

미소 개재물과 기공을 갖는 고체의 유효탄성계수에 대한 수치적 접근

강 성 수†

(원고접수일 : 2009년 4월 14일, 원고수정일 : 2009년 7월 6일, 심사완료일 : 2009년 8월 12일)

A Numerical Approach to Effective Elastic Moduli of Solids with Microinclusions and Microvoids

Sung-Soo Kang†

Abstract : For the analysis of solids containing a number of microinclusions or microvoids, in which the mechanical effect of each inclusion or void, a numerical approach is need to be developed to understand the mechanical behavior of damaged solids containing these defects. In this study, the simulation method using the natural element method is proposed for the analysis of effective elastic moduli. The mechanical effect of each inclusion or void is considered by controlling the material constants for Gaussian points. The relationship between area fraction of microinclusions or microvoids and effective elastic moduli is studied to verify the validity of the proposed method. The obtained results are in good agreement with the theoretical results such as differential method, self-consistent method, Mori-Tanaka method, as well as the numerical results by rigid body spring model.

Key words : Computational Mechanics(전산역학), Natural Element Method(자연요소법), Microinclusions(미소 개재물), Microvoids(미소 기공), Effective Elastic Moduli (유효탄성계수)

1. 서 론

최근 신소재 개발의 필요성이 높아짐에 따라, 다양한 기능성 재료가 만들어지고 있는 가운데, 다공 재료(porous material) 또는 발포금속(foamed metal)이 주목을 받고 있다^{[1],[2]}. 다공 재료의 사용분야는 단열재, 방음재, 경량벽재 등의 건축재료, 배기가스 정화용 필터, 열교환기 부품, 전지의 전극판, 생체반응용 캐리어 등의 기능용으로써 매

우 다양하며 향후 더욱 폭 넓게 사용되리라 예상된다. 기능성 확보를 위해 재료중의 기공의 존재가 불가결하지만, 이로 인한 강도저하 및 기공의 성장으로 인한 손상 발생^{[3],[4]} 등을 고려할 때, 기능과 강도의 균형이 필요하며 사용조건에 다양화와 함께 일정 수준의 기계적 강도가 요구되고 있다. 다공 재료의 높은 기공율과 고강도는 상반되는 것으로 이들 쌍방을 만족하는 것은 매우 어렵다.

한편, 미소 개재물을 포함하는 다결정재료에 대

† 교신저자(전주대학교 기계자동차공학과, E-mail:sskang@jj.ac.kr, Tel: 063)220-3077)

하여, 보로노이 분할을 이용한 계산불연속체역학모델 (computational discontinuum mechanics model)인 강체스프링모델(rigid body spring model : RBSM)을 이용한 해석수법이 개발되어, 다양한 응력 상태하에서의 단상재료 및 이상재료의 미소균열 손상 거동해석에 적용되었다^[5].

이러한 미소 개재물 또는 미소 기공을 포함한 고체의 거시적 역학 거동을 기술함에 있어, 이들 양과 유효탄성계수의 관계에 대한 고찰이 반드시 필요하다. 예를 들어, Nemat-Nasser등^[6]에 의해 이론적으로 검토된 바와 같이, 미소 개재물 또는 기공을 포함한 고체에 대해 그 분포를 균질화함으로써, 개재물 또는 기공의 체적비와 유효탄성계수와의 관계가 이론적으로 유도되었다. 미소 개재물 또는 기공을 균질화하는 방법에 따라, dilute distribution 법, differential법, self-consistent법, Mori-Tanaka법 등의 방법^[7)-(11)]이 알려져 있으며, 개재물 또는 기공의 영향은 거리, 방향 또는 위치에 따라 매우 다양하다.

본 연구에서는 Sukumar등에 의한 자연요소법^[12](natural element method : NEM)을 응용한 이차원 해석수법을 제안하여, 다수의 미소 개재물과 기공을 갖는 고체에서의 이들의 면적율과 유효탄성계수와의 관계를 구하여, 관련 이론해 및 강체스프링모델에 의한 해석결과와 비교하여, 제안된 수법의 유용성을 논의하고자 한다.

2. 자연요소해석

2.1 자연근방보간

보로노이 분할(Voronoi diagram)은 아주 흥미롭고 탁월한 수학적인 요소를 가지고 있으며, 공간 내에 분포한 점들의 이산화된 집합체를 정의하기에 가장 기초적인 구조^[13]로서, 자연과학이나 응용수학 및 컴퓨터공학 분야에서 많은 연구자들이 관심을 보이고 있다. 또한 보로노이 분할은 계산 기하학적 개념으로 이차원의 경우, 평면 내에 배치된 유한개의 모점(mother point)의 세력권을 나타내는 다각형 영역 분할 방법이다.

자연요소해석에서는 해석영역 내에 유한개의 절

점을 배치시키고, 이들을 모점으로 한 보로노이 다각형, 텔라우니 삼각형 및 이의 외접원에 기초하여 자연요소법의 형상함수가 정의되고, 에너지 적분이 이뤄진다^[12]. 유한요소법과 비교하여, 전체적인 강성 방정식의 구성 과정은 매우 유사하지만, 형상함수의 정의에 있어 natural neighbor interpolation이 사용됨이 큰 차이이다. 일반적인 유한요소법에선 형상함수의 정의가 요소 영역 내부로 제한되지만, 자연요소해석에서는 절점간의 분포 위치에 따라 해당 텔라우니 삼각형에 인접한 영역까지 확대되어, 유한요소해석에 비해 근사의 정도가 높다. 임의의 수치 적분점이 어떤 텔라우니 삼각형의 외접원의 내부에 있을 경우, 해당 텔라우니 삼각형을 이루는 절점들은 이 수치 적분점의 근방 절점(natural neighbors)으로 정의되며, 해당 수치 적분점에 대한 변위는 이 점의 근방절점의 값을 이용하여 보간된다.

절점은 평면 내의 임의의 위치에 설정할 수 있으며, 보로노이 다각형의 각 변, 즉 보로노이 변은 그 양측에 위치한 절점의 수직이등분선이 된다. Fig. 1은 17개의 절점으로 구성된 보로노이 다각형(파선)과 텔라우니 삼각형(실선) 및 그 외접원(점선)을 나타내고 있다. 보로노이 다각형의 정점인 보로노이 점은, 인접한 3개의 절점으로 구성되는 텔라우니 삼각형의 중심이 된다.

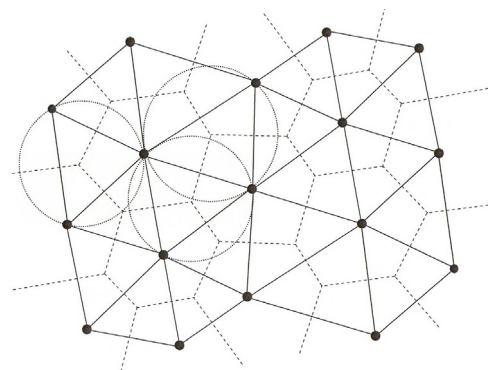


Fig. 1 Voronoi polygons and Delaunay triangles

2.2 개재물과 기공의 모델링

본 연구에서는 1개의 절점 또는 1개의 보로노이

다각형을 중심으로 하는 델라우니 삼각형의 집합체가 1개의 미소 개재물 또는 기공에 대응하며, 그의 부분은 모재 부분이라고 가정하였다. 미소 개재물 또는 기공에 해당하는 델라우니 삼각형 내부의 수치 적분점에 대한 탄성계수 행렬의 값을 조절함으로써 각 미소 개재물 또는 기공의 역학적 효과를 표현한다. 현저한 이방성을 보이는 미소 균열과 달리, 2차원 문제에서 원형에 가까운 형태를 갖는 미소 개재물 또는 기공의 역학적 효과는 거의 등방성을 나타낸다고 볼 수 있다. 따라서, 식(1)과 같은 평면응력 상태에서의 탄성계수 행렬을 이용하여, 이 행렬 중의 탄성정수를 조절함으로써, 미소 개재물 또는 기공의 역학적 효과를 그 근방에서 평균적으로 표현하고자 한다.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, E 와 ν 는 각각 이차원 고체의 영의 계수와 프와송 비이다.

미소 개재물 또는 기공에 대응하는 델라우니 삼각형 내부의 모든 수치 적분점에 대한 탄성계수 행렬 값을 식(2)와 같이 조절하여, 각 미소 개재물 또는 기공의 역학적 효과를 표현하였다.

$$D \rightarrow w \times D(\nu_i = \nu_m) \quad (2)$$

여기서, w 는 개재물 또는 기공과 모재의 영의 계수 비이며, ν_m 및 ν_i 는 각각 모재와 개재물의 프와송 비로, 본 해석에서는 같은 값을 갖는다.

Fig. 2는 자연요소법을 이용한 본 해석 수법의 계산 과정으로, 해당 델라우니 삼각형과 해당 적분점에 대한 근방절점을 구한 후 형상함수를 구할 때, 각 개재물 또는 기공의 역학적 효과를 고려하게 된다. 모든 적분점과 델라우니 삼각형에 대한 강성행렬이 구해지면 전체 행렬을 구한 후, 변위, 응력과 변형률 등을 얻게 된다. 자연요소법은 유한요소해석에서의 요소의 역할을 델라우니 삼각형이 대신하는 경우로, 해석 순서는 유한요소해석과 거의 동일하지만, 요소 내부 적분점에 대한 형상함수

의 보간을 할 때, 유한요소해석에서는 오직 그 요소를 구성하는 절점에 국한되어 영향을 받는 것에 비해, 자연요소해석에서는 델라우니 삼각형을 구성하는 절점 뿐 만 아니라 해당 델라우니 삼각형 외부에 존재하는 자연근방절점^[12]에도 의존한다는 점이 다르다.

3. 해석결과 및 고찰

미소 개재물 또는 기공을 미리 몇 개의 밀도로 불규칙하게 분포시킨 이차원 재료(Fig. 3참조)에 대해, 단축인장 응력을 가한 경우의 유효탄성계수를 계산하여, 미소 개재물 또는 기공이 없는 상태일 때의 모재의 탄성계수와의 비를 수치적으로 평가한다. 미소 개재물 또는 기공의 중복을 피하기 위해, 불규칙하게 발생한 절점 중에서 소요의 개재물 또는 기공 면적률을 충족시키도록 보로노이 다각형의 중심을 선택한 결과, 그림과 같이 다양하게 분포되었다. 정방형 재료의 좌변에 대한 횡방향 변위와 하변에 대한 종방향 변위를 구속하고, 우변에 균일 분포하중을 부여한다. 또한, 우변과 상변의 각 절점에 대한 변위의 평균치를 이용하여, 유효탄성계수를 평가한다.

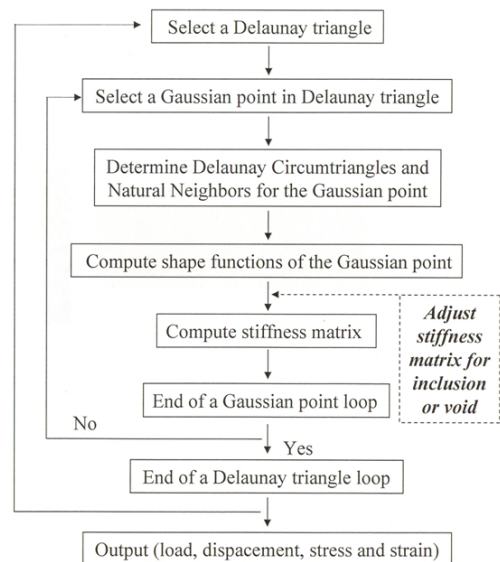


Fig. 2 Computational procedure of NEM analysis

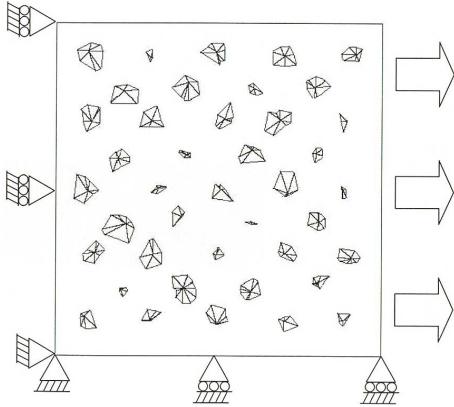


Fig. 3 Model with inclusions or voids under uniaxial tension ($f = 0.0947$)

3.1 미소 개재물을 갖는 고체의 유효탄성계수

균질한 재료 중에 개재물이 위치와 반경이 불규칙하게 분산되어 모재와 완전 접촉되어 있을 경우, self-consistent법에 의한 이론해^[8]는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K^m} + f \left(\frac{1}{K^i} - \frac{1}{K^m} \right) \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{G} \right) / \left(\frac{1}{K^i} + \frac{1}{G} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G^m} + 2f \left(\frac{1}{G^i} - \frac{1}{G^m} \right) \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{G} \right) / \left(\frac{1}{G^i} + \frac{1}{G} + \frac{2}{K} \right)$$

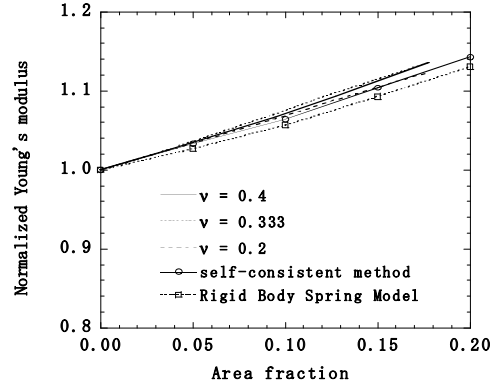
여기서, 첨자 i 는 개재물, m 은 모재를 나타내며, f 는 미소 개재물 또는 기공의 면적률(fraction)로 이차원 정방형 영역의 면적에 대한 미소 개재물 또는 기공의 면적 비로 정의된다. K 와 G 는 각각 면적탄성계수 및 전단탄성계수로 다음과 같다.

$$K = \frac{E}{2(1-\nu)}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

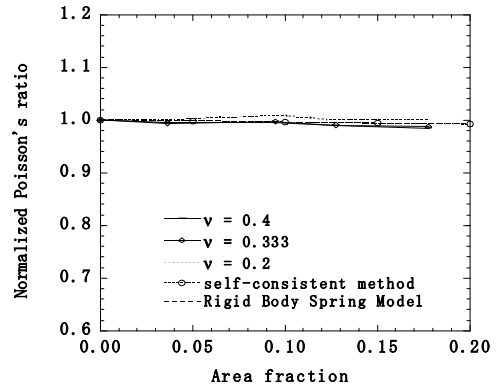
또한 영의 계수와 프와송 비는 다음 식으로 계산된다.

$$\frac{4}{E} = \frac{1}{K} + \frac{1}{G}, \nu = \frac{K-G}{K+G} \quad (5)$$

Fig. 4는 개재물의 영의 계수가 모재의 영의 계수보다 큰 경우($w = 2$)에 대한, 개재물의 면적률에 따른 유효탄성계수 변화를 나타내고 있다.



(a) Young's modulus



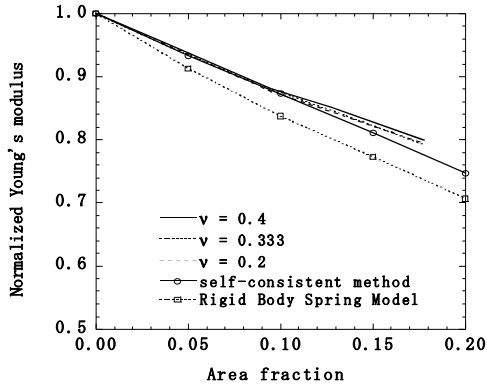
(b) Poisson's ratio

Fig. 4 Effective elastic moduli for stiff microinclusion

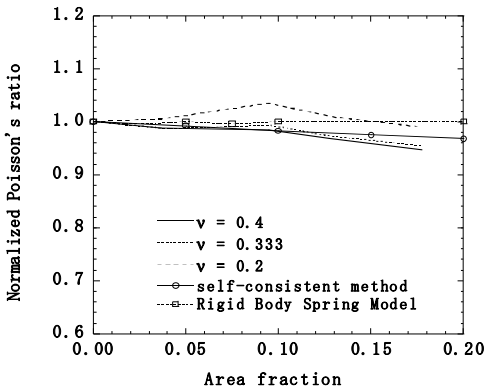
Fig. 4(a)에서 영의 계수는, 모재의 영의 계수 (E_m)로 나눈 값이며, 모재와 개재물의 프와송 비로써 0.2, 0.333, 0.4의 3종류를 가정하고 있다. 미소 개재물의 면적률이 증가함에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 증대하고, 프와송 비에는 거의 의존하지 않음을 알 수 있다. 프와송 비는 당연히, 미소 개재물의 면적률에 의존하지 않는다.

개재물의 영의 계수가 모재의 영의 계수보다 작은 경우($w = 0.2$)에 대한 개재물의 면적률 변화에 따른 유효탄성계수 변화를 Fig. 5에 보인다. 미소 개재물 면적률의 증가에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 완만하게 감소하며, 프와송 비의 변화는 미소 개재물의 면적률에 거의 의존하지 않음을 알 수 있다.

이러한 계산 결과는 모두 self-consistent법에 따른 이론해^{(6),(7)}와 극히 양호하게 대응하고 있으며, 강체스프링모델에 의한 해석 결과⁽⁵⁾와도 잘 대응하고 있다.

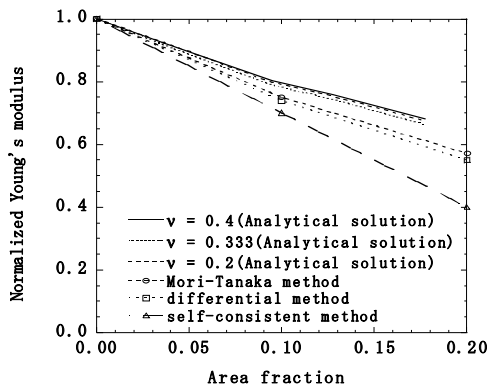


(a) Young's modulus

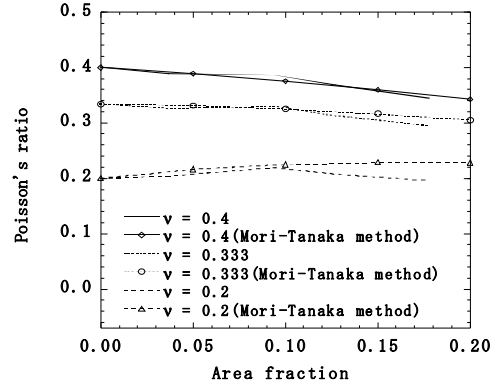


(b) Poisson's ratio

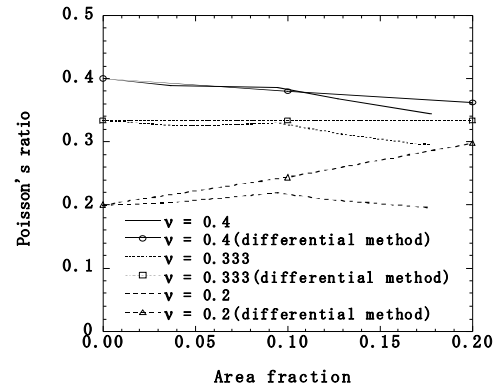
Fig. 5 Effective elastic moduli for weak microinclusion



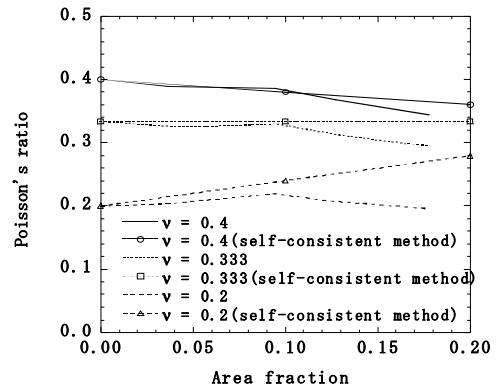
(a) Young's modulus



(b) Poisson's ratio (Mori-Tanaka method)



(c) Poisson's ratio (differential method)



(d) Poisson's ratio (self-consistent method)

Fig. 6 Effective elastic moduli for microvoid

3.2 미소 기공을 갖는 고체의 유효탄성계수

미소 기공은 미소 개재물의 특수한 경우로, 개재물에 대한 영의 계수를 0이라고 가정하면 된다. 각

기공의 중심을 포함한 모든 텔라우니 삼각형의 수치 적분에 대해, 식(2)의 w 값을 0으로 가정해도, 이들 텔라우니 삼각형의 외접원은 일반적으로 기공의 바깥쪽에 위치하는 다른 텔라우니 삼각형의 수치 적분점을 포함하기 때문에, 전체 강성 행렬은 특이점을 나타내지 않는다.

미소 기공을 포함한 고체에 대해서도, 기공 분포를 균질화함으로써, 미소 기공 면적률과 유효탄성계수와의 관계가 이론적으로 유도되어 있다. 즉, 재료 내부의 기공은 불규칙하게 분산된 개재물의 강성을 없앤 특수한 경우로, 등방성 재료의 기공 형상을 원형이라 하면 방향성이 없어지므로 보다 간단한 식으로 주어진다. 예를 들어, differential 법⁽⁷⁾에 따른 영의 계수와 프와송 비에 대한 근사식은 식(6)과 같다.

$$E = E_m e^{-3f}$$

$$\nu = \nu_m e^{-(3-1/\nu_m)3f} \tag{6}$$

여기서, E_m 과 ν_m 은 각각 모재의 영의 계수와 프와송 비이다.

또한 self-consistent법⁽⁷⁾에 따른 영의 계수와 프와송 비에 대한 근사식은 다음과 같다.

$$E = E_m (1-3f)$$

$$\nu = \nu_m [1 - (3-1/\nu_m)f] \tag{7}$$

또한 미소 기공간의 상호작용을 고려한 Mori-Tanaka법⁽⁷⁾에 따라, 영의 계수와 프와송 비에 대한 근사해가 식(8)과 같이 주어진다.

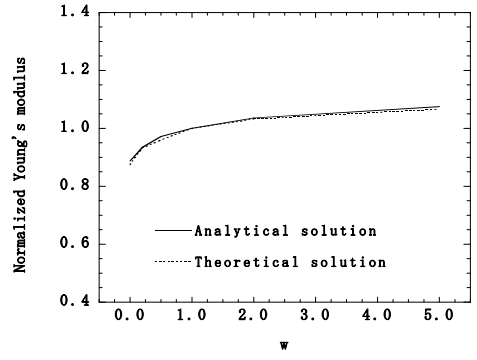
$$E = \frac{E_m}{1+3f(1-f)^{-1}}$$

$$\nu = \frac{\nu_m + f}{1+3f(1-f)^{-1}} \tag{8}$$

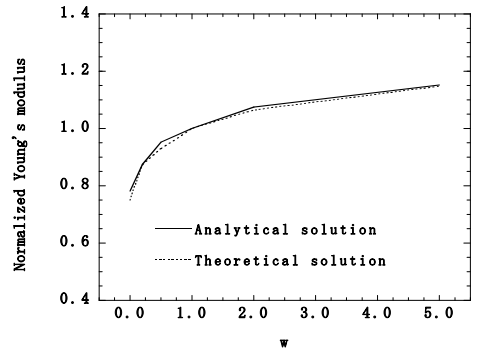
여기서, $(1-f)^{-1}$ 가 미소 기공간의 상호작용을 나타낸다.

미소 기공 면적률과 유효탄성계수와의 관계에 대한 계산 결과는 Fig. 6과 같다. 미소 기공의 면적률의 증가에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 감소하며, 프와송 비는 미소 개재물의 면적률 증가에 따라

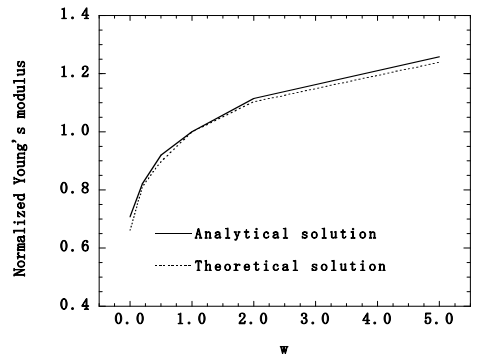
약간 감소하고 있지만, 전체적으로 변화가 작음을 알 수 있다. 이러한 계산 결과는 모두 differential법, self-consistent법, Mori-Tanaka법에 따른 이론해⁽⁷⁾ 및 강체스프링모델에 의한 해석 결과⁽⁵⁾와 극히 양호하게 대응하고 있다.



(a) $f = 0.05$



(b) $f = 0.10$



(c) $f = 0.15$

Fig. 7 Effective elastic modulus for w

본 해석에서는 기공 면적률에 관계없이 동일한 절점 수와 절점 분포에 대해 계산하였기 때문에, 기공 면적률이 0.1이상으로 클 경우, 총체적으로 기공 간의 역학적 간섭에 대한 계산의 근사도가 저하됨에 따라, Fig. 6(b)의 differential법, Fig. 6(c)의 self-consistent법, Fig. 6(d)의 Mori-Tanaka법에 의한 이론해와의 차가 크게 나타났다.

이상의 계산결과를 정리하여 개재물 또는 기공과 모재의 영의 계수 비를 나타내는 w 에 따른 유효 영의 계수와의 관계는 Fig. 7과 같다. 3종류의 개재물 또는 기공의 면적률($f = 0.05, 0.10, 0.15$)에 대한 유효 영의 계수 변화를 나타내고 있다. 그림에서 $w = 0$ 인 경우는 Mori-Tanaka법과, $w \neq 0$ 인 경우는 self-consistent법에 의한 이론해와 비교하고 있다. w 가 1에서 5 사이일 때, 유효 영의 계수는 거의 선형적으로 변화하고 있지만, 0에서 1사이에서는 개재물 또는 기공 주위에 응력 집중이 일어나기 쉬워 비선형적으로 변화되고 있음을 알 수 있다. 또한, 개재물 또는 기공의 면적률이 커질수록, w 에 대한 유효 영의 계수 변화폭이 커짐을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 자연요소법을 응용한 이차원 해석 수법을 제안하여, 다수의 미소 개재물 또는 기공을 갖는 이차원 고체의 거시적 역학 특성 해석에 적용하여, 개재물 및 기공의 면적률과 유효탄성계수와의 관계를 구하기 위해 수치 해석을 실시하였다. 본 연구를 통해 얻어진 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 개재물의 영의 계수가 모재의 영의 계수보다 큰 경우에 대한, 개재물의 면적률에 따른 유효탄성계수 변화에 대한 해석 결과, 미소 개재물의 면적률이 증가함에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 증대하고, 프와송 비에는 거의 의존하지 않음을 알 수 있었다.

(2) 개재물의 영의 계수가 모재의 영의 계수보다 작은 경우에 대한 개재물의 면적률 변화에 따른 유효탄성계수 변화에 대한 해석 결과, 미소 개재물

면적률의 증가에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 완만하게 감소하며, 프와송 비의 변화는 미소 개재물의 면적률에 거의 의존하지 않음을 알 수 있다.

(3) 미소 기공의 면적률과 유효탄성계수와의 관계에 대한 해석 결과, 미소 기공의 면적률의 증가에 따라 영의 계수는 거의 선형적으로 감소하며, 프와송 비는 미소 개재물의 면적률 증가에 따라 약간 감소하고 있지만, 전체적으로 변화가 작음을 알 수 있었다.

(4) 개재물 또는 기공과 모재의 영의 계수 비에 따른 유효 영의 계수와의 관계는, 영의 계수 비 w 가 1에서 5 사이일 때, 유효 영의 계수는 거의 선형적으로 변화하고 있지만, 0에서 1사이에서는 개재물 또는 기공 주위에 응력 집중이 일어나기 쉬워 비선형적으로 변화되고 있음을 알 수 있었고, 개재물 또는 기공의 면적률이 커질수록, w 에 대한 유효 영의 계수 변화폭이 커짐을 알 수 있었다.

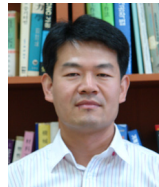
상기의 해석 결과, 영의 계수 및 프와송 비 등의 유효탄성계수에 관한 해석결과는 differential법, self-consistent법, Mori-Tanaka법 등의 이론해 및 강체스프링모델을 이용한 해석결과와 양호하게 일치하였으며, 미소 기공을 포함한 여러 종류의 미소 개재물이 유효 탄성계수에 미치는 영향을 파악할 수 있었다.

참고문헌

- [1] K. Ishizaki, A. Takata and S. Okada, "Mechanically enhanced open porous materials by a HIP process", Journal of the Ceramic Society of Japan, Vol. 98, No. 8, pp. 533-540, 1990.
- [2] E. Takegoshi, Y. Hirasawa, J. Matsuo and K. Okui, "A study on effective thermal conductivity of porous metals", Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers(B), Vol. 58, No. 547, pp. 879-884, 1992.

- [3] Y. Yajun and T. Tsuta, "A constitutive theory for the damage of materials with dynamic micro void evolution processes", JSME International Journal(A), Vol. 41, No. 1, pp. 61-78, 1998.
- [4] Y. Yajun and T. Tsuta, "Deformation and damage characteristics of porous materials under different triaxialities", JSME International Journal(A), Vol. 41, No. 1, pp. 79-95, 1998.
- [5] Y. Toi, T. Kiyosue, "Three-dimensional mesomechanical analysis of brittle solids containing microinclusions", Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers(A), Vol. 61, No. 582, pp. 447-453, 1995.
- [6] S. Nemat-Nasser and M. Hori, "Micromechanics and inhomogeneity", Springer-Verlag, pp.297-320, 1990.
- [7] F. C. S. Carvalho and J. F. Labuz, "Experiments on effective elastic modulus of two-dimensional solids with cracks and holes", International Journal of Solids and Structures, Vol. 33, No. 28, pp. 4119-4130, 1996.
- [8] S. Jun and I. Jasiuk, "Elastic moduli of two-dimensional composites with sliding inclusions - A comparison of effective medium theories", International Journal of Solids and Structures, Vol. 30, No. 18, pp. 2501-2523, 1993.
- [9] A. R. Day, K. A. Snyder, E. J. Garboczi and M. F. Thorpe, "The elastic moduli of a sheet containing circular holes", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 40, No. 5, pp. 1031-1051, 1992.
- [10] M. Kachanov, I. Tsukrov and B. Shafiro, "Effective moduli of solids with cavities of various shapes", Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part2, pp. S151-S174, 1994.
- [11] R. Christensen, H. Schantz and J. Shapiro, "On the range of validity of the Mori-Tanaka method, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 40, No. 1, pp. 69-73, 1992.
- [12] N. Sukumar, B. Moran and T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998.
- [13] J. Braun and M. Sambridge, "A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids", Nature, 376, pp. 655-660, 1995.

저 자 소 개



강성수(姜成洙)

1972년생, 1998년 부산대학교 기계설계 공학과(학사), 2000년 도쿄대학교 환경해양공학전공 전산구조역학(석사), 2003년 도쿄대학교 환경해양공학전공 전산구조역학(박사), 현재 전주대학교 기계자동차공학과 조교수