

Hermite 유동함수법에 의한 자연대류 유동 계산

김진환*

*동의대학교 기계공학과

Computations of Natural Convection Flow Using Hermite Stream Function Method

Jin Whan Kim*

*Department of Mechanical Engineering, Dong-Eui University, Busan, Korea

KEY WORDS: Natural convection 자연대류, Divergence-free element 무발산 요소, Vector potential 벡터 포텐셜, Solenoidal basis function 회전 기저 함수, Irrotational basis function 비회전 기저 함수

ABSTRACT: This paper is a continuation of the recent development on Hermite-based divergence free element method and deals with a non-isothermal fluid flow thru the buoyancy driven flow in a square enclosure with temperature difference across the two sides. The basis functions for the velocity field consist of the Hermite function and its curl while the basis functions for the temperature field consists of the Hermite function and its gradients. Hence, the number of degrees of freedom at a node becomes 6, which are the stream function, two velocities, the temperature and its x and y derivatives. This paper presents numerical results for $Ra = 105$, and compares with those from a stabilized finite element method developed by Illinca et al. (2000). The comparison has been done on 32 by 32 uniform elements and the degree of approximation of elements used for the stabilized finite element are linear (Deg. 1) and quadratic (Deg. 2). The numerical results from both methods show well agreements with those of De vahl Davi (1983).

1. 서 론

Navier-Stokes 방정식에서 밀도의 변화를 무시함으로써 유체 운동에 대한 서술을 상당히 단순화할 수 있으나, 이러한 운동 방정식의 단순화는 속도 벡터는 회전(Solenoidal)이어야 한다는 구속 조건을 제시하고 있다. 이 구속 조건은 단순화된 운동 방정식의 풀이를 오히려 더 어렵게 하고 있음은 잘 알려져 있다. 유한 요소법은 고체 역학의 문제뿐 아니라 비압축성 유동 해석에도 매우 유용한 방법으로 알려져 있으나, 아직까지 이러한 구속 조건을 만족시키는 요소의 존재는 알려져 있지 않으며, 특히 2000년 수학의 해를 맞이하여 해결되어야 할 7대 난제 중의 하나로 비압축성 Navier-Stokes 방정식에 대한 해의 존재 여부가 선정되었음은 시사하는 바가 크다고 하겠다(Clay mathematics institute, 2000).

무발산 요소에 대한 연구는 Griffiths(1981) 이후 찾아보기 어려우며, 최근 Holdeman(2004)은 Hermite 기저함수를 이용한 무발산 요소를 제안한 바 있다. 이 연구는 Holdeman의 무발산 요소를 이용하여 자연 대류에 의한 비압축성 유체 유동 계산에 적용하여 회전 및 비회전 기저 함수의 적용성을 검증하고자 한다.

비압축성은 유체 밀도가 압력에 독립임을 가정하고 있으나, 온도 차이에 따른 밀도 변화는 존재한다. 이 밀도 변화가 작다

면 밀도의 차이는 온도 변화에 따른 부력을 유발한다고 볼 수 있으며, 이를 Boussinesque 근사라 한다. 따라서 자연 대류 방정식에서는 운동량 방정식과 온도 방정식이 부력항에 의하여 서로 연성되어진다. Shu and Wee(2002)은 비압축성 유체의 무차원화된 자연대류 운동 방정식을 다음과 같이 정의하였다.

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \nabla p + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u} - \text{Pr} Ra T \hat{q} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -\underline{u} \cdot \nabla T + \nabla^2 T + Q \tag{3}$$

여기서 \underline{u} 는 유체 속도 벡터, p 는 밀도로 나눈 감소압력(Reduced pressure), T 는 무차원 온도, \hat{q} 는 중력 방향의 단위 벡터, $\text{Pr} = \nu/\alpha$ 로 정의되는 Prandtl 수이고, $Ra = g\beta\Delta TW^3/(\nu\alpha)$ 로 정의되는 Rayleigh 수를 의미하며 모두 무차원화된 변수들이다. 여기서 ν 는 동점성 계수, α 는 $k/\rho c_p$ 로 정의되는 열확산 계수, β 는 유체의 열팽창 계수, ΔT 는 고온 측과 저온 측 사이의 온도 차이, 그리고 W 는 특성 길이이다(Christon et al., 2002).

식 (2)는 Helmholtz 정리로부터 회전(Solenoidal) 성분과 비회전(Irrotational) 성분으로 아래와 같이 직교 분리될 수 있다

(Pozrikidis, 1977).

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{u} = \pi^S(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u} - \text{Pr} Ra T \hat{q}) \quad (4)$$

$$\nabla p = \pi^I(-\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + \text{Pr} \nabla^2 \underline{u}) \quad (5)$$

여기서 연산자 π^S 와 π^I 는 각각 벡터장의 회전 성분과 비회전 성분을 투사(Projection)하는 연산자이다. 즉, 속도 벡터 \underline{u} 는 연산자 π^S 를 통하여 $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ 을 만족시키는 속도 벡터 공간에서 해를 구하게 됨을 의미하며, 연속방정식 (1)은 더 이상 필요하지 않게 된다.

회전함수 중에서 가중 함수 \underline{v} 를 취하고, 비회전 함수 중에서 가중 함수 q 를 취하여, 식 (2)와 (3)에 각각 내적을 하면 다음과 같은 변분식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \left(\underline{v}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{u} \right) &= - \left(\underline{v}, \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) - \text{Pr} \left(\nabla \underline{v}, \nabla \underline{u} \right) \\ &\quad - \text{Pr} Ra \left(\underline{v} \cdot \hat{q}, T \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left(q, \frac{\partial}{\partial t} T \right) = - \left(q, \underline{u} \cdot \nabla T \right) - \left(\nabla q, \nabla T \right) + \left(q, Q \right) \quad (7)$$

여기서 (\cdot) 는 내적을 의미한다. 위 변분식들에 대한 계산 영역은 겹치지 않는(Non-overlapping) 소영역들 혹은 요소들로 나누어지며, 위 식 (6) 및 (7)은 각각의 이미 정의된 요소의 기저 함수(Basis function)들을 이용하여 각각의 요소에 적용되어지며 적절한 요소 연립방정식을 구성하게 된다. 그러나 요소 내에서 유동함수 $\underline{\psi}$ 에 대한 보간을 어떻게 정의해야 하는지는 분명하지 않다. 이를 위해 Holdeman(2004)은 $\underline{\psi}$ 에 대한 보간 함수로써 Hermite 3차 함수의 사용을 제안한 바 있으며, 다음 절에서는 Hermite 3차 함수를 사용한 회전 및 비회전 유한 요소 기저 함수의 전개 과정을 보인다.

2. 사변형 요소에 대한 보간 함수

2.1 Hermite 보간 함수

$\phi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내의 임의 함수 $\phi(x, y)$ 의 근사값이라 하고 3차 Hermite 함수에 의하여 보간된다고 하자. (ξ, η) 좌표계를 가지는 기준 요소(Reference element)에 대한 Hermite 함수는 다음과 같다(Lapidus and Pinder, 1982).

$$g_{00i} = (1/8)(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \times (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \quad (8)$$

$$g_{10i} = (-1/8)\xi_i(1 - \xi^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (9)$$

$$g_{01i} = (-1/8)\eta_i(1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (10)$$

여기서, 아래 첨자 i 는 요소의 절점 번호를 나타내며, ξ 와 η 는 해당되는 절점 좌표 값인 ± 1 을 가진다.

3차 Hermite 함수에 대한 자유도는 미지수 그 자신과 각 방향에 대한 도함수들로 구성된다. 임의 절점 " i "에 대한 자유도

를 $(\Phi_i, \partial \Phi_i / \partial x, \partial \Phi_i / \partial y)$ 라 하면, 요소 내에서 임의 함수, $\phi^e(x, y)$ 는 다음과 같이 구한다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 \left(\Phi_i g_{0i} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} g_{xi} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} g_{yi} \right) \quad (11)$$

여기서,

$$g_{0i} = g_{00i} \quad (12)$$

$$g_{xi} = g_{10i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (13)$$

$$g_{yi} = g_{10i} \frac{\partial y}{\partial \xi} + g_{01i} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (14)$$

이다. (x, y) 좌표계와 (ξ, η) 좌표계 사이에서 기저 함수의 변환은 다음과 같이 된다(Lapidus and Pinder, 1982).

$$\underline{g}_i = \hat{\underline{g}}_i \mathbf{T}^g \quad (15)$$

여기서

$\underline{g}_i = (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi})$, $\hat{\underline{g}}_i = (g_{00i} \ g_{10i} \ g_{01i})$ 이며, 변환 행렬 \mathbf{T}^g 는

$$\mathbf{T}^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (16)$$

이 된다. 또, 변환 도함수 행렬(Jacobian) \mathbf{J} 는 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

따라서 \mathbf{J}^{-1} 는 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, $\Delta = \det \mathbf{J} = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}$ 이다.

2.2 회전(Solenoidal) 보간 함수

$\psi^e(x, y)$ 를 사변형 요소 내의 유동함수 $\psi(x, y)$ 의 근사값이라 하고 Hermite 3차 함수에 의하여 보간된다고 하면, 절점 " i "에 대한 자유도는 $(\Psi_i, \partial \Psi_i / \partial x, \partial \Psi_i / \partial y)$ 이다. 여기서 Ψ_i 는 유동함수 ψ 자신에 대한 자유도, $\partial \Psi_i / \partial x$ 및 $\partial \Psi_i / \partial y$ 는 ψ 의 x 및 y 방향에 대한 도함수와 관련된 자유도들이다. 따라서 U_i 는 x 방향의 속도 u 그리고 V_i 는 y 방향의 속도 v 에 대한 자유도라 하면 $(\Psi_i, \partial \Psi_i / \partial x, \partial \Psi_i / \partial y)$ 는 $(\Psi_i, -V_i, U_i)$ 로 둘 수 있다. 우리는 Hermite 보간 함수에서 x 및 y 도함수에 대한 함수들의 위치를 바꾸고 \pm 부호를 바꾸더라도 유동 함수의 보간에는 이

상이 없음을 주목하여, 절점의 자유도를 $(Y_i, \partial Y_i / \partial y, -\partial Y_i / \partial x)(\Psi_i, \partial \Psi_i / \partial y, -\partial \Psi_i / \partial x)$ 혹은 (Ψ_i, U_i, V_i) 로 바꾸어 유동 함수 $\psi^e(x, y)$ 의 요소 내의 보간 $\psi^e(x, y)$ 를 다음과 같이 한다.

$$\psi^e(x, y) = \sum_{i=1}^n (g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \underline{\Psi}_i^e \quad (19)$$

속도 벡터 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 $\psi^e(x, y)$ 에 대한 *curl*을 취함으로써 얻어진다. 즉,

$$\begin{aligned} \underline{u}^e(x, y) &= \nabla \times \psi^e(x, y) \hat{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \underline{\Psi}_i^e \end{aligned} \quad (20)$$

따라서 속도에 대한 보간 함수, $S_i(x, y)$, $i=1, \dots, 4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} S_i(x, y) &= \begin{pmatrix} (\partial/\partial y)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \\ (-\partial/\partial x)(g_{0i} \ g_{yi} \ -g_{xi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{11i} \ S_{12i} \ S_{13i} \\ S_{21i} \ S_{22i} \ S_{23i} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, S_{11i}, \dots, S_{23i} 는 유동 함수를 보간하는 함수의 도함수들이다(김진환, 2007). 따라서 요소 내의 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 는 아래와 같이 구해진다.

$$\underline{u}^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 S_i(x, y) \underline{\Psi}_i^e \quad (22)$$

이렇게 구해진 속도 $\underline{u}^e(x, y)$ 가 무발산임을 검증하는 것은 어렵지 않다.

2.3 비회전(Irrotational) 보간 함수

비회전 성분들은 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 기울기(Gradient)로부터 얻을 수 있다. 스칼라 포텐셜($\phi(x, y)$)의 보간 함수는 식 (11)에서 보인 Hermite 3차 함수 $g_i(x, y)$ 이다. 임의의 사변형에서 $\phi^e(x, y)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \quad (23)$$

여기서 $\underline{\Phi}_i^e$ 는 스칼라 포텐셜의 자유도로서 다음과 같다.

$$\underline{\Phi}_i^e = (\Phi_i \ \partial \Phi_i / \partial x \ \partial \Phi_i / \partial y)^T \quad (24)$$

비회전 기저 함수, $G_i(x, y)$,는 스칼라 포텐셜, $\phi^e(x, y)$ 의 기울기(Gradient)를 취하여 구하면 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e(x, y) &= \sum_{i=1}^4 \nabla (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \underline{\Phi}_i^e \\ &= \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} \partial/\partial x (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \\ \partial/\partial y (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \end{pmatrix} \underline{\Phi}_i^e \end{aligned} \quad (25)$$

요소 내에서 $\nabla \phi^e(x, y) = \sum_{i=1}^4 G_i(x, y) \underline{\Phi}_i^e$ 로 근사화되기 때문에 비회전 기저 함수, $G_i(x, y)$ 는 다음과 같이 된다.

$$G_i(x, y) = \begin{pmatrix} G_{11i} & G_{12i} & G_{13i} \\ G_{21i} & G_{22i} & G_{23i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \\ \frac{\partial}{\partial y} (g_{0i} \ g_{xi} \ g_{yi}) \end{pmatrix} \quad (26)$$

$G_i(x, y)$ 와 $\nabla G_i(x, y)$ 의 구체적인 수식화는 회전 기저 함수의 경우와 유사하기 때문에 생략한다.

3. 수치 계산

3.1 회전 및 비회전 보간 함수에 의한 요소 행렬

임의의 사변형 요소에서 식 (6)과 (7)에 대하여 Galerkin 잔여치법을 적용하기로 한다. 식 (6)의 속도에 대한 시간항 ($v, \frac{\partial}{\partial t} u$)에 대한 요소 행렬을 M_{ij}^e , 대류항 ($v, u \cdot \nabla u$)에 대한 요소 행렬을 C_{ij}^e , 소산항 ($\nabla v, \nabla u$)에 대한 요소 행렬을 D_{ij}^e , 그리고 부력(Buoyancy)에 의한 요소 행렬을 B_{ij}^e 라 하면 다음과 같다.

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^T S_j d\Omega_e \quad (27)$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^T \left(u \frac{\partial S_j}{\partial x} + v \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (28)$$

$$D_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial S_i^T}{\partial x} \frac{\partial S_j}{\partial x} + \frac{\partial S_i^T}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (29)$$

$$B_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S_i^T \begin{pmatrix} g_x \\ \hat{g}_y \end{pmatrix} \mathbf{g}_j d\Omega_e \quad (30)$$

여기서 위첨자 T는 전치 행렬을 의미한다. 식 (7)에 대한 유한 요소 전개를 위하여 온도에 대한 시간항 ($q, \frac{\partial}{\partial t} T$)에 대한 요소 행렬을 \tilde{M}_{ij}^e , 대류항 ($q, u \cdot \nabla T$)에 대한 요소 행렬을 \tilde{C}_{ij}^e , 소산항 ($\nabla q, \nabla T$)에 대한 요소 행렬을 \tilde{D}_{ij}^e , 그리고 열 생성항 (q, Q)의 요소 벡터를 $\tilde{\mathbf{f}}_i^e$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$\tilde{M}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_j d\Omega_e \quad (31)$$

$$\tilde{C}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_i^T \left(u \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial y} \right) d\Omega_e \quad (32)$$

$$\tilde{D}_{ij}^e = \int_{\Omega_e} G_i^T G_j d\Omega_e \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_i^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{g}_i^T Q d\Omega_e \quad (34)$$

여기서 $G_i(x, y)$ 는 비회전 기저 함수이다. 식 (6) 및 (7)에 대한

요소의 행렬 방정식은 다음과 같다.

$$M^e \boldsymbol{\gamma}_{,t} = -(\mathbf{C}^e + \text{Pr} \mathbf{D}^e) \boldsymbol{\gamma} - \text{Pr} \text{Ra} \mathbf{B}^e \boldsymbol{\tau} \quad (35)$$

$$\tilde{M}^e \boldsymbol{\tau}_{,t} = -(\tilde{\mathbf{C}}^e + \tilde{\mathbf{D}}^e) \boldsymbol{\tau} + \tilde{\mathbf{f}}^e \quad (36)$$

여기서 $\boldsymbol{\gamma} = (\Psi U V)^T$, $\boldsymbol{\tau} = (T T_{,x} T_{,y})^T$ 이다. 식 (27)~(34)를 이용하여 요소 방정식에 대한 무발산 유한 요소 정식화 과정을 수행하고, 이들을 조합하여 전체 행렬 방정식을 구성하게 된다.

3.2 안정화 유한 요소법(Stabilized finite element method)

최근 속도와 압력에 동일한 차수를 적용할 수 있는 유한 요소법의 연구가 활발하며, 이는 대류 우세에 의한 불안정뿐만 아니라 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 차분식에 존재하는 부정형적 불안정성(악조건 행렬)도 안정화시키고자 하는 시도이다. Ilinca et al.(2000)은 잔여치에 대한 풍상(Upwinding)을 제안하였으며, 이는 잔여치에 대한 섭동을 원래의 Galerkin 식에 추가하는 방법으로 아래와 같다.

$$M_i = \tilde{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{f_i}{\rho} \quad (37)$$

$$C = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (38)$$

여기서 M_i 와 C 는 각각 운동량 방정식과 연속방정식의 잔여식이 다. 여기에 각각의 잔여식에 섭동을 추가하여 Galerkin 방법을 적용하면 아래와 같다.

$$R_i = \int_{\Omega} \psi_i M_i d\Omega + \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \left(\tilde{u}_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right) M_i d\Omega_k + \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \delta \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} C d\Omega_k = 0 \quad (39)$$

$$R_p = \int_{\Omega} \psi_p C d\Omega + \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} M_i d\Omega_k = 0 \quad (40)$$

위의 식에서 Ω 는 경계를 포함하는 전체 해석 영역을 의미하며, Ω_k 는 각 요소의 내부 영역만을 의미한다. 따라서 식 (39)와 (40)의 첫 번째 항들에는 부분 적분을 적용하여, 미분 차수를 한 단계 내리고 또 미분 경계 조건을 적용하게 할 수 있다.

섭동항들의 크기를 결정하는 τ 와 δ 는 레이놀즈 수(Re)와 요소의 대표 길이 h 의 함수로 Ilinca et al.(2000)을 참조하기 바란다. 이 연구에서는 위의 방법을 편의상 수정 잔여치법(Modified residual method)이라 부르기로 한다.

3.3 덮개 움직임에 의한 공동(Lid driven cavity) 유동

유동 해석의 새로운 기법들은 대체로 Ghia et al.(1982)에 의하여 심도있게 연구된 공동(Cavity) 유동에 대한 결과들을 이용하여 검증하는 관계로 본 연구에서도 이 문제에 대하여 먼저

살펴보기로 한다. 최근에 Botella and Peyret(1998)은 레이놀즈(Re) 수 1000에 대한 유동 변수들의 수치를 제시한 관계로 본 연구에서도 비교할 레이놀즈(Re) 수를 1000으로 하였다. 그리고 요소의 수는 32×32 의 균일 요소로 하며, 비교할 방법은 이차 요소(Quadratic element)를 이용한 수정 잔여치법(이하 MR(2)로 부르기로 함.)으로 하였다. 현재의 연구에서는 유선과 압력 분포를 통하여 현재의 유동 함수법의 수행을 보기로 한다.

1) 유선 분포: Fig. 1(a) 및 (b)에 수정 잔여치법(MR(2))과 무발산 요소법(이하 DF라 한다.)에 의한 결과들을 각각 나타내었다. 좌측 상단의 이차 유동의 시작, 아래쪽 좌우의 이차 유동의 형태를 잘 보여준다. 그러나 중심에 위치한 와류(Vortex)의 크기가 수정 잔여치법(MR(2))과 무발산 요소법(DF) 사이에 차이가 있음을 볼 수 있으며, 수정 잔여치법의 경우에는 등고선이 다소 완만함을 볼 수 있다. 실제로는 등고선의 개수가 하나 모자란다. 따라서 수정 잔여치법은 속도 값들을 너무 Smoothing하고 있지 않는가하는 의심이 든다.

2) 압력 분포: Fig. 2(a) 및 (b)에는 압력 등고선을, Table 1

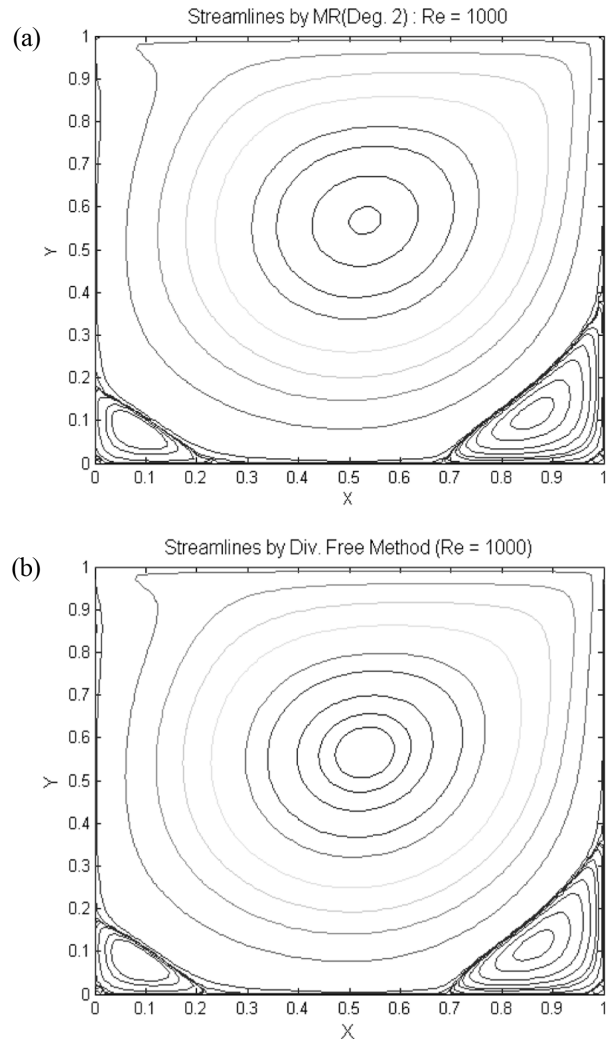


Fig. 1 Streamline contours by (a) MR (Deg. 2), (b) Divergence-free element

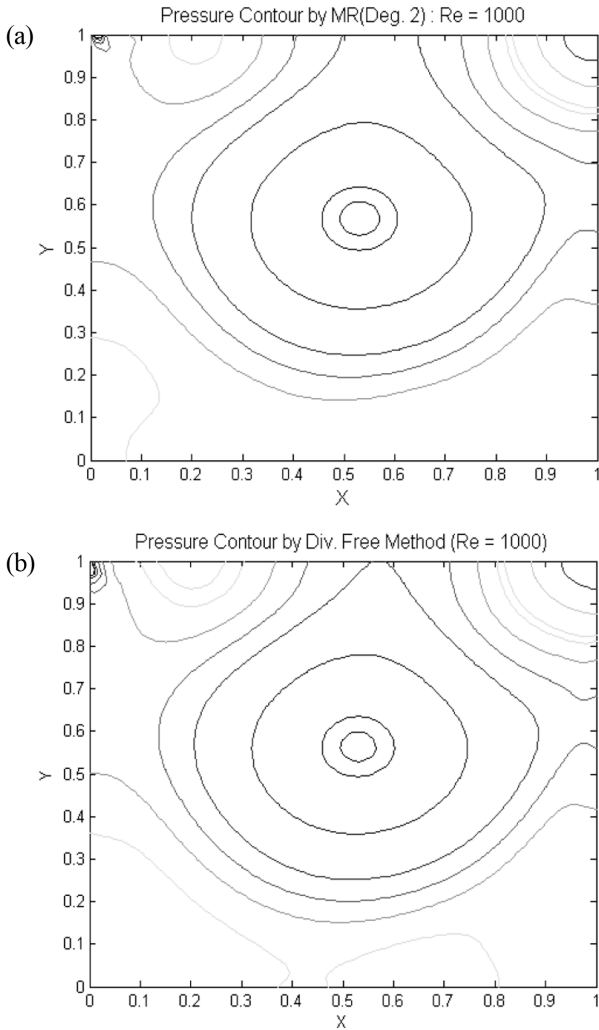


Fig. 2 Isobar lines by (a) MR (Deg. 2), (b) Divergence-free element

및 2에는 Botella and Peyret(1998)이 제시한 압력 값들과 더불어 MR(2) 및 현재의 DF에 의한 압력 값들을 나타내었다. Fig. 2의 (a)는 MR(2)에 의한 압력 분포로서 (b)에 나타낸 압력 분포

Table 1 Pressure along horizontal centerline

y-coord	p (0.5, y)		
	MR(2)	Div. Free	Botella et al.
1.0	0.049456	0.055153	0.052987
0.96875	0.048342	0.053073	0.051514
0.95313	0.047183	0.051878	0.050329
0.73438	0.011035	0.012622	0.012122
0.5	0.0	0.0	0.0
0.28125	0.039235	0.040511	0.040377
0.10156	0.099639	0.104723	0.104187
0.06250	0.104017	0.109791	0.109200
0.00000	0.105290	0.111272	0.110591

Table 2 Pressure along vertical centerline

x-coord	p (x, .5)		
	MR(2)	Div. Free	Botella et al.
0.0	0.086195	0.090264	0.090477
0.07031	0.083376	0.087335	0.087653
0.09375	0.080303	0.084068	0.084386
0.22656	0.045141	0.046908	0.047260
0.5	0.0	0.0	0.0
0.85938	0.048823	0.049263	0.049029
0.94531	0.073477	0.077613	0.077154
0.96094	0.074871	0.079336	0.078685
1.0	0.074496	0.078061	0.077455

와 약간의 차이를 보인다. MR(2)의 압력 형상은 DF에 의한 형상보다 좌측 상단과 하단에서 다소 완만한 형태를 보인다. Table 1 및 2를 참조하면 현재의 DF에 의한 압력 값들은 Botella and Peyret(1998)이 보고한 값들에 더 근접함을 볼 수 있다.

따라서 현재의 방법은 안정화 유한 요소의 2차 요소(Quadratic element)의 정확도를 가진다고 할 수 있다.

3.4 닫혀진 정사각형 공동 내의 부력에 의한 유동(Buoyancy driven flow within an enclosed square cavity)

Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 해석은 이미 알려져 있으며(김진환, 2007), 이 연구에서는 현재 제시된 유동함수법을 닫혀진 정사각형 공동 내에서 발생하는 자연 대류 유동에 대하여 수행하여 보고자 한다. 그리고 그 결과를 안정화 유한 요소법의 일종인 수정 잔여치법(Modified residual method)의 Deg. 1(이하 MR(1)이라 한다.)과 Deg. 2 요소(MR(2))를 사용한 수치 결과들과 비교하여 보기로 한다. 자연대류 유동에 대한 영역 및 경계조건은 Fig. 3에 나타내었으며, 정상 상태에 대한 요소 방정식은 식 (27)~(34)로부터 다음과 같이 쓴다.

$$(C^e + Pr D^e)\tau + Pr Ra B^e \tau = 0 \tag{41}$$

$$(\tilde{C}^e + \tilde{D}^e)\tau = \tilde{f}^e \tag{42}$$

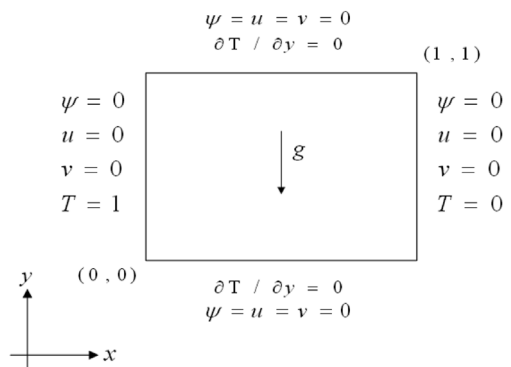


Fig. 3 Boundary conditions for the natural convection in a square cavity

Table 3 Comparison of finite element results with those of Davis (1983) for natural convection flows in a square enclosure

	$Ra = 10^3$			$Ra = 10^4$			$Ra = 10^5$		
	$u_{max} (y)$	$v_{max} (x)$	$Nu _{x=0}$	$u_{max} (y)$	$v_{max} (x)$	$Nu _{x=0}$	u_{max}	v_{max}	$Nu _{x=0}$
MR(1)	3.636(0.813)	3.677(0.188)	1.115	16.157(0.813)	19.645(0.125)	2.229	34.58(0.844)	69.51(0.063)	4.425
MR(2)	3.649(0.813)	3.691(0.188)	1.118	16.149(0.813)	19.588(0.125)	2.243	34.67(0.844)	68.41(0.063)	4.486
DF	3.654(0.813)	3.701(0.178)	1.118	16.23(0.822)	19.68(0.119)	2.245	35.32(0.856)	69.06(0.066)	4.519
Davis (1983)	3.649(0.813)	3.697(0.178)	1.117	16.178(0.823)	19.617(0.119)	2.238	34.73(0.855)	68.59(0.066)	4.509

이 문제는 Ra 수가 증가함에 따라 수렴성의 문제를 야기시키는 관계로, 이 연구에서는 초기 잔여치의 L^2 norm에 대한 상대 잔여치가 10^{-6} 이하로 되면 계산을 중지시켰다. 풀이 방법은 Newton 반복을 수행하였으며 해의 개선에는 하향이완 계수 (Under-relaxation parameter) α 를 사용하였다. 즉,

$$\underline{U}^{m+1} = \underline{U}^m + \alpha \Delta \underline{U} \quad (43)$$

여기서 각각의 Ra 수가 10^3 , 10^4 , 10^5 에 대하여 $\alpha=1, 0.5, 0.25$ 로 하였다. 실질적인 선형 연립방정식의 풀이는 다단계 부분 구조법을 이용하여 수행하였다(김진환, 2005).

Table 3에는 u_{max} , v_{max} 그리고 좌측 벽면에서의 Nusselt 수 ($Nu|_{x=0}$)를 각각의 Ra 수에 대하여 나타내었으며, 비교를 위하여 모두 32×32 균일 요소로 하여 수행하였다.

$Ra = 10^3$ 의 경우를 보면, 속도 성분들의 최대값들과 그 위치들을 종합적으로 보면 MR(2)에 의한 값들이 Davis(1983)에서 제시된 값들에 가장 근접하게 나타났다. 벽면 Nusselt 수($Nu|_{x=0}$)에 대한 값을 보면 MR(2)와 DF에 의한 값들이 동일하며, Davis에서 제시한 값에 상당히 일치한다. 모두 허용할 만한 결과 값들을 제시하고 있는 것으로 보인다.

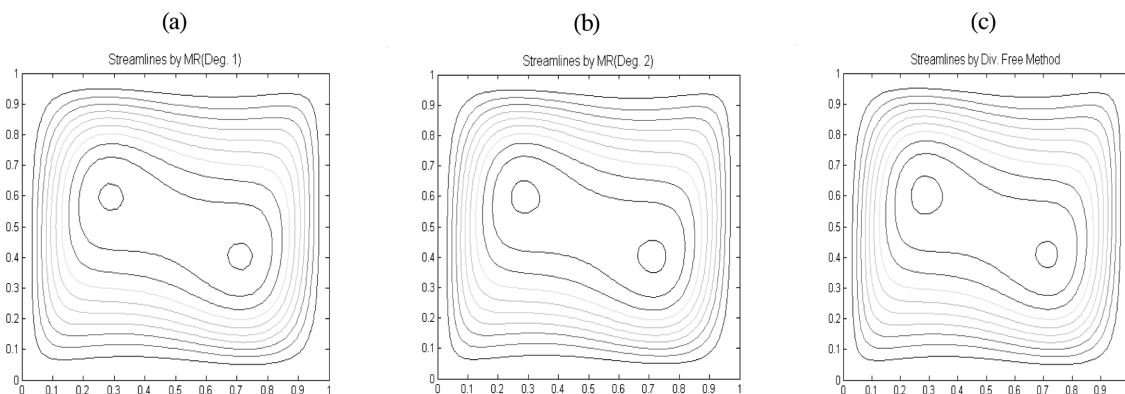
$Ra = 10^4$ 의 경우에도 마찬가지로 속도 성분들의 최대값들과 그 위치들을 종합적으로 보면 모든 방법들에 의한 값들은 문헌(Davis, 1983)에서 보고된 값들에 근접한 값들을 준다고 할 수 있다.

$Ra = 10^5$ 의 경우, MR(1), MR(2) 및 DF에서 제시하는 값들은 대체로 Davis(1983)에서 제시된 값에 근접하나, 수평 속도 성분의 경우, 최대값(u_{max})을 보면 MR(1)과 MR(2)의 값들이 제시된

값에 더 근접하나 위치는 DF의 값보다 못하다. 수직 속도 성분의 경우도 비슷한 양상을 보인다. $Nu|_{x=0}$ 에 대한 값을 보면 DF의 값이 문헌(Davis, 1983)에서 제시한 값에 가장 근접하다.

Table 3의 값들은 $Nu|_{x=0}$ 수를 제외하고는 한 점에 대한 값들로서 전체 영역에 대한 추세를 알 수 없다. 따라서 $Ra = 10^5$ 에 대한 유선, 온도, 수평방향 속도(u) 그리고 와도(Vorticity)에 대한 등고선도를 수정 잔여치법의 1차(MR(1)) 및 2차 요소(MR(2))에 의한 결과들과 비교하여 보기로 하였다. Fig. 4, 5, 6 그리고 7에는 $Ra = 10^5$ 에 대한 유선, 온도, 수평 방향 속도 그리고 와도에 대한 등고선도를 (a) MR(1), (b) MR(2), (c) DF에 의한 결과들로 나타내었다.

유선에 대하여 살펴보면(Fig. 4), 중앙 두 개의 와류(Vortex)크기에 있어서 각 방법들 간에 약간의 차이를 보인다. DF의 유선 모양은 중앙 두 개의 와류 사이에 크기의 차이가 분명하여 이는 아직 완전히 수렴되지 않은 모습을 보인다. 나머지 부분들은 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 온도 분포에 대하여 살펴보면(Fig. 5), MR(1), MR(2) 그리고 DF에 의한 온도 분포는 모두 적절한 양상을 보이고 있음을 알 수 있다. 속도의 수평 방향 성분에 대하여 살펴보면(Fig. 6), MR(1), MR(2) 그리고 DF에 의한 속도 등고선 분포들도 모두 적합한 모양을 보이고 있다. 와도(Vorticity)에 대하여 살펴보면(Fig. 7), MR(1)에 의한 결과는 대체적인 추세는 다르나 해로서는 수용하기 곤란하다. MR(2) 및 DF에 의한 와도 분포는 적절하게 보이며, 특히 DF에 의한 와도 형상은 좌측에 작은 진동(Oscillation)을 보이나, MR(2)의 와도 분포에는 그러한 진동도 보이지 않는다. 따라서 MR(2)의 와도 형상이 가장 우수하다고 볼 수 있다.

**Fig. 4** Streamline contours at $Ra = 10^5$: (a) MR(1), (b) MR(2), (c) DF

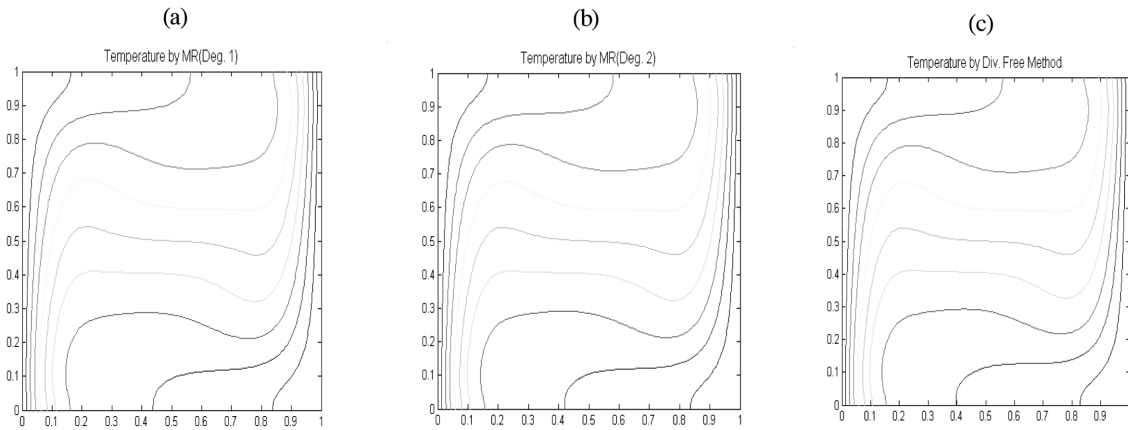


Fig. 5 Temperature contours at $Ra = 10^5$: (a) MR(1), (b) MR(2), (c) DF

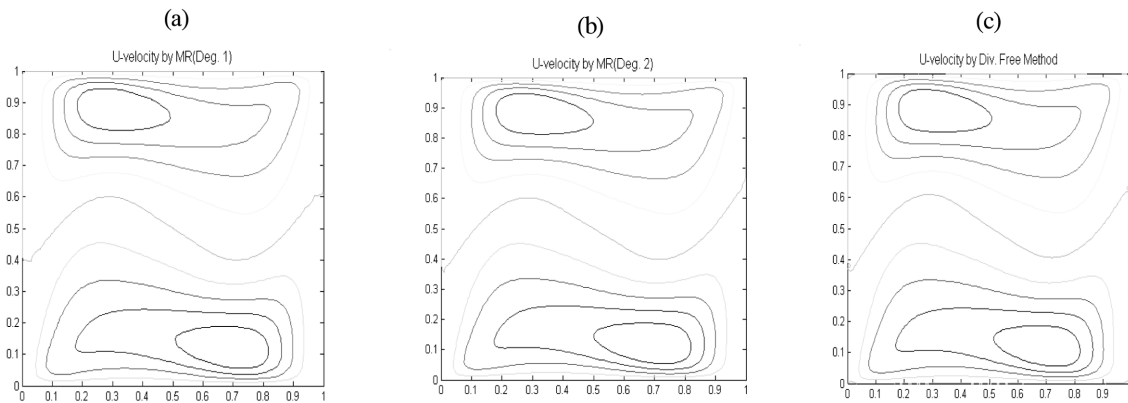


Fig. 6 Horizontal velocity contours at $Ra = 10^5$: (a) MR(1), (b) MR(2), (c) DF

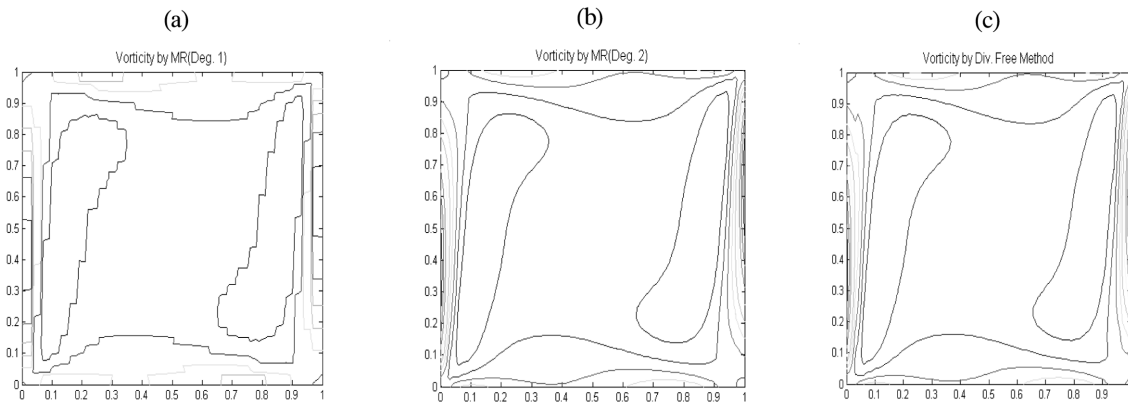


Fig. 7 Vorticity contours at $Ra = 10^5$: (a) MR(1), (b) MR(2), (c) DF

일차 요소에 의한 수정 잔여치법(MR(1))의 와도 형상이 이상하게 나타나는 이유는, 속도의 일차(선형) 보간은 그 주위와의 불연속성을 쉽게 야기시키는 것이기 때문으로 보인다. 현재의 무발산 요소에 의한 유선의 형태가 완전 수렴되지 않은 것으로 보이는 이유는 아마도 Ra 수가 증가함에 따라 발생될 수 있는 불안정성을 안정화시키는 장치가 현재 없으며, 이리하여 결국 수렴

정지(Locking) 현상이 발생한 것으로 보인다. 또 압력을 구하기 위해서는 구해진 속도 값들을 이용하여 식 (5)를 풀어야 한다.

4. 결 론

이 연구는 Holdeman(2004)이 제시한 무발산 요소를 이용하

여 단순 유동 계산 뿐 아니라 비등온(Non-isothermal) 유동인 자연대류 유동에 대한 계산을 수행하여 그 적절성을 살펴보고자 하였다. 이 경우, 속도는 Hermite 함수에 근거한 무발산 기저함수를 이용하여 보간하고, 온도는 스칼라 포텐셜(Scalar potential)인 관계로 비회전 기저 함수를 사용하였다. 따라서 한 절점 당 6개의 자유도가 요구되어 다소 계산상 효율적이지는 못하나 현재 개발된 Hermite 유동함수법의 이론을 확인한다는 점에 의의를 둘 수 있으리라 본다. 안정화 유한 요소법과 비교할 경우, 현재 제시된 방법은 이차 요소의 정확도에 근접하는 것으로 보인다. 이 과정에서 오히려 선형 요소에 의한 안정화 유한 요소법은 와도를 제외한 다른 유동 특성을 기대 이상으로 잘 제시하고 있는 것으로 파악되었다.

현재까지 존재하는 방법들 중에서 무발산을 확실하게 만족시키는 방법은 본 논문에서 제시된 방법이 유일하며, $Ra = 10^5$ 까지 수행하여본 결과, 원만히 수행하고 있음이 파악되었다. 따라서 현재 제시된 방법이 보다 넓은 물리적 현상에 적용할 수 있기 위하여, 추후 적절한 안정화 기법의 도입, 고차 Hermite 요소의 개발 및 계산상의 효율성에 대한 연구는 가치가 있는 것으로 보인다.

후 기

본 논문은 2008학년도 동의대학교 학술연구조성비(과제번호: 2008AA153)의 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 김진환 (2005). "유동계산을 위한 다단계 부분 구조법에 대한 연구", 한국전산유체공학회, 제10권, 제2호, pp 38-47.
- 김진환 (2007). "Hermite 유동함수를 이용한 비압축성 유동 계산", 한국전산유체공학회, 제12권, 제1호, pp 35-42.
- Botella, O. and Peyret, R. (1998). "Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow", *Computers & Fluids*, Vol 27, pp 421-433.
- Clay Mathematics Institute (2000), Cambridge, MA, U.S.A., <http://www.claymath.org/millennium/>.
- Christon, M.A., Gresho, P.M. and Sutton, S.B. (2002). "Computational Predictability of Time-dependent Natural Convection Flows in Enclosures (Including a Benchmark Solution)", *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol 40, pp 953-980.
- De Vahl Davis, G. (1983). "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol 3, pp 249-264.
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. (1982). "High-Resolution Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *J. of Comp. Physics*, Vol 48, pp 387-411.
- Griffiths, D.F. (1981). "An Approximately Divergence-Free 9-Node Velocity Element (with Variation) for Incompressible Flows", *Int. J. for Numer. Meth. in Fluids*, Vol 1, pp 323-346.
- Holdeman, J.T. (2004). "I. Some Lagrange Interpolation Functions for Solenoidal and Irrotational Vector Fields", manuscript, <http://j.t.holdeman.home.att.net>.
- Holdeman, J.T. (2004). "II. Some Hermite Interpolation Functions for Solenoidal and Irrotational Vector Fields", manuscript, <http://j.t.holdeman.home.att.net>.
- Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D. (2000). "On Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Advective-Diffusive Transport and Fluid Flow Problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol 188, pp 235-255.
- Lapidus, L. and Pinder, G.F. (1982). *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Sciences and Engineering*, John Wiley & Sons, Inc.
- Pozikidis, C. (1977). *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press.
- Shu, C. and Wee, K.H.A. (2002). "Numerical Simulation of Natural Convection in a Square Cavity by SIMPLE-Generalized Differential Quadrature Method", *Computers & Fluids*, Vol 31, pp 209-226.

2008년 11월 17일 원고 접수

2009년 9월 15일 심사 완료

2009년 10월 19일 게재 확정