최근에 데이터의 분포특성만을 이용하여 데이터의 평균과 함수 사이의 거리를 표현하는 마하라노비스 거리(MD)를 최소화하는 MTS기법이 개발되었다. 이 방법은 파라미터를 설정하지 않아도 되는 장점이 있지만 최적해가 참고데이터의 평균으로 수렴하는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 방향성이 없는 기존의 MD에 방향성을 부여한 새로운 거리 척도인 SMD를 제안하였다. 그리고 SMD법이 계산과정에서 각 함수의 가중치를 자동으로 반영하고 평균에서 가장 멀리 위치한 한 점을 항상 파레토 최적해로 제공한다는 것을 2개의 단순예제를 통해 검증하였다.

Abstract: The weighting method and goal programming require weighting factors or target values to obtain a Pareto optimal solution. However, it is difficult to define these parameters, and a Pareto solution is not guaranteed when the choice of the parameters is incorrect. Recently, the Mahalanobis Taguchi System (MTS) has been introduced to minimize the Mahalanobis distance (MD). However, the MTS method cannot obtain a Pareto optimal solution. We propose a function called the skewed Mahalanobis distance (SMD) to obtain a Pareto optimal solution while retaining the advantages of the MD. The SMD is a new distance scale that multiplies the skewed value of a design point by the MD. The weighting factors are automatically reflected when the SMD is calculated. The SMD always gives a unique Pareto optimal solution. To verify the efficiency of the SMD, we present two numerical examples and show that the SMD can obtain a unique Pareto optimal solution without any additional information.

1. 서론

1.1 연구 배경

최근 시스템이 복잡해지고 고객의 요구가 다양해짐에 따라 여러 성능을 동시에 고려해서 설계하는 경우가 늘어나고 있다. 더불어 다목적함수 최적화의 필요성 또한 증가하고 있다. 다목적함수 최적화에서 중요한 것은 서로 상충하는 함수 사이에서 적절한 타협점을 찾는 것이다. 이를 위해 설

계자는 함수의 중요도에 따라 가중치를 설정해 주어야 한다. 이처럼 다목적함수 최적화에서 함수에 대한 가중치를 설정하는 것은 매우 중요하다. 하지만 시스템이 복잡해지면 적절한 가중치를 설정하는 것이 쉽지 않다. 따라서 함수에 대한 중요도 설정 없이 최적화하는 방법들이 연구되고 있다.

다목적함수 최적화 방법 중 가장 일반적으로 사용하는 방법은 가중치법(weighting method)⁽¹⁾과 목표 계획법(goal programming)⁽¹⁾이다. 최근 Taguchi⁽²⁾는 역공학으로 얻은 제품들의 분포특성을 이용하여 최적화 하는 MTS(Mahalanobis Taguchi system)기법을 제시하였다. MTS기법은 다차원 공간상에서 함수 사이의 상관관계를 고려하여 거리를 측정하

† Corresponding Author, gjpark@hanyang.ac.kr
© 2010 The Korean Society of Mechanical Engineers

는 MD (Mahalanobis distance)⁽³⁾를 최소화한다.

MD는 참고데이터의 평균과 표준편차 그리고 상관행렬을 이용하여 계산한다. 이때 참고데이터의 표준편차는 각 함수의 강건성을 나타낸다. 즉, 표준편차가 큰 함수는 설계변수가 조금만 변해도 함수 값이 쉽게 변하지만 표준편차가 작은 함수는 설계변수가 변해도 쉽게 변하지 않는다. 따라서 최적화 문제에서 표준편차는 각 함수의 중요도 즉, 가중치 개념으로 사용 할 수 있다.

MTS기법은 이런 MD 특성을 이용하기 때문에 함수에 별도의 가중치를 요구하지 않는다. 하지만 MD를 최소화하면 최적해는 참고데이터의 평균으로 수렴하고 이보다 더 좋은 파레토 최적해(Pareto Optimum)를 얻지 못한다. 이것이 MTS기법이 갖고 있는 구조적 한계이다. 따라서 이를 개선하기 위해 MD에 방향성을 부여하여 항상 파레토 최적해를 제공하는 새로운 거리척도인 SMD (skewed Mahalanobis distance)를 제안하고 그 효용성을 검증하고자 한다.

1.2 기존연구 고찰

다목적함수 최적화 알고리즘 중 가중 합산법(weighted sum method)⁽¹⁾은 알고리즘에 대한 이해가 쉽고 프로그램이 용이하기 때문에 가장 널리 사용된다. 하지만 가중 합산법은 비 볼록(non-convex) 문제에서는 파레토 최적해를 보장하지 못한다. 그리고 볼록(convex)한 문제 일지라도 균등한 파레토 최적해를 찾기 힘들다는 단점이 있다.⁽⁴⁾ 그리고 각 함수에 가중치를 설정해 주어야 하는 어려움이 있다. 이런 단점을 보완하기 위해 새로운 알고리즘 개발을 위해 많은 연구가 진행되고 있다.

비 볼록 문제에서는 파레토 최적해를 보장하지 못하는 단점 때문에 가중 합산법은 비선형이 강한 문제에는 적용하기 어렵다. Athan⁽⁵⁾은 비 볼록 문제에서도 파레토 최적해를 제공하도록 지수 가중 판별법(exponential weighted criterion method)을 제안하였다. 그리고 Kim 등⁽⁴⁾은 가중치법을 순차적으로 진행하여 균등한 파레토 최적해 집합을 제공하는 적응 가중 합산법(Adapted weighted sum method)을 제안하였다. Zeleny⁽¹⁾는 가용판별영역(feasible criterion space)내 한 점과 목표값 사이의 거리를 최소화하는 가중 척도법(weighted metrics method)을 이용하여 파레토 최적해를 제공하였다. Osyczka⁽⁶⁾는 L_p -척도법에서 p 를 무한대로 한 Tchebycheff 척도법을 제안하였다.

Nakayama⁽⁷⁾, Miettinen⁽⁸⁾, Goel⁽⁹⁾ 들은 함수의 중요도를 가중치로 설정하기 어렵다는 것을 확인되었

다. 이들은 함수에 가중치를 다르게 설정할 경우 설계자의 의도와 다른 최적해 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 따라서 Yoon⁽¹⁰⁾, Saaty⁽¹¹⁾, Wierzbicki 등은 가중치를 시스템적으로 설정하기 위해 등급법(ranking method), 분류법(categorization method)⁽¹⁾, 고유치법(eigenvalue method)과 같은 다양한 방법들을 제안하였다. 그리고 Nakayama⁽⁷⁾는 설계자가 만족할 만한 최적해를 얻을 때까지 각 함수의 목표값을 변경하면서 최적화하는 STOM (Satisficing trade-off method)을 개발하였다.

가중치법과 함께 많이 사용하는 또 다른 알고리즘은 Charnes⁽¹²⁾ 등이 제안한 목표 계획법(goal programming)이다. 이 알고리즘은 함수의 목표값과 설계값 사이의 편차를 최소화한다. 이의 변형된 형태로 목표 계획법에 가중치를 부여한 가중 목표 계획법(weighting goal programming)⁽¹³⁾과 함수를 중요도에 따라 정렬하고 순차적으로 최적화하는 선점 목표 계획법(preemptive goal programming)⁽¹⁾을 개발하였다. 그리고 Hwang과 Md.Masud⁽¹⁴⁾는 목표 계획법의 계산 속도를 개선하기 위해 목표 달성법(goal attainment method)을 제안하였다.

최근 Taguchi⁽²⁾는 다차원 공간에서 참고데이터의 평균과 관찰하고자 하는 시스템까지의 거리를 측정하는 거리척도인 MD를 최소화하는 MTS기법을 제안하였다. 이때 MD는 상관행렬의 역행렬로 계산하기 때문에 데이터간 공선성(co-linearity)이 큰 경우에는 계산이 어렵다. 이를 개선하기 위해 공선성이 큰 경우에도 MD를 계산 할 수 있도록 한 MTGS (Mahalanobis Taguchi Gram-Schmidt System)기법을 소개하였다

2. 다목적함수 최적화 기법 고찰

2.1 다목적함수 최적화 문제의 정식화

다목적함수 최적화는 일반적으로 식 (1)과 같이 정식화 한다.⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & \text{Find} && \mathbf{b} \\ & \text{to minimize} && \mathbf{F}(\mathbf{b}) = [f_1(\mathbf{b}), f_2(\mathbf{b}), \dots, f_k(\mathbf{b})]^T \\ & \text{subject to} && g_j(\mathbf{b}) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m \\ & && h_l(\mathbf{b}) = 0, \quad l=1,2,\dots,l \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 k , m , l 은 각각 목적함수의 개수 그리고 부등 및 등 제한조건의 개수이고 g_j 와 h_l 은 부등 및 등 제한조건을 나타낸다. $\mathbf{F}(\mathbf{b}) \in \mathbf{R}^k$ 는 목적

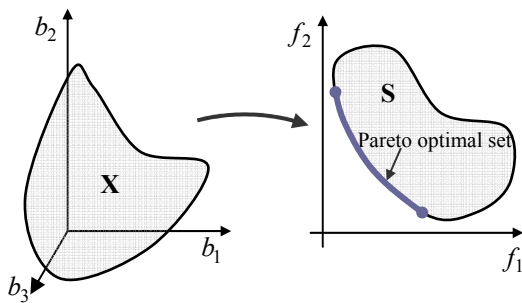
함수 $f_k(\mathbf{b})$ 의 집합이고 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ 는 설계변수 벡터이다. 이때 n 은 설계변수 b_i 의 개수이다.

주어진 가용설계영역(feasible design space) \mathbf{X} 와 가용판별영역(feasible criterion space) \mathbf{S} 는 각각 $\{\mathbf{X} | g_j(\mathbf{b}) \leq 0, j=1,2,\dots,m; \text{ and } h_l(\mathbf{b})=0, l=1,2,\dots,l\}$ 와 $\{\mathbf{F}(\mathbf{b}) | \mathbf{b} \in \mathbf{X}\}$ 로 표시한다. 그리고 파레토 최적해는 다음과 같이 정의한다.⁽¹⁾ “만일 어떤 한 함수에 대하여 $f_i(\mathbf{b}) < f_i(\mathbf{b}^*)$ 인 설계변수 $\mathbf{b} \in \mathbf{X}$ 가 존재하지 않으면서 $\mathbf{F}(\mathbf{b}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{b}^*)$ 을 만족하는 $\mathbf{b}^* \in \mathbf{X}$ 를 파레토 최적해라 한다”. 이것을 도식적으로 표현하면 Fig. 1과 같다. 그리고 볼록 면과 비 볼록 면은 Fig. 2와 같이 가용판별영역 내 두 점을 잇는 선이 모두 가용판별영역 내에 위치하면 볼록 면으로 그렇지 않으면 비 볼록 면으로 정의한다.

2.2 마하라노비스 거리(MD)^(2,3) 소개

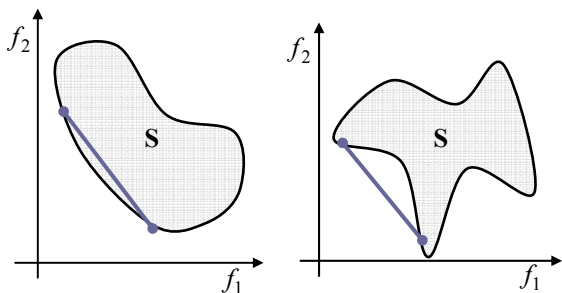
MD는 다차원 공간에서 함수간 상관관계를 고려하여 데이터의 평균에서 관찰하려는 점까지의 거리를 측정하는 방법으로 다음과 같이 정의한다.

$$MD_j = \frac{1}{k} \mathbf{z}_j^T \mathbf{A} \mathbf{z}_j \quad (2)$$



(a) Feasible design space (b) Feasible criterion space

Fig. 1 Plot of the feasible design space and the feasible criterion space



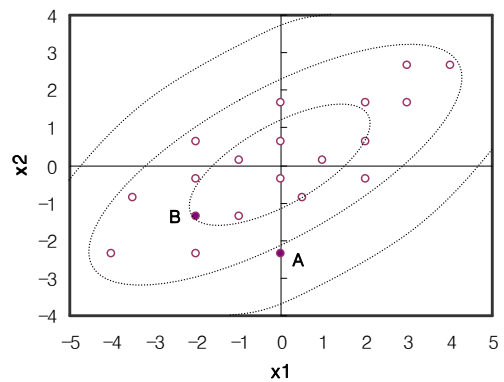
(a) Convex surface (b) Non-convex surface

Fig. 2 Comparison of convex and non convex surfaces

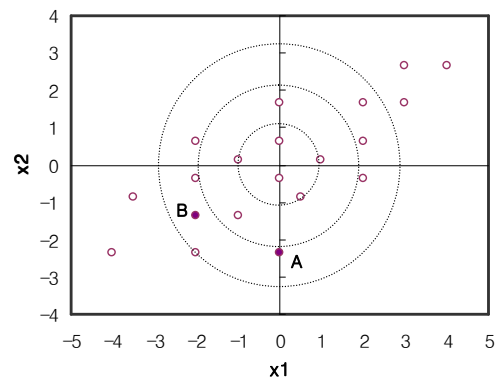
이때 MD_j 는 j 번째 샘플이 참고데이터의 평균으로부터 떨어진 거리를 나타낸다. 그리고 \mathbf{z} 와 \mathbf{A} 는 각각 정규화 된 표준정규분포 데이터와 이들 데이터로 계산한 상관행렬의 역행렬을 의미한다.

MD는 함수 사이의 상관관계를 고려하기 때문에 Fig. 3(a)와 같이 타원형의 분포형태를 갖는다. 하지만 만일 함수 사이에 상관관계가 없거나 상관관계를 고려하지 않으면 Fig. 3(b)와 같이 원의 형태를 갖고 유클리디안 거리(Euclidean distance, ED)라 부른다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 두 점 A와 B를 ED로 평가하면 두 점은 평균에서 비슷한 거리에 위치한다. 하지만 MD로 측정하면 점 A가 B보다 평균에서 더 멀리 위치함을 알 수 있다.

이처럼 MD는 함수간 상관관계를 이용하여 계산하기 때문에 함수의 시스템 특성을 정확하게 측정할 수 있다. 따라서 참고데이터의 평균에서 멀리 떨어진 시스템 즉, 비 정상 데이터를 데이터의 평균으로 최적화하고자 할 때 MD를 이용하면 매우 효과적으로 최적화 할 수 있다.



(a) Diagram of MD



(b) Diagram of ED

Fig. 3 Diagram of MD and ED with different shapes

2.3 가중치법⁽¹⁾ 소개

가중치법의 가장 일반적 형태는 함수를 지수와 가중치의 형태로 나타내는 가중 지수합법(weighted exponential sum method)으로 다음과 같이 표현한다.

$$U = \sum_{i=1}^k \omega_i [f_i(\mathbf{b})]^p \quad (3)$$

여기서 ω_i 는 각 함수의 중요도를 나타내는 가중치로 최적화에 앞서 설계자가 설정해 주어야 한다. ω_i 는 $\sum_{i=1}^k \omega_i = 1$ 이고 $\omega_i > 0$ 인 특성을 갖고 p 는 $1 \leq p \leq \infty$ 구간에 존재한다. 그리고 파라미터 p 값에 대한 탐색 선은 Fig. 4와 같이 정의한다. 이와 같은 방법은 최적해가 p 값에 크게 영향을 받기 때문에 파라미터를 설정할 때 p 를 먼저 결정한 뒤 가중치를 시스템적으로 설정한다.

만일 식 (3)의 p 를 1로 설정하면 식 (4)와 같이 가중 합산법(weighted sum method)이 된다.

$$U = \sum_{i=1}^k \omega_i f_i(\mathbf{b}) \quad (4)$$

가중 합산법은 Fig. 5(a)와 같이 파레토 면이 볼록한 경우에는 항상 파레토 최적해를 제공하지만 Fig. 5(b)와 같이 파레토 면이 비 볼록한 문제에서는 앞서 정의한 파레토 최적해 조건을 만족하지 못한다.

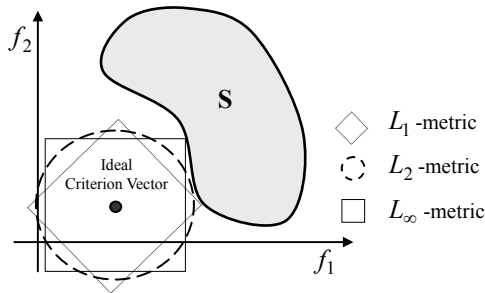
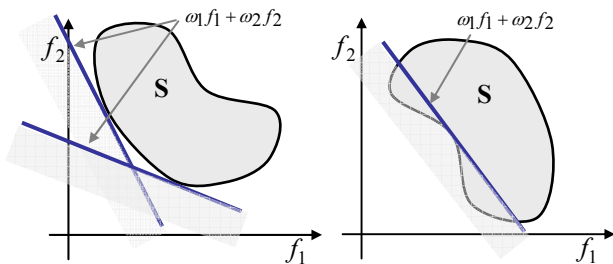


Fig. 4 Diagram of L_p -metrics



(a) In the convex shape (b) In the non convex shape

Fig. 5 A Pareto optimal of the weighted sum method

식 (4)의 가중치를 모두 1로 하면 효용함수는 식 (5)와 같이 단순히 함수들의 합으로 표현할 수 있다. 이것을 목적 합산법(objective sum method)이라 부른다.

$$U = \sum_{i=1}^k f_i(\mathbf{b}) \quad (5)$$

목적 합산법은 가중치와 지수를 모두 1로 고정하여 설계자에게 함수에 대한 추가적인 정보를 요구하지 않는다. 그리고 항상 파레토 최적해를 제공하기 때문에 알고리즘을 비교할 때 많이 이용한다.

2.4 목표 계획법 소개

목표 계획법은 각 함수에서 사전에 설정한 목표 (F_i^o)까지의 편차(d_i) 총합인 $\sum_{i=1}^k |d_i|$ 을 최소화하는 방법이다. 이때 편차는 양의 편차와 음의 편차로 구분할 수 있는데 각각 $d_i^+ = \max[0, f_i(\mathbf{b}) - F_i^o]$ 와 $d_i^- = \max[0, F_i^o - f_i(\mathbf{b})]$ 로 표현할 수 있다. 그리고 이들은 $d_i = d_i^+ - d_i^-$, $d_i^+ \geq 0, d_i^- \geq 0$, $d_i^+ d_i^- = 0$ 그리고 $|d_i| = d_i^+ + d_i^-$ 의 특성을 갖는다. 편차에 양의 편차와 음의 편차를 적용하여 정리하면 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{to minimize } \sum_{i=1}^k (d_i^+ + d_i^-) \\ & \mathbf{b} \in \mathbf{X}, d^+, d^- \\ & \text{subject to } f_i(\mathbf{b}) + d_i^+ + d_i^- = F_i^o, i=1,2,\dots,k, \quad (6) \\ & d_i^+, d_i^- \geq 0, i=1,2,\dots,k, \\ & d_i^+ d_i^- = 0, i=1,2,\dots,k. \end{aligned}$$

Hwang과 Md. Masud는 기존 목표 계획법에 임의의 스칼라 λ 와 각 함수의 상대적 중요도를 나타내는 가중치 ω_i 를 적용하여 계산속도를 개선하기 위한 목표 달성법(goal attainment method)^(1,14)을 개발하였다. 이것을 수식으로 표현하면 식 (7)과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{to minimize } \lambda \\ & \text{subject to } f_i(\mathbf{b}) - \omega_i \lambda \leq F_i^o, i=1,2,\dots,k \quad (7) \end{aligned}$$

2.5 MTS기법⁽²⁾ 소개

MTS기법은 다차원 공간상의 거리척도인 MD를 직교배열표의 목적함수로 이용한다. 그리고 MD가 최소가 되도록 평균분석을 이용한 이산 최적화를 수행한다. MTS기법은 Table 1과 같이 크게 3단계 11과정으로 진행된다.

Table 1 Procedure of the MTS technique

Stage I: Collection of normal group and calculate MD
Step 1. Define a normal group (benchmarked samples)
Step 2. Define objectives (characteristic function)
Step 3. Collect the data of a normal group (n, n>k)
Step 4. Calculate mean, standard deviation, and correlation
Step 5. MD of each normal group
Stage II: Validate the discrimination ability
Step 6. Collect the data of an abnormal group
Step 7. Calculate MD about an abnormal group
Step 8. Evaluate the discrimination ability about abnormal group
Stage III: Identify the useful objectives and Optimization
Step 9. Identify the useful objective using an S/N ratio
Step 10. Select main reduced objective functions
Step 11. Optimize the system using orthogonal array

첫 번째 단계는 정상그룹을 선정하고 역공학에 의한 데이터를 확보한다. 그리고 확보한 참고데이터의 평균과 표준편차 그리고 상관행렬을 계산하고 이를 토대로 각 함수의 MD를 계산한다. 두 번째 단계에서는 개선하고자 하는 시스템에 대한 데이터를 확보하고 정상그룹의 평균에서 떨어진 정도를 나타내는 MD를 통해 시스템 수준을 판별한다. 마지막 단계에서는 직교배열표를 이용하여 기여도가 높은 함수를 선별하고 이 함수를 이용하여 MD를 최소화하는 이산 최적화를 수행한다.

MD는 각 함수의 표준편차를 이용하여 함수의 중요도를 자동으로 반영한다. 만일 어떤 함수의 표준편차가 작다면 설계를 변경하여도 함수가 쉽게 변하지 않기 때문에 함수에 큰 가중치를 부여한다. 하지만 표준편차가 큰 함수는 설계를 조금만 변경하여도 함수가 쉽게 변하기 때문에 작은 가중치를 부여하게 된다. 즉, 각 함수가 갖는 표준편차의 역수에 의해 가중치가 자동으로 설정된다. 따라서 MD는 참고데이터의 분포특성만으로 가중치를 설정하기 때문에 추가적인 정보를 요구하지 않는다. 이것은 최적화를 하는데 큰 장점으로 여러 분야에서 MD를 활용하고 있다.⁽¹⁵⁾

MD를 최소화한다는 것은 시스템을 참고데이터의 평균에 가까이 가도록 하는 것을 의미한다. 즉, Fig. 6에 표시한 바와 같이 개선하고자 하는 시스템이 시작점에 상관없이 항상 참고데이터의 평균으로 수렴한다. 결과적으로 평균보다 더 좋은 최적해를 찾지 못하는데 이것이 MTS기법이 갖고 있는 구조적 한계이다. 따라서 MD의 장점을 유지하면서 파레토 최적해를 제공할 수 있는 새로운 방법의 제안이 필요하다.

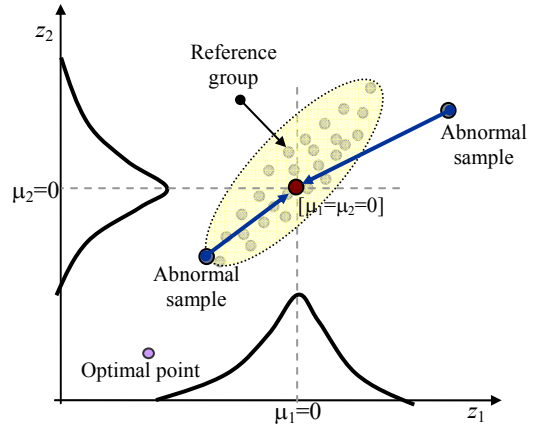


Fig. 6 Diagram of the optimization direction using MD

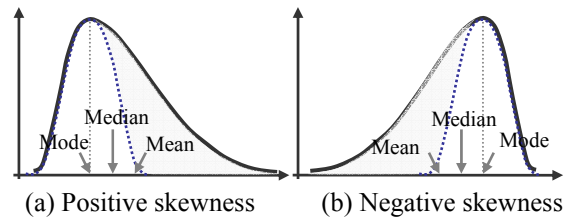


Fig. 7 Skewed distribution shape

3. SMD 소개

3.1 왜도(skewness)의 정의

MD에 방향성을 부여하기 위해 분포의 비 대칭성을 나타내는 왜도의 개념을 도입하였다. 왜도는 데이터의 분포가 평균에서 한쪽으로 치우쳐 있는 정도를 나타내는 척도로 Fig. 7과 같이 꼬리가 오른쪽으로 치우친 양의 왜도(positive skewness)와 왼쪽으로 치우친 음의 왜도(negative skewness)로 구분할 수 있다.^(16,17)

왜도는 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (8)$$

여기서 γ 와 μ_3 은 각각 왜도와 평균에 대한 3차 모멘트를 나타낸다. 이때 평균에 대한 k 번째 모멘트인 μ_k 는 다음과 같이 일반화 할 수 있다.

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k f(x) dx \quad (9)$$

$E(X)$ 는 확률변수 X 의 기대값으로 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ 로 정의하고 k 값에 따라 분포특성이 달라진다. 식 (8) 을 평균과 표준편차의 항으로 일반화하면 식 (10) 과 같이 표현할 수 있다.

$$\gamma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i)^3 \quad (10)$$

3.2 SMD (skewed Mahalanobis distance) 정의

왜도는 단일분포의 치진 정도를 나타낸다. 그러나 다목적함수 최적화는 다차원 공간에서의 한 점이 평균에서 어느 방향으로 어느 정도 치우쳐 있는지에 대한 정보를 필요로 한다. 따라서 이를 위해 k 차원 공간에서 k 개의 목적함수를 갖는 한 점 (x_1, x_2, \dots, x_k) 을 새로운 데이터로 하여 식 (10)에 적용한다. 이때 평균과 표준편차는 각 함수의 평균과 표준편차인 $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ 와 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ 를 적용한다. 이것을 식 (10)에 대입하여 전개하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{1}{k} \left\{ \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^3 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{1}{k} (z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_k^3) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (z_i)^3 \end{aligned} \quad (11)$$

이때 γ_p 를 점왜도(point skewness)로 명명한다.

본 논문에서는 새롭게 정의한 점왜도를 MD에 곱해 방향성을 갖는 새로운 거리척도인 SMD를 제시하였다. SMD를 수학적으로 정의하면 다음과 같다.

$$SMD = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^3 \cdot MD = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (z_i)^3 \cdot MD \quad (12)$$

식 (12)의 $(z_i)^3$ 은 공간 내 한 점이 분포의 평균에서 치우친 정도를 나타내는 값으로 최적화 과정에서 설계변수에 따라 지속적으로 변한다. 그리고 이 값의 3승은 편차를 증폭시켜 방향성에 대한 식별력을 증가시킨다. 따라서 SMD는 Fig. 8과 같이 참고데이터의 평균에서 가장 멀리 위치한 파레토 최적해를 찾도록 한다. 그리고 파레토 최적해 집합 중 평균에서 음의 방향으로 가장 멀리 위치한 점을 최적해로 제공한다.

SMD의 또 다른 특징은 표준정규분포 데이터인 z 를 계산할 때 함수의 표준편차를 반영한다. 만일 평균에서 함수까지의 거리가 동일하다면 표준편차가 작은 함수는 더 큰 z 값을 갖는다. 즉, 함수의 표준편차가 작다는 것은 설계를 변경 하더라도 함수특성이 쉽게 변하지 않는다는 것으로 시스템의 강건성을 나타낸다. 이처럼 강건한 시스템은 평균에서 멀리 이동할 확률이 낮기 때문에 이 함수에는 상대적으로 큰 가중치를 부여하게 된다.

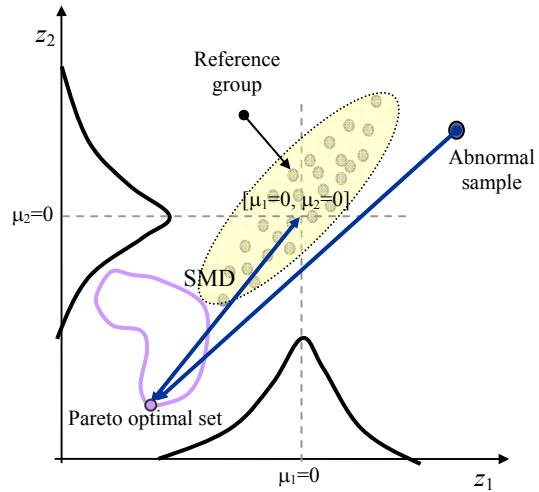


Fig. 8 Diagram of the optimization direction using SMD

따라서 참고데이터의 표준편차는 다음과 같이 각 함수에 대한 가중치의 개념으로 작용한다

$$\frac{1}{k} (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_k x_k) \cdot MD \quad (13)$$

이때 각 함수에 대한 가중치는 표준편차의 역수에 비례하여 SMD 계산시 자동으로 반영된다. 따라서 설계자는 각 함수에 대한 가중치를 고민할 필요가 없다. 그리고 SMD는 표준편차로 정규화된 표준정규분포 데이터를 이용하기 때문에 함수의 크기를 고민할 필요가 없다.

4. 수학예제 및 고찰

SMD의 효용성을 검증하기 위해 비 볼록 형태를 갖는 수학예제와 단순 공학예제인 외팔보 문제를 사용하였다. SMD법은 가중 합산법(WSM), 거리법(DM), 전역 달성법(GAM) 및 전역 판별법(GCM)과 비교하였다. 그리고 각 알고리즘의 최적화 결과는 함수의 강건성을 고려하도록 새롭게 개발한 개선률 척도인 식 (14)와 일반적인 개선률을 나타내는 (15)의 2가지 방법으로 비교하였다.

$$C_1 = \sum_{i=1}^k \frac{f_{i_opt} - f_{i_initial}}{\sigma_{i_sample}} \quad (14)$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_{i_opt} - f_{i_initial}}{|f_{i_initial}|} \quad (15)$$

여기서 f_{i_opt} , $f_{i_initial}$ 그리고 σ_{i_sample} 는 각각 i 번째 함수의 최적해와 초기값 그리고 표준편차를 의미한다.

본 연구에서는 각 함수의 강건성을 나타내는 표준편차를 이용하여 최적화하기 때문에 기존의 개선 정도를 나타내는 C_2 와 달리 각 함수의 강건성을 고려하여 개선 정도를 파악할 필요가 있다. 따라서 각 함수의 강건성을 고려할 수 있도록 새로운 개선률 척도인 C_1 을 고안하였다. 즉, 이 방법은 각 함수가 갖고 있는 표준편차의 역수에 비례하여 개선 정도를 계산한다. 그리고 다목적함수 최적화는 여러 설계 방법론을 통합하여 최적화하는 상용 소프트웨어는 PIA_{NO} (Process Integration, Automation and Optimization)⁽¹⁸⁾를 이용하였다.

4.1 수학예제

비 볼록 문제에서 파레토 최적해의 제공여부를 확인하기 위해 파레토 면이 볼록하지 않은 수학예제를 구성하였다. 설계자가 2차원 공간에서 시각적으로 판단하기 쉽도록 설계변수가 2개인 목적함수 2개를 이용하였다. 본 예제의 다목적함수 최적화는 다음과 같이 정식화 한다.

Find **b**
 to minimize $f_1(\mathbf{b}) = b_1^3 + b_2^3 + b_1 + b_2 + b_1b_2$ (16)
 $f_2(\mathbf{b}) = 84.9 + 5.3 \times b_1 + 0.24 \times b_2 - 0.52 \times b_1^2 - 11.8 \times b_2^2 + 0.22b_1b_2$
 subject to $-5 \leq b_i \leq 5, i = 1, 2$

주어진 설계변수 구간 내에서 함수 f_1 과 f_2 는 Fig. 9와 같은 형태를 갖는다.

SMD는 기본적으로 기존 제품으로부터 얻은 참고데이터의 분포특성을 이용한다. 하지만 수학예제는 참고데이터를 얻을 수 없기 때문에 임의로 생성한 설계변수를 이용하여 함수값을 계산하고 이들 데이터의 평균과 표준편차를 계산에 이용한다. 보통 수학적으로 정확하게 표현할 수 있는 시스템은 설계변수에 의해 시스템 특성을 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 랜덤변수를 이용하여 얻은 데이터를 이용하더라도 시스템의 분포특성을 이해하는 데는 문제가 없다. 따라서 본 예제에서는 참고데이터 생성을 위해 랜덤변수를 이용한다.

랜덤변수는 각 함수의 특성이 반대 경향을 갖는 위치 내 한 점 [4,4]가 평균이 되도록 선정하였다. 그리고 랜덤변수로부터 얻은 함수값 및 분포특성은 Table 2에 표시하였다. 함수의 가용판별영역과 참고데이터의 분포를 Fig. 10에 표시하였다. Fig. 10을 통해 본 예제는 비 볼록 형상이고 참고데이터가 음의 상관관계를 갖는 문제임을 알 수 있다.

최적화에 앞서 각 함수의 가중치는 모두 1로

설정하였다. 그리고 Fig. 10에 표시한 바와 같이 가용판별영역 내에서 최상의 값을 갖는 A점 부근의 값 [-200, -200]을 목표값으로 설정하였다. 그리고 GCM의 파라미터 p 는 2로 설정하였다. 이것을 정리하면 Table 3과 같다.

Table 2 Distribution characteristics of random data

# of samples	b_1	b_2	f_1	f_2
1	4.00	3.83	143.6	-71.4
2	3.78	4.08	145.2	-94.9
3	4.77	4.22	213.3	-106.6
...
13	3.73	3.48	114.2	-41.4
14	3.79	4.77	189.3	-165.3
15	2.96	3.91	103.9	-80.6
Mean	4.0	4.0	166.0	-100.0
Standard deviation	0.6	0.5	41.4	50.7
Correlation rate				-0.71

Table 3 Parameter values of each algorithm of mathematical example

	Weighting		Goal		p
	ω_1	ω_2	F_1^o	F_2^o	
WSM	1	1			
DM			-200	-200	
GAM	1	1	-200	-200	
GCM			-200	-200	2

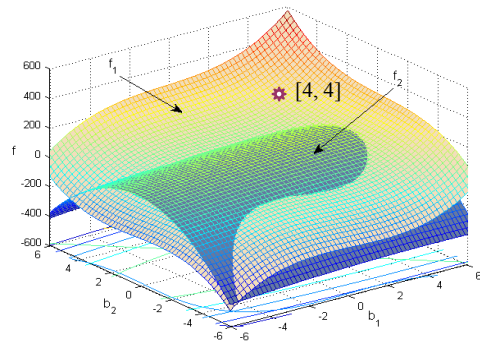


Fig. 9 Plot of each objective function in a design space of mathematical example

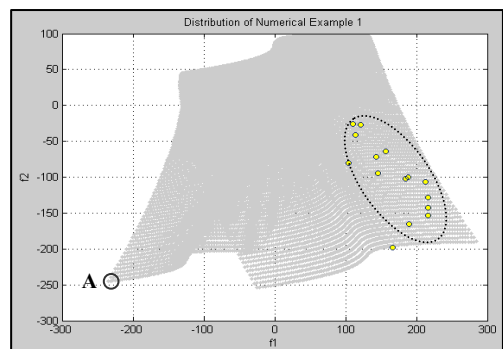


Fig. 10 Plot of the feasible criterion space and the reference data of mathematical example

Table 4 Optimization results of mathematical example

Method	Optimum design variables		Optimal objective functions		Rate of improvement	
	b_1	b_2	f_1	f_2	C_1	C_2
Initial value	4.0	4.0	152.0	-86.54		
SMD	-5.0	-5.0	-234.6	-244.7	-12.5	-4.4
WSM	-5.0	5.0	-25.4	-253.3	-7.6	-3.1
DM	-1.71	2.68	10.6	-10.8	-1.9	-0.1
GAM	-5.0	3.49	-101.5	-101.3	-6.4	-1.8
GCM	-5.0	3.99	-82.4	-145.9	-6.8	-2.2

Table 5 Optimization results with different parameter of numerical example

Method	Optimum design variables		Optimal objective functions		Rate of improvement	
	b_1	b_2	f_1	f_2	C_1	C_2
SMD	-5.0	-5.0	-234.6	-244.7	-12.5	-4.4
DM	-5.0	4.63	-49.11	-211.83	-7.3	-2.8
GAM	-5.0	3.58	-98.37	-109.09	-6.5	-1.9
GCM	-5.0	4.19	-73.06	-165.65	-7.0	-2.4

각 알고리즘에 대한 최적화 결과는 Table 4와 같고 최적해 위치는 Fig. 11의 가용판별영역에 표시하였다. 그 결과, 비 볼록 문제에서 가중치법과 SMD법만 파레토 최적해를 찾는다. 그 중 SMD법이 가용판별영역내 존재하는 최상의 값을 최적해로 제공한다. 개선 정도는 SMD법이 C_1 조건에서 -12.5로 참고데이터의 평균에서 가장 멀리 위치하고 C_2 조건도 438%로 다른 알고리즘에 비해 좋은 결과를 얻는다.

SMD는 시스템이 갖고 있는 분포특성을 이용하기 때문에 최적해 결과도 그 분포특성을 반영한다. 즉, Fig. 12와 같이 SMD는 참고데이터의 분포특성을 토대로 최적해를 탐색한다. 따라서 SMD법은 파레토 최적해와 만나는 음의 방향으로 가장 큰 SMD값을 최적해로 제공한다.

결과적으로 본 예제는 Fig. 11에서 알 수 있듯이 SMD법은 분포의 평균에서 가장 먼 곳에 위치한 점을 최적해로 제공한다는 것을 보여준다. 그러나 가중치법은 파레토 최적해는 제공하지만 함수에 주어진 가중치가 모두 1이기 때문에 두 함수가 비슷하게 개선된 국부 최적해로 수렴한다.

목표값 변경에 따른 최적해를 비교하기 위해 목표값을 [-234.6, -244.7]로 변경하여 최적화를 다시 수행하였다. 그 결과 Table 5와 같이 DM은 다소 개선되지만 다른 알고리즘의 개선효과는 미미하다. 그리고 목표값을 이용하는 알고리즘들은 목표값을 변경해도 파레토 최적해를 얻지 못한다. 결과적으로 목표값을 이용하는 알고리즘은 비 볼록 문제에서는 최적해를 보장하지 못함을 확인하였다.

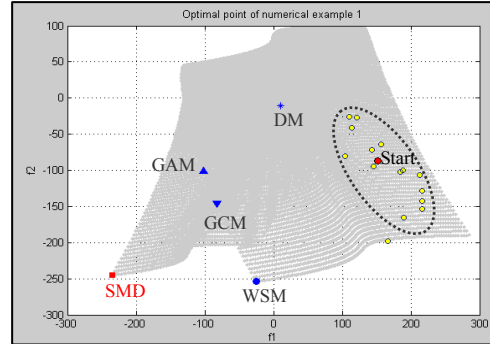


Fig. 11 Optimal positions of mathematical example

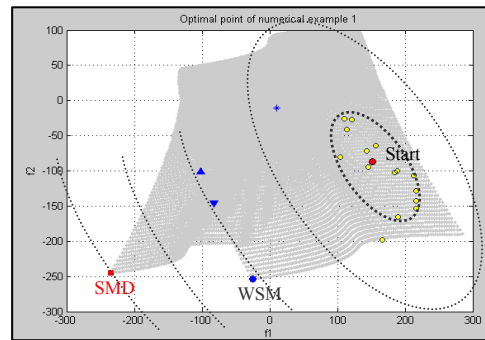


Fig. 12 Distribution characteristic of SMD

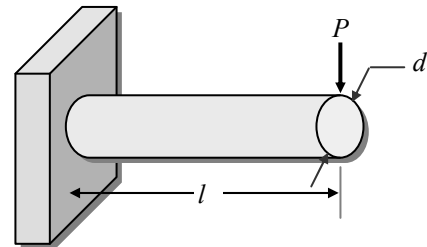


Fig. 13 Schematic of a simple cantilever beam

4.2 외팔보 예제

각 함수의 표준편차에 따른 가중치가 최적화에 주는 영향을 파악하기 위해 무게를 줄이면서 보 끝 단에서의 처짐량도 동시에 개선하는 외팔보 예제를 이용한다. 외팔보는 직경이 d 고 길이가 l 인 원형 보가 한쪽 벽에 붙어있는 형태로 Fig. 13과 같이 표현한다.

외팔보 예제에 대한 다목적함수 최적화는 다음과 같이 정식화 하였다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Find} && d, l \\
 &\text{to minimize} && f_1(d, l) = W = \rho \frac{\pi d^2}{4} l \\
 &&& f_2(d, l) = \delta = \frac{64 Pl^3}{3E\pi d^4} \\
 &\text{subject to} && \sigma_{\max} \leq S_y, \delta \leq \delta_{\max} \\
 &&& 10 \leq d \leq 50, 200 \leq l \leq 1000
 \end{aligned} \tag{17}$$

본 예제에서 최대응력과 최대 처짐량은 각각 300MPa과 5mm이내로 설정하였다. 그리고 최대응력 σ_{max} 는 $32Pl/\pi d^3$ 로 정의한다. 이때 밀도 ρ 는 7800kg/m^3 , 하중 P 는 1kN 그리고 탄성계수 E 는 207GPa로 설정하였다.

SMD를 이용하여 외팔보 예제를 최적화하기 위해서는 참고데이터가 필요하다. 하지만 실제 공학 문제인 외팔보 예제에 대한 많은 양의 데이터를 얻기가 쉽지 않다. 따라서 본 예제에서도 앞의 예제와 동일한 방법으로 임의로 생성한 랜덤변수를 이용하여 얻은 함수값을 참고데이터로 사용하였다.

본 예제에서 개선하고자 하는 목적함수인 외팔보의 중량과 처짐량은 식 (17)과 같이 수학적으로 잘 정의할 수 있다. 따라서 임의의 설계변수에 대한 함수값은 실제와 유사한 값을 갖는다. 이처럼 임의의 설계변수로 계산한 함수는 실제와 유사한 분포특성을 갖기 때문에 랜덤변수를 사용하더라도 외팔보가 갖는 데이터의 분포특성을 이해하는 데는 문제가 없다. 랜덤변수에 의해 생성된 함수값과 데이터의 분포특성은 Table 6에 정리하였다.

Table 6 Data distribution characteristics of a cantilever beam

Number of samples	d	l	W	δ
1	32.4	767.4	4.93	13.46
2	38.8	722.7	6.66	5.47
3	32.9	738.6	4.90	11.25
...
13	32.7	777.8	5.09	13.50
14	32.5	753.8	4.88	12.58
15	32.2	775.5	4.93	14.20
Mean	34.4	756.3	5.5	10.64
Standard deviation			0.95	2.81
Correlation rate			-0.85	

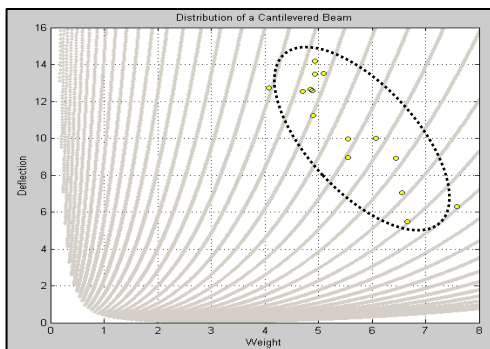


Fig. 14 Plot of distribution of the reference data of a cantilever beam

Table 6과 같이 중량은 처짐량보다 상대적으로 작은 표준편차를 갖는다. 이것은 중량이 처짐량 보다 상대적으로 더 강건하다는 것을 뜻한다. 즉, 중량을 최소화 시키는 것이 처짐량을 줄이는 것 보다 더 힘들다는 것을 의미한다. 따라서 SMD를 이용할 때 중량에 더 큰 가중치가 설정되어 최적화를 수행하게 된다.

Fig. 14는 외팔보 예제의 중량과 처짐량에 대한 가용관별영역과 랜덤하게 생성된 참고데이터의 분포를 나타낸다. 그림과 같이 외팔보는 파레토 면이 볼록한 형태고 두 함수는 음의 상관관계를 갖는 문제임을 알 수 있다.

외팔보 예제를 최적화하기 위해 Table 7과 같이 가중치는 모두 1로 하고 목표값은 평균보다 작은 임의의 값 [2, 0.1]로 설정하였다. 이를 토대로 수행한 외팔보 예제의 최적화 결과는 Table 8에 정리하였다. 그리고 각 알고리즘의 최적화 결과를 도식적으로 비교하기 위해 최적해 위치를 Fig. 15와 같이 가용관별영역에 표시하였다.

Table 7 Parameter values for a cantilever beam

	Weighting		Goal		p
	ω_1	ω_2	F_1^o	F_2^o	
WSM	1	1			
DM			2	0.1	
GAM	1	1	2	0.1	
GCM			2	0.1	2

Table 8 Optimization results of a cantilever beam

Method	Optimal design variables				Optimal objective functions		Rate of improvement	
	d	l	W	δ	C_1	C_2		
Initial Value	34.4	756.3	5.48	10.14	-	-		
SMD	21.1	200.0	0.54	1.33	-8.3	-1.8		
WSM	24.9	200.2	0.74	0.71	-8.3	-1.8		
DM	34.9	272.0	2.04	0.44	-7.1	-1.6		
GAM	40.4	200.0	2.00	0.10	-7.2	-1.6		
GCM	39.5	209.7	2.00	0.12	-7.2	-1.6		

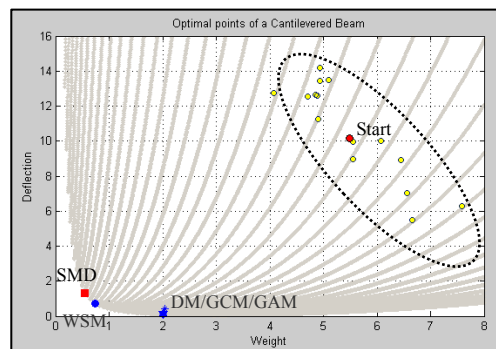


Fig. 15 Optimal positions of a cantilever beam

외팔보 예제는 Fig. 15에서 알 수 있듯이 파레토 면이 볼록한 형태이기 때문에 모든 알고리즘이 파레토 최적해를 제공한다. 이중 SMD법과 가중치법의 경우 최적해 결과는 약간 상이하지만 유사한 개선 정도를 갖는다. 다만 SMD법은 가중치법에 비해 중량이 좀 더 개선되고 처짐량은 약간 손해보는 특징을 보인다. 이것은 중량의 표준편차가 처짐량의 표준편차보다 작기 때문에 중량에 좀 더 큰 가중치가 부여된 것에 기인한 결과다. 목표값을 토대로 최적화하는 알고리즘인 DM, GAM 그리고 GCM은 모두 목표값으로 설정한 [2, 0.1]부근으로 최적해가 수렴하는 것을 알 수 있다.

이처럼 SMD법은 최적화 과정에서 주어진 참고데이터의 표준편차가 역수의 형태로 함수에 가중치를 제공한다. 이것은 시스템에 대한 가중치 정보를 설계자가 판단해야 하는 수고를 줄여주기 때문에 설계자에게 있어 큰 장점이 된다.

5. 결 론

여러 개의 목적함수를 동시에 고려하여 시스템을 최적화하기 위해서는 설계자가 각 함수에 대한 중요도 정보를 제공해야 한다. 하지만 이것은 쉽지 않다. 따라서 함수에 대한 중요도 정보 없이 항상 파레토 최적해를 제공하는 알고리즘의 개발이 필요하였다. 이를 위해 다차원 공간에서 함수간 상관관계를 이용하여 거리를 측정하는 MD에 방향성을 부여한 새로운 거리척도인 SMD를 제안하였다. 그리고 제안한 SMD의 효용성을 검증하기 위해 파레토 면이 비 볼록 형태인 수학문제와 함수간 표준편차가 다른 외팔보 예제를 적용하였다. 그 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, SMD법은 최적화 과정에서 시스템의 특성을 표현하는 표준편차와 같은 참고데이터의 분포특성을 이용하여 각 함수에 중요도 정보 즉 가중치를 자동으로 부여하여 최적화를 수행한다. 따라서 설계자는 함수에 대한 중요도를 설정할 필요가 없다. 이것은 시스템이 복잡하여 함수의 특성을 파악하기 힘든 공학문제를 최적화 할 때 설계자에게 큰 장점이 된다. 하지만 가중치가 분포특성에 의해 자동으로 결정되기 때문에 간혹 설계자의 의도가 반영되지 않은 파레토 최적해를 얻을 수 있다는 점을 고려할 필요가 있다.

둘째, SMD법은 참고데이터의 평균에서 음의 방향으로 가장 멀리 위치한 SMD를 최적해로 제공한다. 따라서 SMD법은 파레토 면의 형상에 상관없이 항상 파레토 최적해를 제공한다. 마지막으로

SMD법은 각 함수의 평균과 표준편차로 정규화된 분포 데이터를 사용하기 때문에 크기가 서로 다른 함수를 최적화하는 경우에도 유용하게 적용할 수 있다.

다만 SMD법은 시스템의 분포특성을 이용하기 때문에 항상 설계하고자 하는 시스템에 대한 참고데이터가 있어야 하는 제약조건이 있다. 따라서 SMD법을 효과적으로 사용하기 위해서는 시스템의 특성을 잘 설명하는 많은 데이터를 확보하는 것이 중요하다. 그리고 많은 함수를 동시에 고려하는 대형 공학문제에 적용하여 본 알고리즘의 계산비용 및 효용성에 대한 검토는 향후 과제로 진행하고자 한다.

후 기

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업(WCU)으로부터 지원받아 수행되었습니다(R32-2008-000-10022-0).

참고문헌

- (1) Marler, R.T. and Arora, J.S., 2004, "Survey of Multi-Objective Optimization Method for Engineering," *Struct Multidisc Optim* 26, pp. 369~395.
- (2) Taguchi, G. and Jugulum, R., 2002, "The Mahalanobis-Taguchi Strategy : A Pattern Technology system," *John Wiley & Sons*.
- (3) Maesschalck, R.D., Jouan, R. and Massart, D.L., 2002, "Tutorial: The Mahalanobis distance," *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* 50, pp. 1~18.
- (4) Kim, I.Y. and de Weck, O.L., 2005, "Adaptive Weighted-Sum Method for Bi-Objective Optimization: Pareto Front Generation," *Struct Multidisc Optim* 29, pp. 149~158.
- (5) Athan, T.W. and Papalambros, P.Y., 1996, "A Note on Weighted Criteria Methods for Compromise Solutions in Multi-Objective Optimization," *Engineering Optimization* 27, pp. 155~176.
- (6) Osyczka, A., 1989, "Multicriterion Decision Making with Min-Max Approach," *Optimization Methods in Structural Design*, Edited by H.Eschenauer, N. Olhoff, Euromech-Colloquium 164, Wissenschaftsverlag.
- (7) Nakayama, H. and Furukawa, K., 1985, "Satisficing Trade-Off Method with an Application to Multiobjective Structure Design," *Large Scale Systems*, Vol. 8, pp. 47~57.
- (8) Miettinen, K. and Makela, M.M., 2002, "On

- Scalarizing Functions in Multiobjective Optimization,” *OR Spectrum* 24, pp. 193~213.
- (9) Goel, P.S. and Singh, N., 1998, “A Multi-Objective Design-Optimization Model with Total Life Cycle Consideration,” *Society of Automotive Engineer*, 982167.
- (10) Yoon, K.P. and Hwang, C.L., “Multiple Attribute Decision Making,” *An Introduction. London: Sage Publications*.
- (11) Saaty, T.L., 1997, “A Scaling Method for Priorities in Hierarchies, Multiple Objectives and Fuzzy Sets,” *J.Math. Psych.* 15, pp. 234~281.
- (12) Charnes, A. and Cooper, W.W., 1961, “Management Models and Industrial Applications of Linear Programming,” *Vols. 1 and 2. John Wiley, New York*.
- (13) Charnes, A. and Cooper, W.W., 1977, “Goal Programming and Multiple Objective Optimization,” Part 1. *Eur. J. Oper. Res.* 1, pp. 39~54.
- (14) Hwang, C.L. and Md.Masud, A.S., 1979, “Multiple Objective Decision Making, Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey,” *In: Beckmann, M. and Kunzi, H.P.(Eds.) Lecture Notes in Economics and mathematical Systems*, No.164.
- (15) Hwang, I.J., Hyun, Y.J. and Park, J.H., 2007, “The Study for the Improvement of On-Center Feel with MTS Technique,” *Society of Automotive Engineers*, 2007-01-0090.
- (16) Kenney, J.F. and Keeping, E.S., 1962, “Mathematics of Statistics,” *Pt.1, 3rd ed. Princeton, NJ: Van Nostrand*.
- (17) Kim, W.C., Kim, J.J., Park, B.W., Park, S.H., Song, M.S., Lee, S.Y., Lee, Y.C., Chon, C.W. and Cho, S.S., 1998, “Modern Statistics, 4th Edition,” *Young-ji MunhaSa*.
- (18) FRAMAX Inc., 2007, “PIAnO(Process Integration, Automation and Optimization) User’s manual”, ver 2.1.