한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 3, 189-209, September 2009

중학교 1학년 함수지도에서의 공학적 도구 활용에 관한 연구*

주순종1) · 김응환2)

수학의 이론적 특성인 추상성은 학생들이 수학적 개념을 파악하는데 많은 어려움을 느끼게 하고 있다. 본 연구는 현실적 수학교육이론에 바탕을 둔 공학적 도구의 활용을 통한 수학적 모델링 학습이 수학적 개념을 파악하는데 유용한 수단이 되는가를 알아보고자 한다. 이를 위해 중학교 1학년 함수 단원 중 함수의 뜻에 대하여 영재학생들을 대상으로 수학적 모델링 학습을 설계하고 실험 수업을 실시하였으며 사전 사후 수학적 태도 검사와 수학적 모델링의 유용성에 관한 설문조사 및 학습자 관찰기록을 실시하였다. 그 결과 학생들의 수학적 태도에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났으며 과학적 현상에 대한 지식이 수학의 개념을 이해하고 문제를 해결하는데 유용하다는 유의미한 인식의 변화가 있는 것으로 나타났다. 학생의 흥미를 자극하고 학습동기를 촉진하며 수학적 개념을 효과적이고 올바르게 형성하는데 유용하게 쓰여 질 수 있는 다양한 과학적 현상들에 대한 연구와 개발이 이뤄진다면 학생들의 개념학습에 좋은 효과가 있을 것으로 기대한다.

주요용어 : 공학적 도구(MBL), 수학적 모델링, 함수지도

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

교육인적자원부 고시 제 2007-79호 제 7차 개정 교육과정은 수학교육의 목표를 수학적 의사소통 능력의 향상과 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는데 두고 있다(교육인적자원부, 2007). 그러나 지금까지의 수학 학습의 대부분은 교사나 학부모가 자신의 관점(전통적 수학관) 및 사고 수준에 근거하여 기성의 수학적 지식을 주로 언어 매체에 의존하여 학생들에게 전수시켜 왔음은 부인하기 어렵다(강경애 · 남승인, 1996).

21세기 지식기반 사회에 대비하기 위하여 바람직한 과학과 교육목표 및 내용체계를 구축하기 위한 한국교육과정평가원의 연구(PRE2003-4)에 의하면, 과학과 교육내용 체계화의 방

---

* 본 연구는 2009학년도 충청남도 우수교사 특별연수프로그램의 지원으로 수행되었음.
1) 천안신당고등학교 (vasha@hanmail.net)
2) 공주대학교 (yhkim@kongju.ac.kr)

향으로 핵심적인 내용을 위주로 내용체계를 구성하는 것과 통합적인 접근이 가능하도록 내용체계를 구성하는 것을 제안하고 있다. 그러나 교육 현장의 상황은 수학 개념과 관련된 과학적 개념을 추출 분석하는 것이 간단한 문제가 아니라는 것과 수학교사의 입장에서 과학개념을 수학에 도입하고자 할 때, 과학 개념에 대한 지식의 부족과 과학적 요인들의 반영정도 등에서 어려움을 겪고 있다는 현실적인 문제 때문에 제대로 통합적 접근이 이루어지고 있지 않는 것이 사실이다.

이러한 수학교육 목표와 수학교육 현장의 괴리를 어느 정도 해소하고 수학과 과학의 관련성에 근거한 학생 중심의 자기 주도적 수학교육을 실현할 수 있는 방법 중 하나로 Freudenthal의 수학화를 실현시킨 교육을 제시할 수 있으며, 구체적인 교수-학습의 전략으로 수학적 모델링을 제시할 수 있다.

본 연구의 목적은 수학교육의 중심에 있는 함수 단원에 대하여 과학과 수학의 관련성을 가지고 지도할 수 있는 구체적인 지도 방안을 Freudenthal의 수학화를 실현시킨 교육에서 구하고 공학적 도구(MBL : Microcomputer-based Laboratory, 컴퓨터를 이용한 과학실험 시스템을 총칭하는 말)의 활용을 통하여 제시하는 것에 있다. 이를 바탕으로 수학적 모델링의 구조를 만들어 중학교 영재반 학생들에게 투여하여보고 모델링이 영재학생들의 수학적 태도의 변화와 과학적 현상에 대한 지식과 수학의 개념의 파악 사이의 관계를 어떻게 인식하고 있는지 알아볼 것이다

2. 연구문제

본 연구의 목적은 함수 단원에 대한 교수-학습 상황에서 현실적 수학교육과 공학적 도구를 활용한 수학 학습-지도의 권고와 지도 방법을 제안하는데 있다. 이를 위하여 다음의 두 가지를 제시하였다

(1) 수학적 모델링 수업이 학생들의 수학적 태도에 어떤 영향을 주는가?
(2) 수학적 모델링 수업이 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 생각하는 능력과 수학에 대한 긍정적 태도 변화에 어떤 영향을 주는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. Freudenthal의 현실적 수학 교육

1) Freudenthal의 수학교육 이념과 수학화 이론

Freudenthal은 수학을 전달해야할 객관적 타당성을 지닌 완성된 지식체가 아니라 현실로부터 출발해서 인지적 수단으로 현상을 정리하는 과정을 통하여 확실성을 추구하는 인간의 활동으로 보았다. 현상학이란 물리적, 사회적, 정신적 현상을 탐구함으로써 인간의 본질을 규명하려는 것으로 감각적(感覺的) 확실성에서 출발하여 절대지(絶對知)에 이르기까지의 의식의 발전과정을 서술하는 것을 말한다. Freudenthal의 교수학적 현상학 또한 마찬가지로 수학적 개념, 구조, 아이디어 등의 결정체인 본질(noumenon)과 물리적, 사회적, 정신적 현상 사이의 관계를 밝히려는 데서 출발한다. Freudenthal은 수학은 현상에 대한 경험으로부

터 출발해서 내용과 형식의 교대작용을 거치면서 점진적으로 형식화되어 가는 인간의 활동이며, 수학의 출발점은 현실이고 수학은 이런 현실을 이해하기 위한 수단인 것이다. 즉, 수학은 물리, 사회, 정식적 현상을 조직하는 수단인 본질이며, 현상은 본질에 의하여 다음 단계의 본질로 조직되고, 새로운 본질은 그 다음 수준에서 현상, 곧 탐구의 대상이 되어 새로운 본질로 조직되어지는 연속적인 조직화 과정을 통하여 수학은 발달한다고 주장한다(류희찬, 2002). Freudenthal이 말하는 수학화란 보다 덜 수학적인 것을 보다 더 수학적인 것으로 조직화하는 일련의 연속과정이라고 주장한 것으로 볼 때, 현상의 본질로의 연속적 조직화란 결국 수학화를 말한 것이다. 수학적 사고의 발달을 형식과 내용의 교대작용에 의한 수준 상승으로 보는 그의 견해는 Piaget가 논리 수학적 개념을 행동과 조작의 일반적 조정으로부터 '반영적 추상화'에 의해 구성된 조작이라고 본 것과 일맥상통한다.

전통적인 수리철학의 입장에서 수학은 객관적 타당성을 가지고 완성된 확고한 지식체계이며 학생들의 주관적 인식과는 무관한 것으로 간주한다. 그 결과 수학교육에서 학생의 정의적 특성과 학습 수준에 따른 주관적 활동은 무시되고 논리적으로 전개되는 객관적 지식의 전달 활동이 강조된다(강경애・남승인, 1996).

반면에 수학의 본질적 특성으로서의 확실성, 객관성 등은 그 시대의 여러 수학자 등을 비롯한 일반 사회 구성원들 간의 합의에 의해 변화 될 수 있는 상대적인 것으로 바뀌어가고 있으며, 수학적 진리 혹은 실재 등은 그것을 탐구하는 인간의 정신적 활동과 무관하게 존재하는 객관적 실체가 아니라 역사 속에서 창조되고 진화하는 사회적 실제로 간주되고 있다. 이러한 새로운 수리철학의 특징은 수학의 객관적인 절대성을 부정하고 수학의 역사적, 문화적 맥락을 중시하는 것이다(Berlinghoff(2004), Breiteig(1993)).

학생들이 수학을 배운다는 것은 완성된 지식 체계로서의 기성수학에 대한 무조건적인 수용이 아니라 수학적 체계로 정리될 필요가 있는 현상을 조직하는 과정에서 수학적 관념이 만들어지고 성장해 가는 것이므로 객관적 관점이 아닌 학생의 주관적 관점에서 현상으로부터 그 정리수단인 본질을 찾는 활동, 즉 현상에 수학적 관념을 부여하는 활동을 학생들이 경험하도록 하는 실행수학을 해야 한다는 것이다.

Freudenthal은 이러한 실행수학의 본질을 수학화 활동이라 보고 있다. 수학화는 학습자에게 의미 있는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며, 무질서한 경험-그것이 수학적 경험이든 현실적 경험이든-의 조각들을 기존에 습득한 미숙하고 덜 정제된 수학적 개념 또는 아이디어 등으로 조직하고 체계화하여 보다 더 세련되고 수학적인 것으로 나아가는 것을 말한다. 수학화 과정은 현상의 수학화에서 출발해 덜 수학적인 것을 보다 더 수학적인 것으로 조직화하는 수학 자체의 수학화로 이어지며, 다양한 현상 속에서 비본질적인 것을 제거하고 보다 확실하고 일반적인 것들을 간결하게 조직하여 수학적인 것이 되도록 하며 처음에는 제한적으로 시작하여 점차로 확대되어 나타난다.

이러한 일련의 과정 즉 현실의 수학화와 수학자체의 수학화의 경계가 분명한 것은 아니며, 중요한 것은 현실이라는 말의 의미가 무엇인가라는 것이다. 그가 말하는 현실이란 단순한 일상생활을 말한다기보다는 좀 더 포괄적인 개념으로 학생들이 경험할 수 있고, 감정 이입이 가능하며, 자신의 여러 가지 경험을 바탕으로 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미하며, 그러한 현실을 수학적인 것으로 조직하는 것이 수평적 수학화이고, 수학적인 것을 추상적이고 정제된 좀 더 수학적인 것으로 발전되는 것이 수직적 수학화이며, 이것이 또 다음 수준에서 학생의 현실이 되는 연속적 순환 과정을 거치면서 학생의 현실이 비약적 비약적으로 성장해 가는 특성을 지닌 것이다(이충호, 2001).

수평적 수학화 특성이 강한 활동은 일반적 맥락에서 구체적인 수학을 인식하는 활동, 도식화활동, 문제를 여러 가지로 명확히 표현하고 시각화하는 활동, 관계를 발견하는 활동, 규칙성을 발견하는 활동, 서로 다른 문제의 공통적 요소를 인식하는 활동, 실세계 문제를 수학적 문제로 변형하는 활동, 실세계 문제를 기지의 수학적 모델로 변형하는 활동이다. 그리고 수직적 수학화의 특성이 강한 활동은 관계를 공식으로 표현하는 활동, 규칙성을 증명하는 활동, 모델 자체를 다듬고 변형하는 활동, 다른 모델을 사용하는 활동, 모델을 결합하고 통합하는 활동, 새로운 수학적 개념을 명확히 표현하는 활동, 일반화 활동 등이 있다(류희찬(2002), Carr(1996), Elliss(2007)).

2) 현실주의 수학 교수-학습 지도원리

Freudenthal에 따르면 수학을 한다는 것은 실행 수학을 한다는 것이며 수학자들이 그 결과를 알아내기까지의 과정에 있는 수학을 해야 한다는 것이다. 그러한 과정에 수학화가 있으며 처음에는 학습자의 거칠고 무질서한 현상에 대한 경험의 조각들이 자신이 습득한 기존의 다른 수학적 개념과 결합하여 수학적 질서를 부여하고 구조화 하는 단계인 수평적 수학화로 시작해서 조작의 의식화와 반성적 사고를 통하여 좀 더 세련되고 간결한 수학적 구조로 조직되는 수직적 수학화로 진행된다.

조직된 수학적 구조 또는 개념들은 다음 단계의 탐구의 대상이 되어 새로운 본질로 조직되어지는 연속적인 조직화 과정이라고 주장하였다. 조직된 수학적 구조 또는 개념들은 다음 단계의 현상, 곧 탐구의 대상이 되어 새로운 본질로 조직되며 이러한 일련의 과정들은 연속적이나 반성적 사고에 의한 수준의 상승은 비약적 수준 상승으로 불연속적인 특성을 갖게 된다는 것이다.

이러한 수학의 학습 과정에 대한 인식과 "인간의 활동으로서의 수학"이라는 관점에 기초하여 Freudenthal의 현실주의 수학교육은 안내된 재발명과 점진적 수학화, 교수학적 현상학, 학습수준이론을 기본원리로 삼고 있다.

(1) 안내된 재발명

Freudenthal은 사고는 정신적으로 지속되는 행동이며, 행동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라고 주장하며 실행 수학을 강조한다(우정호, 2000).

기성수학의 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적, 정신적 세계 속의 현상을 조직하는 수단으로 발명된 것이고 따라서 학생들이 자신의 현실에서 그러한 역사적 과정을 되풀이 하면서 재발명하는 경험을 가져야 하며 학습과정은 학습자 스스로 이러한 경험을 통하여 결과를 찾을 수 있도록 계획되어져야 한다는 것이다. 이를 위해 교사나 교과서 저자는 학생들의 반응에 대한 다양한 가능성에 대하여 상상하는 동시에 개인 수학자가 발명의 과정에서 가졌을 심상을 추측하여 보는 사고 실험이 중요하다.

재발명을 위해 교사가 배려해야 할 사항은 학습자가 재발명의 필요성을 인식하도록 계획해야 한다는 점이다. 그러한 필요성은 자연스러운 상황과 학생들이 구체적으로 알 수 있는 문맥으로 제시되어야 가능하며, 증명의 과정에서도 보다 창의적으로 학습자의 현실에서 출발해서 안내와 통찰에 의해 수학화 경험을 할 수 있도록 해야 한다(Nelsen, 1993).

재발명에 의한 교수학습 방법을 지지하는 많은 수학교육자들은 학습자 스스로의 필요성과 의지로 획득된 지식은 강의되어지는 지식보다 파지가 용이하고 전이가 잘된다는 점과 학습

동기를 촉진하며 바람직한 수학적 태도를 길러준다는 점 등을 교육적 근거로 제시하고 있다. 이것이 Freudenthal의 교육이념 및 철학이며 수학교육의 대중화를 뒷받침하는 근거이다.

(2) 교수학적 현상학

교수학적 현상학은 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적, 사회적, 정신적 세계 속의 현상을 조직하는 수단으로 발명되어 왔듯이, 수학의 교수-학습과정에서도 학생이 현상을 조직하는 본질을 재발명하게 해주어야 한다는 관점에서 출발한다.

수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며 수학화 과정은 현상과 본질의 상호 교대 작용에 의해 더 높은 수준의 상식화에 이르는 사고 수준의 상승과정이며 반성적 사고에 의해 비약적인 발전을 거듭해온 불연속적 과정이라고 볼 때, 교수학적 현상학은 이런 현상과 본질의 상대적인 관계를 교수학적인 측면에서 논하는 것이라 할 수 있다.

교수학적 현상학은 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 심상을 구성하기 위한 개념형성의 근원을 찾는 것을 목표로 한다. 형식적 수학은 상황 고유의 문제 해결 절차와 개념을 일반화 하고 형식화 하는 과정에서 출현되었다고 볼 수 있다. 따라서 이러한 교수학적 현상학적 탐구의 목표는 상황 특유의 접근 방식이 일반화 될 수 있는 문제 상황을 찾고 수직적 수학화의 기초로 간주할 수 있는 상황을 찾는 것이다(이충호, 2001).

수학을 배운다는 것은 수학적 현상을 탐구하는 것을 말하며, 이것은 수학자들이 사물이나 상황들이 서로 어떻게 연관되어 있는가를 탐구하여 어떤 결론에 이르기까지의 사고 과정을 재현하는 것을 의미한다. 그리하여 Freudenthal이 수학자들의 사고 과정에서 파악한 것은, 현상이 사고과정에서 1차적으로는 심상(Mental object)으로 조직된다는 것이다. Freudenthal이 사용하는 본질은 한편으로는 이러한 심상을 의미하며, 다른 한편으로는 심상의 형성 후에 획득된 개념, 구조, 아이디어 그 자체를 의미한다. 수학의 교수 학습에서 현상으로부터 우선적으로 심상의 형성을 도모해야 한다는 것이 바로 교수현상학적 수학교육의 핵심적인 아이디어라고 할 수 있다. 따라서 이러한 심상의 형성에 가장 적합한 수학 주제(현상)를 선정하는 일이 교수학적 현상학에서 가장 중요한 것이다. 수학이 역사적으로 실재 문제를 푸는 것으로부터 전개되어져 왔다면, 이러한 과정이 나타날 수 있는 문제 상황을 찾는 것이 바람직할 것이다. 심상의 형성을 가능하게 해주는 그러한 현상은 흔히 "예"로써 주어지게 되는데, 이러한 예는 무계획적으로 만들어진 것이 아니라, 충분한 관찰과 경험을 통해 만들어진 것으로서, 모범적이고 전형적인 예라 할 수 있으며, 바로 이러한 예를 Freudenthal은 패러다임(paradigm)이라 부르고 있다. 그리하여 학생들은 이러한 패러다임 가지고 있는 내적인 모습에 부지불식간에 젖어들게 됨으로서 심상을 형성하게 되는 바, 수학교육에서도 그러한 접근 방법(직관적 접근법)을 택해야 한다는 것이 프로이덴탈의 주장이다(박교식, 1992).

(3) 학습수준이론

Freudenthal은 수학을 현실로부터 출발해서 인지적 수단으로 현상을 정리하는 과정을 통하여 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동으로 보고 그러한 정신적 활동을 수학화라 하였으며, 수학화가 진행되는 과정에 대하여 현상이 본질에 의하여 다음 단계의 본질로 조직되고, 조직된 수학적 구조 또는 개념들은 다음 단계의 , 곧 탐구의 대상이 되어 새로운 본질로 조직되어지는 연속적인 조직화 과정이라고 주장하였다. 그러한 조직화가 이루어지는 단계를 수준이라 한다면 그 본질이 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되어 질 때, 그러한 조직

화는 또 하나의 수준이 된다. 그는 수학 학습과정을 사고 수준간의 비약적 발전으로 이루어지는 불연속과정으로 생각하였으며 이러한 수준이론은 Van Hiele(1986) 부부의 수준이론을 기초로 하여 수학의 교수-학습 과정에서의 수준을 크게 바닥수준과 탐구 수준으로 구별하였다.

수준의 상승은 연속적인 과정이므로 바닥수준을 거치지 않고는 탐구수준으로 갈 수 없는데 그런 이유에서 바닥 수준은 수학교육에서 중요한 논의의 대상이 된다. Freudenthal은 수학교육이 이와 같은 바닥수준을 취급하는데 있어 두 가지 오류 즉, 전통적인 수학교육에서 흔히 범하는 바닥수준의 무시, 바닥수준과 탐구수준의 혼동을 지적하고 있다. 아동은 단지 놀이를 통하여 수학의 개념, 구조, 아이디어 등을 포함한 대상을 조작하는 것으로서, 실제적으로 자신이 무엇을 하는지 알지 못하지만, 수학의 교수-학습은 바로 이러한 바닥 수준에 대한 반성적 사고과정을 통하여 이루어지기 시작하는 것으로서, 이러한 바닥 수준에서의 활동은 그것이 비록을 수학을 하는 것으로 간주되기는 어렵지만 수학화되기 전의 활동이라는 점에서 매우 중요하다.(박교식 1992) Van Hiele 부부에 의하면 탐구수준은 다시 제 2수준에서 제 5수준까지로 세분되어진다.

1950년대에 네덜란드의 Lycee 초임 수학교사였던 Van Hiele 부부는 자신들이 지도하고 있는 학생들이 기하 학습에서 겪는 어려움의 원인을 밝히려고 노력하면서 교사의 사고수준과 학생들의 사고 수준이 달라 서로를 이해할 수 없다는 것을 밝혀냈다. Van Hiele(1986)는 학생들의 기하 학습 과정을 관찰하고 분석한 결과, 사고 수준이 있음을 발견하고 그것을 다음과 같은 5수준으로 구분하고 있다. 제1수준은 주변의 사물이 대상이 되어 기본적인 도형을 시각적인 외관에 의해 판별하고, 제2수준은 도형의 형이 대상이 되어 도형의 구성요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악하며, 제3수준은 도형의 성질과 도형사이의 관계가 대상이 되어 명제가 정리수단이 된다. 제4수준은 명제가 연구의 대상이 되어 명제 사이의 논리적 관계가 정리수단이 되어 전체 기하의 연역 체계를 파악하고 제5수준은 기하학 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고, 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다(류희찬, 2002).

2. 공학적 도구(MBL)

1) 정의

- MBL(Microcomputer-based Laboratory): 컴퓨터를 이용한 과학실험 시스템을 총칭하는 말이다. MBL은 구체적인 행동과 그 행동을 표현하는 그래프를 기반으로 함수적 관계를 파악하는 것으로 시각적, 신체적, 언어적으로 경험하는 모든 상황들을 포함하고 있는 테크놀로지이다.
- 센서: 자연의 물리량을 전기적 신호로 변환하여 인터페이스에 제공하는 장치로 이 연구의 교수-학습 자료에서는 멀티테스터의 센서를 사용하였다.
- 인터페이스: 센서로부터 받은 전기적 신호를 컴퓨터가 받아들일 수 있는 데이터 신호로 변화하여 컴퓨터에 입력하는 장치로 국내의 ScienceCube사나 국외의 Pasco사, National Instrument사 등에서 상용화된 인터페이스를 제작 판매하고 있다.
- MBL용 소프트웨어: 측정된 물리량을 컴퓨터에 저장하고 화면에 표, 그래프 등 여러 가지 형태의 자료로 표현해주는 프로그램으로 Labview 등의 프로그램이 있으며, 각 MBL제조 회사나 연구실 마다 각각의 인터페이스에 알맞은 프로그램을 사용한다.

2) 공학적 도구의 필요성

프로이덴탈(Freudenthal, 1981)은 수학교육에서 공학적 도구의 유용성을 강조하였으며, 수학적 이해와 사고력 증진이라는 수학교육의 목적 추구를 위한 강력한 수단으로서 공학적 도구를 이용할 것을 주장하였다.

한국교육과정 평가원의 수학과 교육목표 및 내용체계화 연구(2000)에 의하면 수학교육의 목적을 추구함에 있어서 컴퓨터를 포함한 공학적 도구가 기여할 수 있는 방법론적 측면에 대하여 다음과 같이 기술하고 있다.

(1) 수학과 학생들의 실제경험의 연결

공학적 도구는 학생들의 일상적이고 물리적인 경험에 바탕을 둔 실제 자료와 시뮬레이션을 혼합하여 제시함으로써, 다양한 모델과 시뮬레이션을 통해 학생들의 광범한 경험과 형식적인 수학을 연결할 수 있게 한다. 문제해결에서 가장 중요한 아이디어는 학생의 사고로 탐색하게 하되, 그 이외의 문제해결의 수단이 되는 복잡한 과정은 공학적 도구의 다양한 기능을 이용하도록 수학적 문제해결에 공학적 도구를 도입하면, 학교수학에서 학생들의 현실과의 관련성으로 충만한 문제들을 다룰 수 있게 된다. 이는 결국 학생들이 주위의 여러 가지 현상을 수학적 안목으로 파악하도록 한다는 수학교육의 본질적인 목적을 추구하는데도 일조할 수 있을 것이다.

(2) 수학적 대상과 관계의 구체화

공학적 도구는 수학적 대상과 수학적 관계를 구체화함으로써 그것들을 보다 직접적으로 다룰 수 있는 교수- 학습 환경을 제공하는바, Balacheff(1996)는 이를 새로운 경험적 수학 현실주의라고 명명하였다.

수학적 대상과 관계를 구체화하여 직접적인 조작을 활성화시킬 수 있는 공학적 도구 기반 학습 환경의 특징은 특히 기하 교수- 학습 방법에 많은 영향을 미친다. Cabri-Geometry와 Geometer's SketchPad(GSP)와 같은 탐구형 기하 소프트웨어에서는 기하 그림을 직접적으로 다룰 수 있는 새로운 접근 방법을 채택하고 있다. 기하의 개념화는 컴퓨터 화면에 나타나는 그림의 요소들을 마우스로 끌었을 때 그림에서 변하지 않는 성질에 대한 연구가 되며, 기하적 성질에 대한 명제는 새로운 실험의 영역에서 관찰 가능한 기하적 현상을 기술한 것이 된다(Balacheff, 1996, p. 475). 여기에서 컴퓨터 화면에 나타나는 그림의 요소들을 마우스로 끄는 과정은 바로 Dienes가 주장하는 수학적 다양성의 원리 와 부합한다고 할 수 있다.

(3) 다양한 표현체계의 연결

역사적으로 수학 표현 체계는 정적이고 활동성이 없는 매개체로 설명되지만, 공학적 도구는 역동적이고 상호작용적인 새로운 유형의 표현 체계를 제공할 수 있다(Olive, 2008). 다양한 표현 체계의 연결은 수학 교수- 학습에서 두 가지 의미를 갖는데, 하나는 복잡한 수학 아이디어의 다양한 측면을 드러내는 것과, 다른 하나는 어떤 표현 체계에서의 행동의 결과를 다른 표현 체계를 통해서 보여줌으로써 그 행동의 의미를 반성하도록 하는 것이다.

(4) 사고력 중심의 수학교육 추구

공학적 도구는 사고력을 도모하기 위한 환경을 조성하는데 한계가 있는 지필 환경을 어느

정도 보완할 수 있다. 공학적 도구는 사고력 향상을 목적으로 하는 교수- 학습 활동에서 산술적인 계산과 대수적인 문자식의 처리를 신속하게 수행해 줌으로써 본질적인 사고력 중심의 교수- 학습 활동에 전념할 수 있게 해 준다.

3. 수학적 모델링

Freudenthal은 함수교육은 종속적인 관련성을 갖는 학습자 주변의 다양한 현상으로부터 출발하여 종속 관계에 대한 심상의 구성을 바탕으로 점진적인 수학화 경험을 거쳐 집합사이의 대응관계로서의 현대적인 함수개념에 이르도록 해야 한다고 주장한 바 있다. 함수와 관련된 현상은 타 교과 특히 과학교과에서 많이 발견된다. 그러한 결과로 수학 특히 함수를 과학과 연결시켜야 한다는 주장은 많지만 현재까지의 연구들은 과학과 수학의 관련성을 가지고 지도할 수 있는 구체적인 지도 방안을 제시하는 것이 미흡하기 때문에 수학과 과학의 통합교육이 잘 이루어지고 있지 않으며(이용옥, 2004), 그러한 방안을 구체적으로 제시하고 있는 연구들도 상호 관련된 내용을 단순하게 제시하거나, 배운 수학적 개념을 이용하여 과학(물리)과 연관된 연습문제를 푸는 정도에 그치고 있다. 실제로 수학 개념과 관련된 과학적 개념을 추출 분석하는 것은 간단한 문제가 아니다. 수학교사의 입장에서 과학 개념을 수학에 도입하고자 할 때, 과학 개념에 대한 지식의 부족과 과학적 요인들을 어느 정도 반영하는 것이 적절한 것인지를 결정하는데 어려움을 겪기 때문이다. 과학적 개념을 지나치게 많이 다루면 학습의 목표가 변질될 수도 있고 너무 간결하게 다루면 형식적인 도입이 되거나 오개념의 발생을 초래할 수 있다(조완영・김남균(2003), 황혜정 외 5인(2007).

물론 수학은 물리적 세계에 존재하는 구체물을 연구의 대상으로 삼는 것은 아니며 그러한 물리적 대상의 특수한 성질(크기, 모양 등)과 그들 사이의 관계를 수학화라는 추상화의 과정을 통하여 관념의 세계 속에서 하나의 모델(수학적 모델)을 형성하고 이를 탐구의 대상으로 한다. 이 관념적 대상은 물리적 세계와 밀접한 관계를 갖고 있지만 관념적 대상은 물리적 상황에 의해 제약을 받지 않는다. 왜냐하면 물리적 대상을 다루는 인간의 경험은 유한임에 비하여 수학이라는 추상적 대상을 다루는 인간의 사고는 무한의 범위까지 확장될 수 있기 때문이다(강경애・남승인, 1996). 그럼에도 Freudenthal이 수학은 수학적 관념이나 구조로 정리될 필요가 있는 현실의 문제 상황으로부터 출발하여 점진적 수학화 과정을 거쳐 구성된 실제적인 지식이며, 그 과정에서 수학적 관념이 발생되는 것이 진정한 응용이라고 한 것처럼 수학은 물리적 세계에 존재하는 대상물과 별개로 존재할 수는 없으며, 오히려 이미 존재하는 물리적 대상물에 대하여 그것을 수학적으로 조직화할 필요성을 학습자가 느끼지 못한 상태에서 부과되는 수학적 지식의 제공이야말로 따분한 교화에 불과하거나 존재 기반 없이 언제든 무너져버릴 수 있는 공허한 것일 뿐이다. 왜냐하면 자연현상의 탐구에 관한 물리 문제가 대수와 기하의 형식화된 언어로 표현되면 곧 수학이 되며, 역사적으로 과학과 수학은 밀접한 관련을 가지고 있고 과학현상을 탐구하는 가운데 수학 개념이 발생되어왔기 때문이다.

실제 수학과 이론수학 특히, 함수와 과학을 연결시키는 방법으로 수학적 모델링이 제시되어지고 있다. 수학적 모델은 복잡한 현상을 이상화하여 그 요소 사이의 관계를 나타낸 수학적 표현을 의미하며, 수학적 모델링은 여러 가지 문제를 수학적 모델로 수학화하여 수학 내에서 문제를 해결하고 그 결과를 원래의 문제와 관련지어 해석하는 문제 해결 과정과 수학적 사고의 훈련 전체를 말한다(Ridgway(1988), Tall(1991)).

다음은 조완영과 김남균(2003)이 제시하고 있는 수학적 모델링의 구조(수학적 관점)와 서울대 과학교육연구소가 제시하고 있는 수학적 모델링의 과정(과학적 관점)을 분석하여 만든 모델링 과정이다.

- 1 단계 : 현실세계 문제 상황 → 현실적 모델

현실세계의 문제 상황을 파악하고 중요 요인들을 추출하며 문제를 단순화, 이상화시켜 수학적 모델을 만들기에 적합하도록 일상의 용어를 사용하여 새롭게 문제를 재구성한다. 비수학적인 현실적 문제 상황에서 수학적 모델을 구성하기 위하여 상황을 구조화하고 다양한 내적 외적 가정과 조건들을 구조화된 상황 속에 부여한다. 문제를 수행하는 학생의 능력에 따라 때로는 직관적으로 또는 모든 요소들이 함축되어 간략하게 만들어지거나 경우에 따라서는 주어진 현실의 문제를 수학의 구조에 맞게 문맥을 구성하는데 익숙하지 않아서 심각한 어려움을 겪기도 한다. 그런 학생들의 대부분은 일상의 용어들이 수학적으로 의미하는 바가 무엇인지 모르며 수학적으로 의미가 있는 문장을 구성하는 방법에 대하여 경험이 부족하다. 그러한 문제를 가지고 있는 학생들은 수학적 모델을 구성하지 못하며 구성한다고 하더라도 완성도가 빈약하여 올바른 수학적 결론을 만들어내지 못한다. 이의 해결을 위하여 현실적 문제 상황 속에서 수학적으로 의미가 있는 용어들을 찾고 수학적으로 의미 있는 문장으로 만드는 과정, 즉 현실적 모델을 구성하는 과정을 형식화하여 거치는 것이 필요하며 현실적 모델에서 사용된 일상의 용어가 왜 그리고 어떻게 수학적 모델로 전환되는가에 대하여 많은 경험을 가져야 할 것으로 판단된다.

- 2 단계 : 현실적 모델 → 수학적 모델

현실적 모델을 수학적 모델로 변환하는 단계로 두 모델간의 사상관계를 도입하여 동치관계를 만들어내는 과정이며, 현실적 모델에서 사용되고 있는 일상적 용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾸는 단계이다. 2단계의 과정은 1단계와 함께 수평적 수학화와 관련 있는 단계로 관찰, 실험, 귀납, 유추 등의 경험적 접근방법을 통하여 현실적 문제 상황을 수학적 수단으로 조직하는 것으로, 도식화 활동, 시각화 활동, 관계를 발견하는 활동, 규칙성을 발견하는 활동, 실세계 문제를 수학적 문제로 변형하여 새롭게 문제를 구성하는 활동 등을 들 수 있다. 즉, 현실적 모델에서 가장 중요하고 수학적으로 의미 있는 요소들 사이의 관계를 수학적 대상과 그 사이의 관계로 바꾸는 단계이다.

- 3 단계 : 수학적 모델 → 수학적 결론

수학적 방법을 이용하여 수학적 모델 내에서의 결과(해)를 도출하는 과정이다. 이 단계는 수직적 수학화와 관련이 있으며, 관계를 공식으로 표현하는 활동, 규칙성을 증명하는 활동, 모델 자체를 다듬고 변형하는 활동, 모델을 결합하고 통합하는 활동, 새로운 수학적 개념을 명확히 하는 활동 일반화 하는 활동 등이 여기에 속한다. 2단계에서 만들어진 수학적 모델의 완성도에 따라 결론을 쉽게 도출할 수도, 어려움을 겪을 수도, 때로는 결론을 도출하지 못할 수도 있다. 그러한 경우에 1단계로부터 다시 검증하는 절차를 가져야하며 단계별로 누락된 정보는 없는지 진행의 논리적 비약은 없는지를 꼼꼼하게 살펴야 할 것이다.

- 4 단계 : 수학적 결론 → 수학적 응용

수직적 수학화의 결과로 발생된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일

반화하는 응용의 수학화과정이다.

일반적으로 이러한 과정에는 사상(mapping), 단순화(shorting), 실용성(pragmatic)이라는 세 가지 특성이 포함되어 있다(Deakin, 1990).

수학적 모델링의 예]

[지상으로부터 5km위에 있는 구름 속에서 떨어지는 빗방울의 속도는 공기가 없으면 이론적으로 약 313m/s 라고 한다. 이 정도의 속력이라면 우산 따위는 박살나버리고 비가 올 때마다 우리는 여기저기 숨을 곳을 찾아 다녀야만 한다. 하지만 우리는 그런 걱정을 할 필요가 없다. 무엇 때문일까? 그 원리는 주변에서 흔히 일어나는 나뭇잎이나 깃털 따위가 떨어지는 현상을 살펴보면 알 수 있다. 지섭이는 그런 원리를 알아보기 위해 지상에서 1.5m 높이에서 1회용 접시를 떨어뜨리고 그 접시가 움직이는 현상을 관찰하기로 하였다.]

시간	떨어진 거리	시간 간격	이동 거리
1.13	0.69		
1.17	0.73	0.03	0.03
1.20	0.76	0.03	0.04
1.23	0.80	0.03	0.04
1.27	0.84	0.03	0.03
1.30	0.87	0.03	0.04
1.33	0.91	0.03	0.04
1.37	0.95	0.03	0.04
1.40	0.98	0.03	0.04
1.43	1.02	0.03	0.04

시간	떨어진 거리	시간 간격	이동 거리
1.47	1.06	0.03	0.04
1.50	1.10	0.03	0.04
1.53	1.14	0.03	0.03
1.57	1.18	0.03	0.04
1.60	1.22	0.03	0.04
1.63	1.27	0.03	0.04
1.67	1.31	0.03	0.04
1.70	1.35	0.03	0.04
1.73	1.39	0.03	0.04
1.77	1.43	0.03	0.04

지상에서 1.5m 높이에서 1회용 접시를 떨어뜨리고 그 접시가 움직이는 현상을 관찰하는 실험을 하였다. 얻어진 실험 자료가 아래와 같을 때, 접시의 움직임에 대하여 설명하여 보아라. 만약 접시를 $10m$ 높이에서 떨어뜨렸다면 바닥까지 떨어지는데 걸린 시간은 얼마인지 말하여라.

• 1단계 : 현실세계 문제 상황 → 현실적 모델

주어진 문제 상화에서 얻어진 실험 자료에서 얻을 수 있는 자료는

- 시간간격이 일정하다는 것
- 이동거리는 다소 불규칙해 보일 수 있다는 것이다.

하지만 이상적인 실험조건을 가정하여 실험하였을 경우 얻어질 결과를 상상해서 위의 실험을 재해석하면 “일정한 시간간격에 대하여 일정한 거리를 움직인다”라는 가정을 할 수 있으며, 문제를 해결하기 위하여 “일정한 시간(0.03초)동안 일정한 거리(0.04m)를 움직인다면 $10m$를 움직이는데 걸린 시간은 얼마인가” 라는 현실적 문제 상황에 적합한 문장을 만들 수 있다.

• 2 단계 : 현실적 모델 → 수학적 모델

일정한 시간간격은 실험 데이터로부터 0.03초이고 일정하게 움직인 거리는 0.04m임을 알 수 있으며 만든 문장을 수학적 모델인 비례관계식을 써서 나타내야한다.

즉 "일정한 시간동안 일정한 거리를 움직인다면 10m를 움직일 때 걸린 시간은 얼마인가" 라는 현실적 문장은 "얼마인가?" 라는 부분을 미지수 x로, 일정한 시간을 0.03으로, 일정한 거리를 0.04로 각각 변환하여서 비례식으로 변환하면

$0.03 : 0.04 = x : 10$ 으로 만들 수 있다(수학적 모델).

• 3 단계 : 수학적 모델 → 수학적 결론

비례식 $0.03 : 0.04 = x : 10$ 을 이용하여 수학적 결론을 도출하는 방법 즉, 비례식의 해를 구하는 방법은 초등학교에서 배운 수학적 지식이므로 그를 활용하여 결과(주어진 문제의 해)를 만들 수 있다.

• 4 단계 : 수학적 결론 → 수학적 응용

위의 문제 해결과정을 확장하여 일정한 시간동안 일정한 거리를 움직이는 물체가 있다고 가정하였을 때, 출발한지 3초 후, 5초 후 10초 후 에 도달한 거리를 구하여보고 결과를 표로 만들거나 정리하여서 일반화하여 보는 것(단위 시간당 움직인 거리를 정의 하고 주어진 문제들을 해결하는 것)은 위 수학적 결론에 대한 수학적 응용이라 하겠다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구의 대상

본 연구의 연구 대상자들은 공주대학교 부설 영재교육에 참여한 중학교 1학년 수학 영재반 학생 20명을 대상으로 방학 중 기초과정 이수시간을 활용하여 투여하였다

2. 연구 설계

본 연구의 문제를 해결하기 위하여 표집단계에서 학습자들의 수학 교과에 대한 자아개념, 태도, 학습 습관 검사를 실시하고 연구 실행단계에서는 모둠 또는 개인별 학습 활동지와 MBL실험도구, GSP를 활용하여 개방형의 자기 주도적 학습을 실시한 후 수학 모델링 수업이 함수 개념의 이해하는데 어떠한 영향을 미치는 가를 알아보기 위하여 활동지 분석 및 설문지검사를 실시하였다.

3. 연구 절차

본 연구는 연구계획, 자료개발, 설문조사 및 실험수업, 결과분석 과정까지, 연구기간은 2009년 3월 1일부터 8월31일 까지 6개월이었으며 연구를 위한 진행 절차는 다음과 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구 진행 절차

기간	연구 내용	비고
3월 1일~4월4일	1. 연구 주제 및 연구 유형 결정 2. 선행연구 자료 수집 계획서 작성" 3. 연구 주제에 따른 선행연구 자료 수집 및 검토	
4월 5일~7월30일	1. 이론적 배경 - 지식에 대한 구성주의의 관점 연구 - Freudenthal의 현실적 수학교육 연구 2. 현대적 함수개념의 형성과정 연구 3. 수학교육목적에 따른 공학적도구의 활용 연구 4. 수학적 모델링 중 1 함수 교수-학습 방법 구상 및 자료 제작	
8월 1일~15일	1. 사전 설문조사 2. 실험수업 3. 사후 설문조사	
8월 15일~8월25일	1. 설문지 분석 2. 학습 활동지 분석 3. 검증	

4. 측정도구

(1) 수학 학습에 대한 태도 검사

연구 대상의 수학에 대한 흥미·태도를 알아보기 위하여 사전검사를 실시하였다. 검사지는 한국 교육개발원에서 1992년에 개발한 자료를 참고하여 다음과 같이 구성하였다. 학습태도 검사지는 총 20문항으로 구성되어 있다.(표Ⅳ-1)

각 문항에 대한 검사지는 <표 Ⅲ-2>와 같이 반응형태에 따라 부여하는 5단계 평정척도로 되어있다

<표 Ⅲ-2> 반응형태에 따른 평정척도

내용		항상 그렇다	대체로 그렇다	잘 모르겠다	대체로 그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
긍정형	배점	5	4	3	2	1

(2) 수학적 모델링 설문조사 학생 활동지 학습프로그램 평가지(학생용)

수학적 모델링 수업이 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 생각하는 능력과 수학에 대한 긍정적 태도 변화에 어떤 영향을 주는가? 를 알아보기 위하여 수학

적 모델링 수업의 유용성에 관한 설문조사와 학습 활동지 및 학습 프로그램 평가지(학생용)를 분석하였다

5. 지도의 실제

수업 지도는 중학교 1학년 함수 단원에서 공주 대학교 부설 영재교육원 기초과정(중학교 1학년 20명)의 수업계획에 의거 학습자 중심의 수학적 모델링 수업을 실시하였다. 지도 시간은 총 차시의 영재교육 기초과정 20 차시 중 4차시에 적용하였다. 수학적 모델링 수업의 성공여부는 학습자의 학습 동기유발과 학습내용의 적정성 여부에 달려있기 때문에 수업자료를 개발함에 있어 수학적 모델링 수업의 특징을 반영하여 현실에서 흔히 접할 수 있고 과학적 속성이 강하면서 수학과 밀접한 연관성이 있는 내용을 선택하여 개발하고자 노력하였다. 4차시 수업자료는 자료의 분석, 실험 결과의 분석, 도형에 관련한 법칙 찾기 등으로 비 구조화된 학습내용을 선택하여 단순화하고 일반화하여 수학적 모델을 구성하고 문제를 해결하는 방식으로 진행되도록 구성하였다.

<표 Ⅲ-3> 지도 자료의 차시별 내용

차시	주제	자료의 내용	관련단원
1	온실효과	온도 변화 예측	함수의 뜻
2	종단속도	속도의 변화에 대한 요인별 분석	속도와 거리
3	도형의 넓이	다각형의 넓이 구하기	도형의 넓이
4	픽의정리	격자다각형의 넓이	도형의 넓이

실제 수업은 학습단계를 도입(5분), 탐색 및 토의 35분, 정리(10분)의 3단계로 구성하여 진행하였다. 도입단계는 현실에서 흔히 접하는 현상에 대한 소개와 그로인한 문제점 등 시사적인 내용에 관련한 자료를 나누어주고 생각해보도록 구성하였다. 탐색 및 토의 단계에서는 도입단계에서 제시된 현상을 이해하기 위한 자료를 제시하거나 실험하거나 컴퓨터 프로그램을 이용한 구체적 사항에 관한 자료를 제시하는 것으로 시작하여 학습자 개인 또는 모둠별로 결과를 분석하고 간단히 하며 일반화 하도록 토의하는 과정을 거치도록 하였으며 정리단계에서는 일반화한 수학적 내용에 관하여 타당성을 검증하고 응용하는 시간을 갖도록 하였다.

<표 Ⅲ-4> 차시별 지도안 내용

학습 단계	주 요 학습활동	교수-학습 활동	시간	자료 및 유의점
도입	문제제시	• 학습 활동지 배부 및 동기유발 자료 제시 • 학생들이 충분한 동기를 갖도록 시사적이며 현실적인 자료의 제시	5분	제시된 자료에 대하여 학생 스스로 문제의식을 갖도록 지도

탐색	개별활동	• 제시된 문제의 성격, 특성 등에 관한 자료나 실험 등을 직접 시행하거나 모범 실험 실시 • 결과에 대하여 수학적 배경에 관련지을 수 있도록 단순화 하고 수학적 모델 구성하기	10분	
	모둠활동	• 학생 개인이 만든 수학적 모델의 적정성과 타당성 토의 • 적정성과 타당성이 검증된 모델의 해구하기	10분	토의의 내용이 과학으로 흐르는 경향을 배제하고 수학적 내용으로 향하도록 유의
	전체토의	• 검증된 수학적 모델을 일반화하기	15분	
정리	학 습 내 용 정리	• 학습내용 정리하기 • 일반화한 모델의 해를 이용하여 응용문제 해결하기	10분	

6. 자료분석

본 연구의 통계처리는 SPSS 프로그램을 사용하였으며 자세한 분석과정은 다음과 같다.

첫째, 수학적 모델링 수업이 수학적 태도의 사전 사후의 차이를 알아보기 위하여 대응표본 t-검증(paired t-test)을 실시하였다.

둘째, 수학적 모델링 수업에 대한 학생들의 인식도 설문조사를 실시하고 이를 연구문제에 대한 분석 자료로 활용하였으며 수학과 과학의 연관성 인식의 유미한 차이가 있는지 알아보기 위하여 대응표본 t-검정을 실시하였다.

셋째, 학습 활동지와 수학적 모델링 수업 설문 분석을 통하여 학생들의 개념이해도 분석을 위한 참고 자료로 활용하였다.

<표Ⅳ-2> 실험 전후 학생들의 수학적 태도 검사표 ($p<.05$)

설문내용	응답수									
	항상 그렇다		대체로 그렇다		잘 모르겠다		대체로 그렇지 않다		전혀 그렇지 않다	
	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후
1. 나는 수학 공부가 매우 재미있다.	3	3	11	12	6	5	0	0	0	0
2. 나는 수학시간이 좀더 많으면 좋겠다고 생각한다.	2	2	10	10	5	6	2	2	1	0
3. 나는 수학 문제를 여러 가지 방법으로 풀어 보는 것을 좋아한다.	9	8	8	9	1	2	2	1	0	0
4. 나는 수학 공부를 열심히 할수록 재미있는 것 같다.	8	8	10	10	1	1	1	1	0	0

5. 나는 수학시간에 배운 내용을 응용해보고 싶다.	7	7	8	8	5	5	0	0	0	0
6. 나는 수학공부가 쉽다	2	2	7	7	4	4	6	7	1	0
7. 나는 새로운 수학적 개념을 배우고 응용하는데 다른 사람보다 잘할 수 있다.	3	3	8	9	8	7	0	0	1	1
8. 나는 수학 시험에서 좋은 성적을 얻을 수 있다.	5	5	11	11	4	4	0	0	0	0
9. 나는 어려운 수학 문제를 배우는 것에 적극적이다.	3	2	9	10	6	6	2	2	0	0
10. 나는 어려운 문제일수록 도전하고 싶은 마음이 든다.	5	5	7	7	5	5	3	3	0	0
11. 나는 수학시간에 배운 것은 스스로 예습과 복습을 한다.	2	2	4	4	5	5	8	8	1	1
12. 나는 수학공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 열심히 한다.	4	4	6	6	5	5	5	5	0	0
13. 나는 누가 시키지 않아도 스스로 수학공부를 한다.	3	4	6	7	7	6	4	3	0	0
14. 나는 세운 계획에 대하여 미루거나 게을리 하지 않는다.	2	2	8	9	7	6	2	2	1	1
15. 나는 수학 공부를 시작하면 끝까지 한다.	3	5	8	6	8	8	1	1	0	0
16. 나는 수학을 배우는 목적을 잘 알고 있다.	6	7	7	6	6	6	1	1	0	0
17. 나는 모든 사람이 수학을 배워야한다고 생각한다.	11	11	2	2	3	5	2	2	2	0
18. 나는 학교에서 배우는 수학적 지식은 현실 생활의 문제를 해결하고 활용하는데 유용하다고 생각한다.	6	6	7	8	4	3	1	3	2	0
19. 나는 수학이란 다양하고 깊이 있는 학문을 하기위한 도구라고 생각한다.	8	8	2	2	3	3	3	5	4	2
	t = -4.098 df = 19 p = 0.001									

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

수학적 모델링 수업이 영재반 학생들의 수학적 태도에 있어 사전 사후에 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위해 대응표본 t-검정을 실시하였다.

1. 연구문제 '(1)'(수학적 태도에 미치는 영향)의 결과

연구문제 (1)의 "수학적 모델링 수업이 학생들의 수학적 태도에 어떤 영향을 주는가?"를 알아보기 위하여 수학적 태도 설문조사를 실시하였다.

<표 Ⅳ-1>수학 학습 태도 에 관한 설문지(사전 사후)

구분	평균	학생수	표준편차	t	df	p
사전	69.7000	20	11.00765	-4.098	19	.001
사후	70.7500	20	10.61714			

수학적 모델링 수업이 학생들의 수학적 태도 변화를 알아보기 위하여 학습태도 검사에 대한 대응표본 t-검정을 실시하였다. 유의수준 5%에 대하여 검정한 결과 , $p<0.05$이므로 학습태도에 통계적으로 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다. 대상 학생이 영재학생이고 학습이 집중적으로 이루어진 이유 등으로 학습태도에 수학적 모델링수업의 효과가 제한적이었을 것으로 판단하였지만 학생들의 인터뷰와 수업이후의 주제에 대하여 가졌던 생각이나 태도에 어떠한 변화가 있는가를 물어본 설문에서도 확인할 수 있듯이 많은 학생들이 일상생활에서 흔히 접하는 쉬운 여러 가지 함수의 예들이 단순하게 제시되는 것이 아니라 직접 보고 체험할 수 있도록 구성한 모델링 수업에 많은 관심을 보였으며 매우 흥미로워 했다. 일반 학생을 위한 수학적 모델링 수업에서도 같은 결과를 가져올 수 있을 것으로 기대한다.

2. 연구문제 '(2)'(수학적 사고에 미치는 영향)의 결과

연구문제 (2)의 "수학적 모델링 수업이 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 생각하는 능력과 수학에 대한 긍정적 태도 변화에 어떤 영향을 주는가?"를 알아보기 위하여 수학적 모델링 설문조사와 학습 활동지를 분석하였다.

<표 Ⅳ-3> 수학적 모델링의 유용성에 관한 설문조사지 (사전, 사후)

설문내용		응답수										p 값
		항상 그렇다		대체로 그렇다		잘 모르겠다		대체로 그렇지 않다		전혀 그렇지 않다		
		사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	
수학적 지식이 과학적 현상의 이해에 미치는 영향	21. 나는 수학을 잘하면 과학도 잘할 수 있다고 생각한다.	6	9	8	7	3	1	2	2	1	1	0.096
	22. 나는 과학 현상의 원리와 개념을 이해하기 위하여 수학적 지식이 필요하다고 생각한다.	1	3	10	10	5	4	3	2	1	1	
	23. 나는 과학적 현상에 관한 문제를 잘 풀기위하여 수학적 지식이 필요하다고 생각한다	14	14	5	6	1	0	0	0	0	0	
과학적 현상에 관한 지식이 수학적 개념의 이해에 미치는 영향	24. 나는 과학을 잘하면 수학도 잘할 수 있다고 생각한다.	11	11	8	7	0	1	1	1	0	0	0.003
	25. 나는 수학 문제를 잘 풀기위하여 과학적 현상에 대한 지식이 필요하다고 생각한다	2	6	8	3	3	4	7	7	0	0	
	26. 나는 수학의 원리와 개념을 이해하기 위하여 과학적 현상에 대한 지식이 필요하다고 생각한다.	4	7	4	8	6	4	6	1	0	0	

2.1 수학적 지식이 과학적 현상의 이해에 미치는 영향

수학이 과학적 현상을 이해하고 문제를 해결하는데 유용한가에 관한 인식의 변화를 알아보기 위하여 다음의 세 문항에 대한 응답 사례에 대하여 대응표본 t-검정을 실시한 결과 p>0.05 이므로 사전 사후의 차이가 없는 것으로 나타났다.

<표Ⅳ-4> 수학적 지식이 과학적 현상의 이해에 미치는 영향.

구분	평균	학생수	표준편차	t	df	p
사전	12.9000	20	1.91669	-1.751	19	.096
사후	13.1500	20	1.87153			

2.2 과학적 현상에 관한 지식이 수학적 개념의 이해에 미치는 영향

과학적 현상에 대한 지식이 수학의 개념을 이해하고 문제를 해결하는데 유용한가에 관한 인식의 변화를 알아보기 위하여 다음의 세 문항에 대한 응답 사례에 대하여 대응표본 t-검정을 실시한 결과 다음과 같이 p<0.05 이므로 사전 사후의 차이가 있는 것으로 나타났다.

<표Ⅳ-5> 과학적 현상에 관한 지식이 수학적 개념의 이해에 미치는 영향.

구분	평균	학생수	표준편차	t	df	p
사전	9.9000	20	2.53190	-3.359	19	.003
사후	11.0500	20	2.58488			

결론적으로 위 <표Ⅳ-4>와 <표Ⅳ-5>의 비교에서 알 수 있듯이 "a. 수학이 과학적 현상을 이해하고 문제를 해결하는데 유용하다" 와 "b. 과학적 현상에 대한 지식이 수학의 개념을 이해하고 문제를 해결하는데 유용하다"라는 설문 분석에서 a의 사전 평균이 12.9 b.의 사전평균은 9.9로 a가 b보다 더 중요하다고 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 수학적 지식이 과학적 현상을 이해하고 문제를 해결하는 것에 미치는 영향이 그 반대의 경우보다 더 유용하고 가치가 있으며 영향력이 크다고 인식하고 있었으며 특히 구체적으로는 과학적 현상의 이해보다 단순히 과학적 현상에 관한 구체적 문제 상황에서 이를 해결하는 도구로서의 수학의 역할을 크게 인식하고 있는 반면 과학적 현상에 대한 이해에 기여하는 수학의 역할에는 상대적으로 그 중요성을 덜 인식한 것을 의미한다.

그러나 수학적 모델링 수업이후 a의 인식의 변화에 관하여는 유의미한 변화는 없는 것으로 b의 인식의 변화에 관하여는 p<0.05 이므로 유의미한 변화가 있는 것으로 나타났다 이러한 유의미한 변화는 다음과 같은 학생들의 수학적 모델링 수업에 대하여 느낀 점을 적어 제출한 내용을 살펴보아도 확인할 수 있다.

3. 학생에 대한 수업 관찰기록

수학적 모델링 수업이 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 생각하는 능력과 수학에 대한 긍정적 태도 변화에 어떤 영향을 주는가? 에 관하여 학생들이 생각하는 인식의 변화를 구체적으로 알아보기 위하여 수업이후의 주제에 대하여 가졌던 생각이나 태도에 어떠한 변화가 있는가를 물어보았다. 대부분의 학생들이 과학적 현상을 통하여 함수의 개념을 학습하는 모델링 수업에서 높은 관심을 보였으며 일상생활에서 흔히 접하는 쉬운 여러 가지 함수의 예들이 단순하게 제시되는 것이 아니라 직접 보고 체험할 수 있는 모델링 수업이 함수의 개념 학습에 효과적이라고 응답하였으며 매우 흥미로워 했다.

다음 문항에 대한 자신의 생각을 간단하게 써주세요.

10. 수업 이후에 이 주제에 대해 가졌던 생각이나 태도에 있어서 달라진 점은 무엇인가요?

예전 함수는 지겹고, 쓸모없는거라는 그 정도만 [illegible] 수업을 듣고 나서 함수의 응용성을 다시 생각해볼 수 있었고 긍정적인 [illegible]

다음 문항에 대한 자신의 생각을 간단하게 써주세요.

10. 수업 이후에 이 주제에 대해 가졌던 생각이나 태도에 있어서 달라진 점은 무엇인가요?

함수는 교과서에만 나오는 어렵고 낯선 수학인줄로만 알았는데 실생활과 이렇게 밀접한 관계가 있어서 가깝게 함수가 재미있게 느껴졌다

다음 문항에 대한 자신의 생각을 간단하게 써주세요.

10. 수업 이후에 이 주제에 대해 가졌던 생각이나 태도에 있어서 달라진 점은 무엇인가요?

함수가 수학만이 아닌 실생활에서도 효율적으로 이용되는 것

다음 문항에 대한 자신의 생각을 간단하게 써주세요.

10. 수업 이후에 이 주제에 대해 가졌던 생각이나 태도에 있어서 달라진 점은 무엇인가요?

사회적 현상을 과학과 수학 두 학문에서 어떻게 분석하고 설명하는지 알게 되었다.

다음 문항에 대한 자신의 생각을 간단하게 써주세요.

10. 수업 이후에 이 주제에 대해 가졌던 생각이나 태도에 있어서 달라진 점은 무엇인가요?

평소 과학을 지루해했고 수학과 과학이 어떻게 어울릴수 있는지 궁금했는데
오늘 수업으로 인해서 과학도 재미있다는 것, 그리고 과학과 수학은 아주
밀접한 관계가 있다는 걸 알았다.

V. 결론 및 제언

본 논문에서는 학습자의 자기 주도적인 수업과 결과 중심이 아닌 과정중심의 접근이 가능하도록 공학적 도구(MBL)를 활용을 통한 수학적 모델링 수업을 실시하였다. 수학적 모델링 수업은 학생들이 현실세계에서 흔히 접하는 현상에 관련하는 내용들로 학생의 흥미를 자극하며 수학적 개념을 효과적이고 올바르게 형성하는데 유익한 것으로 나타났으며 이를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

첫째, 수학적 모델링 수업을 실시한 후 수학적 태도에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다.

둘째, "a. 수학이 과학적 현상을 이해하고 문제를 해결하는데 유용하다" 와 "b. 과학적 현상에 대한 지식이 수학의 개념을 이해하고 문제를 해결하는데 유용하다"라는 설문 분석에서 수학적 지식이 과학적 현상을 이해하고 문제를 해결하는 것에 미치는 영향이 그 반대의 경우보다 더 유용하고 가치가 있으며 영향력이 크다고 인식하고 있으며 특히 구체적으로는 과학적 현상의 이해보다 단순히 과학적 현상에 관한 구체적 문제 상황에서 이를 해결하는 도구로서의 수학의 역할을 크게 인식하고 있는 반면 과학적 현상에 대한 이해에 관하여 수학의 역할에는 상대적으로 그 중요성을 덜 인식하는 것으로 나타났다. 그러나 수학적 모델링 수업이후 a의 인식의 변화에 관하여 유의미한 변화는 없는 것으로 나타났지만 b의 인식의 변화에 관하여는 유의미한 변화가 있음을 알 수 있었다.

셋째, 수업이후의 주제에 대하여 가졌던 생각이나 태도에 어떠한 변화가 있는가에 대한 인터뷰와 설문에서 대부분의 학생들이 과학적 현상을 통하여 함수의 개념을 학습하는 모델링 수업에서 높은 관심을 보였으며 일상생활에서 흔히 접하는 쉬운 여러 가지 함수의 예들이 단순하게 제시되는 것이 아니라 직접 보고 체험할 수 있는 모델링 수업이 함수의 개념학습에 효과적이라고 생각하였으며 매우 흥미로워 했다.

이상에서 수학적 모델링 학습을 실시하는 것이 함수의 개념학습에 긍정적이 영향을 미치는 것으로 나타났으며 기존의 강의식 전달학습보다 효과적이며 오 개념을 줄일 수 있는 방안임을 알 수 있었다. 그러므로 학생들의 올바른 수학적 개념형성과 교과에 대한 긍정적인 태도변화를 이끌어내기 위하여 기존에 제시된 강의 위주 또는 보여주는 학습 자료에서 벗어나 수학교과와 연계성을 가지고 있으면서 학생들이 직접 체험을 통하여 확인할 수 있고 수학적 개념학습에 유용하게 쓰여질 수 있는 다양한 현상들에 대한 연구와 개발이 이뤄지길 바란다.

참고문헌

강경애 · 남승인 (1996). 수학교육의 변화에 대하여. 대구교육대학교 과학교육연구소 과학수학교육연구 논문집

류희찬 (2002). Freudenthal의 수학화 이론과 현실적 수학교육. 한국교원대학교 수학교육연구소 청람 수학교육, 10

박교식 (1992). 교수현상학적 수학교육관 연구. 인천교육대학교 논문집

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

이용옥 (2004). 과학교과를 활용한 수학교과의 학습지도 연구-방정식과 함수를 중심으로- 서강대학교 석사학위논문.

이충호 (2001). 현실주의 수학교육에 관한 고찰. 서울대학교 대학원 수학교육 석사학위논문

조완영 · 김남균 (2003). 과학과 연결된 함수 교수·학습 자료 개발방향. 한국수학교육학회 초등수학교육 논문집

칸트 지음, 최재희 옮김 (2007). 순수이성비판. 서울. 박영사.

황혜정 외 5인 (2007). 수학교육신론. 서울 문음사.

Berlinghoff, William P. & Gouvea, Fernando Q. (2004), Math through the ages, Oxton House publishers.

Breiteig, T., Huntley, I. & Kaiser-Messmer, G. (1993), Teaching and learning mathematics in context, Ellis Horwood.

Carr, Martha. (1996), Motivation in mathematics, Hampton Press, Inc. Cresskill, New Jersey.

Ellis, A. B. (2007), Connections between generalizing and justification: Students' reasoning with linear relationship, Journal for research in mathematics education.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, 12, 33- 150.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education, China Lectures, Kluwer Academic Publishers.

Nelsen, Roger B. (1993), Proofs without words, The Mathematical Association of America.

Olive, J. & Labato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In K. Heid & G. Blume(EDs.), research on technology in the teaching and learning of mathematics: syntheses and perspectives. Greenwich: Information Age Publishing.

Ridgway, Jim. (1988), Assessing mathematical attainment, Nfer-Nelson.

Tall, David. (1991), Advanced mathematical thinking, Kluwer Academic publishers.

A Study on the Function Education of Middle School Using the Technical Instruments

Chu, Soon Jong[3] · Kim Yunghwan[4]

Abstract

One of the characteristics in math -abstract concept- makes the students find difficulties in understanding general ideas about math. This study is about how much do the modeling lessons using the technical instruments which is based on the realistic mathematical theory influence on understanding the mathematical concept.

This study is based on one of the contents the first grade of middle school students study, the function, especially the meaning of it.

Some brilliant students being the objects of this study, mathematically experimental modeling lesson was planned, conducted. Survey on the students' attitudes about math before and after the modeling classes and Questionnaire survey on the effectiveness about the modeling class were conducted and their attitudes were recorded also.

This study tells that students show very meaningful changes before and after the modeling class and scientific knowledge seems to be very helpful for the students to understand the mathematical concept and solve the problems.

When scientific research and development get together with mathematics, students will be more motivated and be able to form the right mathematical concept easily.

Key Words : Technical Instruments, Mathematical Modeling Lessons, Function Education

3) Cheonan Sindang High School (vasha@hanmail.net)
4) Kongju National University (yhkim@kongju.ac.kr)