韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2009. 08. 제 48권, 제 3호, 287-302.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2009, Vol. 48, No. 3, 287-302.

초등학교 아동들의 삼각형의 합동조건 구성 과정 분석

손 소 현 (수원영통초등학교)
임 재 훈 (경인교육대학교)

I. 서 론

현행 학교수학에서 기하교육은 직관기하의 기초 위에 삼각형의 합동조건을 바탕으로 하는 유클리드(Euclid)식의 접근을 근간으로 하고 있다. 증명을 취급하는 대표적인 소재로 평면기하를 택하고 삼각형의 합동조건과 닮음조건을 이용한 증명을 도형의 성질을 연구하는 주된 방법으로 간주하고 있는 것이다(우정호, 2007). 삼각형의 합동조건은 기하교육의 근간이 되는 중요한 소재로서, 학교기하의 필수적인 내용이다.

초등학교 수학과와 중학교 수학과에서 다루는 내용은 기본적으로 서로 다르며 중복되지 않는다. 이를테면 초등학교에서 자연수, 양의 분수와 소수의 계산을 다루고, 중학교에서는 정수의 계산과 무리수의 계산을 다룬다. 그러나 도형 영역에서는 중학교에서 다루는 내용이 초등학교에서 다루어지기도 한다. 평행선의 성질이나 삼각형의 내각의 합, 삼각형의 합동조건이 그러한 내용이다.

초등학교에서는 SSS, SAS, ASA 합동조건을 세 변의 길이, 두 변의 길이와 끼인각, 한 변의 길이와 양끝각이 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 그리는 활동을 통해 도입한다. 이 과정에서 삼각형의 합동조건이 최소조건이라는 것이나 삼각형의 합동조건이 세 개 뿐인 이유는 잘 드러나지 않는다. 아동들은 위의 세 조건이 각각 주어졌을 때 삼각형을 하나씩 그리고 삼각형의 합동조건은 SSS, SAS, ASA라는 것을 수동적으로 이해하는 수준에 머무를 수 있다.

삼각형의 합동조건을 스스로 찾아내는 본격적인 탐구 없이 기성의 지식을 간단한 확인 활동을 거쳐 받아들이는 것은 충분하지 않다. 왜 그렇게 하는가, 어떻게 하여 그렇게 하게 되었는가를 탐구하며 아이디어의 근원으로 돌아갈 때에 지식이 지닌 생명력이 되살아나게 된다(Toeplitz, 1963). 삼각형의 6개의 요소 중 특정한 3개의 요소만 알면 삼각형의 합동 여부를 확인할 수 있다는 삼각형의 합동조건도 그 근원적인 탐구 맥락으로 돌아갈 때 비로소 그 생명력이 살아날 것이다. 학생들에게 SSS, SAS, ASA라는 주어진 삼각형의 합동조건을 간단한 확인 과정을 거쳐 받아들이게 할 것이 아니라 스스로 어떤 경우가 합동조건이 될 것인지를 추측하고 구성할 수 있게 하는 탐구 맥락을 제공할 필요가 있다.

초등학교에서 삼각형의 합동조건은 5학년에서 다룬다. 그런데 초등학교 5학년 정도의 아동들이 삼각형의 합동조건에 관하여 어떤 지식을 어떻게 구성할 수 있는지는 아직 밝혀져 있지 않다. 삼각형의 합동조건에 관한 선행 연구들은 삼각형의 합동조건의 범위 및 합동조건과 결정조건의 관계에 대한 논의(최노성, 2002; 박선용, 권석일, 2004; 김수현, 최윤상, 2007), 컴퓨터 소프트웨어를 삼각형의 합동조건 지도에 활용하는 방안에 관한 논의(고상숙, 정승진, 2001; 강정미 2005), 합동조건이 지닌 최소조건의 의미가 드러날 수 있는 탐구 맥락에 대한 논의(Eggleton, 2001; 박선용, 권석일, 2004; 임재훈 2005) 등이 있다.

이에 이 연구에서는 초등학교 5학년 연령의 아동들이 삼각형의 합동조건에 관한 지식을 구성해 가는 과정을 분석하고자 한다. 삼각형의 합동조건 지도에 관한 선행 연구들(강정미, 2005; 박선용, 권석일, 2004; Eggleton, 2001 등)은 공통적으로, 삼각형의 요소의 개수를 1개부터 늘려가는 탐구 맥락에서 삼각형의 합동 조건이 최소

* 접수일(2009년 6월 10일), 수정일(1차 : 2009년 7월 24일), 게재확정일(2009년 8월 6일)
* ZDM분류 : G43
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 삼각형의 합동조건, SSS 합동조건, SAS 합동조건, ASA 합동조건, 작도

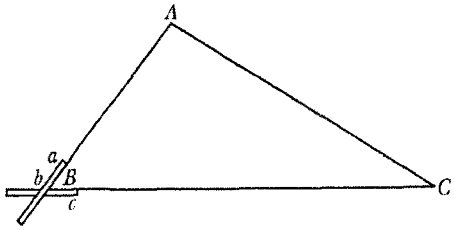
조건임을 학생들이 알게 할 것을 주로 중학교에서의 삼각형의 합동조건 지도와 관련하여 제안하고 있다. 이 연구에서는 선행 연구에서 제안된 이와 같은 탐구 활동이 초등학교 학생들에게도 유의미하겠는가라는 문제를 탐구한다. 이 연구의 목적은 크게 다음 두 가지이다. 첫째, 초등학교 5학년 정도의 아동들이 요소의 개수를 1개부터 늘려가는 탐구를 통해 삼각형의 합동조건을 구성하는 것이 가능한지 그 지식 구성의 가능성을 밝히는 것이다. 둘째, 아동들이 삼각형의 합동조건을 어떤 과정을 통해 발견해 가며 그 과정에서 어떤 어려움에 부딪히는지 밝히는 것이다.

Ⅱ. 기하 교재에서 삼각형의 합동조건

우리나라에서는 삼각형의 합동조건을 초등학교 5학년과 중학교 1학년에서 다룬다. 여기서는 초등학교 수학과 교과서와 중학교 수학과 교과서에서 삼각형의 합동조건을 취급하고 있는 방식을 유클리드의 원론과 클레로(Clairaut)의 기하학 원론에서 삼각형의 합동조건을 다루고 있는 방식과 관련지어 살펴본다.

초등학교와 중학교 교과서에서 삼각형의 세 합동조건 SSS, SAS, ASA는 한꺼번에 잇달아 도입된다. 《Euclid 원론》에서 삼각형의 합동조건에 해당하는 각각의 명제는 간격을 두고 명제 4, 명제 8, 명제 26으로 등장한다. 세 합동조건 중 가장 기본적인 것은 명제 4인 SAS로서, 이것은 명제 8인 SSS, 명제 26인 ASA 증명에 중요하게 사용된다. 클레로의 《기하학 원론》에서는 넓이를 구하려는 땅에 장애물이 있을 때 적절한 곳에 똑같은 도형을 옮겨 그리는 방법을 탐구하는 맥락에서 합동인 삼각형을 그리는 세 가지 방법이 잇달아 등장한다. 초등학교와 중학교에서 삼각형의 합동조건을 하나의 정리로 묶어 다루는 방식은 클레로의 방식과 비슷하다.

초등학교 교과서에서는 삼각형의 합동조건을 합동인 삼각형을 그리는 활동을 통해 도입한다. 중학교에서 삼각형의 합동조건의 근거가 되는 삼각형의 결정조건이 작도를 통해서 도입된다. 작도를 통해서 삼각형의 합동조건을 도입하는 것 또한 유클리드보다는 클레로의 방식을 따르는 것이다. 초등학교에서는 각을 작도할 때에 각도기를 사용하지만 중학교에서는 자와 컴퍼스를 사용한다. 초등학교의 각도기를 이용한 작도 방법은 클레로의 《기하학 원론》에 나오는 두 개의 자를 교차하여 만든 도구를 사용한 각을 그리는 방법(<그림 Ⅱ-1>)과 매우 유사하다.



<그림 Ⅱ-1> 클레로의 각 작도 도구

초등학교 교과서에서는 주어진 요소의 개수가 3개보다 적거나 많은 경우를 다루지 않는다. 일부 중학교 교과서에서는 SS 조건과 같이 요소의 개수가 2개인 경우가 나오기도 하지만(조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재, 2008, p. 71), 일반적으로 주어진 요소가 3개보다 적거나 많은 경우를 자세히 탐구하게 하지는 않는다.

초등학교와 중학교 교과서에서 삼각형의 합동조건은 요소의 개수와 위치를 함께 고려하는 맥락에서 도입된다. 일부 중학교 교과서에서는 요소의 개수만 고려한 1S2A 조건을 다루기도 한다(강옥기, 정순영, 이환철, 2008, p. 69; 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, 2008, p. 74; 황석근, 이재돈 외, 2008, p. 63). 그러나 이것은 한 변의 길이와 두 각의 크기가 주어졌을 때 두 각의 위치를 지정해야 함을 강조하기 위한 것일 뿐, 요소의 개수만 고려하는 맥락을 본격적으로 다루려는 것은 아니다.

초등학교와 중학교 교과서에서는 SSS, SAS, ASA 이외의 조건을 일부 다루고 있다. 초등학교 수학 5-나 익힘책의 '좀 더 알아보기'에서 SAA 조건으로 합동인 삼각형을 작도할 수 있는지 살펴보고, 이를 통해 한 변의 길이와 두 각의 크기만 알면 항상 합동인 삼각형을 그릴 수 있다는 사실을 이끌어 낸다(교육인적자원부, 2004b, p. 57). SAA도 합동조건이므로 초등학교에서는 합동조건이 되는 경우만 다루고 있다. 초등학교 교과서와 달리 중학교 교과서에서는 합동조건(결정조건)이 될 수 없는 조건인 AAA, SSA를 다루기도 한다(금종해, 이만근, 이미라, 김영주, 2008, p. 68; 조태근, 임성모, 정상

<표 II-1> 초등학교와 중학교 교과서의 삼각형의 합동조건

	초등학교	중학교						
		A	B	C	D	E	F	G
합동조건의 정당화	합동인 삼각형의 작도	삼각형의 결정조건에 의한 정당화 (삼각형의 결정조건은 작도에 의해 정당화)						
합동조건의 탐구맥락	요소의 개수+위치	요소의 개수+위치	요소의 개수+위치	요소의 개수+위치	요소의 개수+위치	요소의 개수, 요소의 개수+위치	요소의 개수, 요소의 개수+위치	요소의 개수, 요소의 개수+위치
합동조건의 제시 순서	SSS → SAS → ASA							
탐구하는 조건들의 종류와 순서	SSS→SAS → ASA → SAA(수익)	SSS→SAS →ASA→ AAA → SSA	SS→SSS →SAS→ ASA → AAA → SSA	SSS→SAS →ASA→ AAA → SSA	SSS→SAS →ASA→ SSA → AAA	SSS→SAS →SSA→ ASA → 1S2A → AAA	SSS→SAS →SSA→ ASA → 1S2A → AAA	SSS→SAS →ASA→ AAA → SSA → 1S2A

권, 이재학, 이성재, 2008, pp. 73-74; 박윤범 외, 2008, p. 69; 박규홍 외, 2008, p.55; 강옥기, 정순영, 이환철, 2008, pp. 68-69; 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, 2008, p. 74; 황석근, 이재돈 외, 2008, p. 63).

삼각형의 세 합동조건의 제시 순서를 보면, 《Euclid 원론》에서는 SAS 합동, SSS 합동, ASA 합동의 순서로, 클레로의《기하학 원론》에서는 SSS 합동, SAS 합동, ASA 합동의 순서로 되어 있다. 《Euclid 원론》에서는 뒤에 따르는 명제를 증명하기 위해 먼저 증명되어야 하는 명제가 앞에 온다. 클레로의《기하학 원론》에서는 변의 개수가 줄어드는 순서로 되어 있다. 변의 개수가 3개에서 2개로 줄어들면 변만 가지고는 합동인 삼각형이 정해지지 않기 때문에 각이라는 요소를 도입한다. 클레로의《기하학 원론》에서의 제시 순서는 변의 개수를 3개에서 2개, 이어서 1개로 줄이며 그에 따라 자연스럽게 각의 요소를 도입하는 순서이다. 초등학교와 중학교 교과서에서 삼각형의 세 합동조건의 제시 순서는 SSS → SAS → ASA로, 클레로의 《기하학 원론》에 제시된 순서와 같다.

III. 연구방법

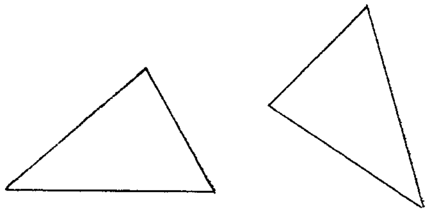
1. 연구대상

경기도 B시 소재 S초등학교 4학년 아동 6명(남 3명, 여 3명)이 본 연구에 참여하였다. 이 아동들은 4학년 수학을 보통 이상의 성적으로 이수하였다. 사전 조사 결과 이들은 수학 5-가의 1단원에서 3단원 정도를 개인적으로 미리 공부하였지만, 수학 5-나를 선수학습하지 않은 상태였다. 삼각형의 합동조건은 수학 5-나에서 학습하는 내용으로, 연구에 참여할 당시 이들은 삼각형의 합동조건에 대해서 모르고 있었다. 연구에 참여한 아동들은 각각 P1, P2, P3, P4, P5, P6으로 나타낸다.

2. 과제

아동들이 해결해야 하는 과제는 다음과 같이 길이와 각도가 표시되어 있지 않은 두 삼각형[1]이 서로 같은지 다른지를 확인하는 방법을 찾는 것이다.

1) 변의 길이는 긴 순서대로 12cm, 10.5cm, 7.8cm이고 마주보는 각의 크기는 순서대로 80°, 60°, 40°이다.



<그림 III-1> 주어진 삼각형

처음에는 주어진 두 삼각형이 서로 같은지 다른지를 어떻게 확인할 수 있을지 자유롭게 탐색하게 하였다. 이어서 삼각형의 6요소 중에서 특정한 요소를 선택하여 그 요소만으로 여러 개의 삼각형을 그려보고 그 삼각형들이 주어진 삼각형과 서로 같은지 확인하게 하였다. 이때, 사용하는 요소의 개수는 1개, 2개, 3개, 4개의 순으로 늘려갔다. 1개 또는 2개의 요소만을 사용하여 그리면 서로 다른 삼각형이 그려진다. 이때 아동들에게 서로 다른 삼각형이 그려지는 이유를 생각해 보게 하였다. 요소의 개수가 3개일 때 삼각형의 합동조건을 찾아보게 한 후, 요소의 개수가 4개 이상인 경우를 탐구하게 하여 삼각형의 합동조건이 최소조건임을 이해하는지 알아보고자 하였다. 아동들이 수행한 탐구의 흐름은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 III-1> 과제 탐구 흐름

탐구1	삼각형의 합동 확인 방법 자유 탐색
↓	
탐구2	요소 1개 고정하여 삼각형 그리기
↓	
탐구3	요소 2개 고정하여 삼각형 그리기
↓	
탐구4	요소 3개 고정하여 삼각형 그리기
↓	
탐구5	요소 4개 이상 고정하여 삼각형 그리기

아동이 이상의 탐구를 모두 수행하는데 걸린 시간은 1인당 약 4-5시간이었고, 한번에 1시간 반 정도씩 보통 3회에 걸쳐 탐구가 이루어졌다. 모든 탐구는 아동 한 명과 연구자가 일대일로 함께 하는 가운데, 개별 활동으로 이루어졌다. 매회의 탐구에서 진전 범위 및 각 부분에 대한 이해도는 아동에 따라 달랐으며, 그에 따라 개인별로 진행되는 탐구 과정도 서로 달랐다. 작도에 실수가 있거나 진전에 필요한 핵심적인 아이디어를 생각해 내지 못하여 더 이상 앞으로 나아가지 못할 때에는 연구자가 필요한 조언을 제공하였다.

3. 아동의 작도 방법 표기

아동들의 활동, 특히 작도와 관련된 활동은 본 연구에서 매우 중요하다. 따라서 아동들이 어떤 상황에서 어떤 요소들을 고려하여 삼각형을 작도하고자 하였는지를 정확하게 나타낼 필요가 있다. 이에 다음과 같이 처음에 주어진 요소와 아동이 작도 과정에서 추가한 요소를 구분하고 작도에 사용한 요소의 순서가 나타나도록 표기법을 고안하여 아동의 작도 방법을 나타내었다.

먼저, 처음에 주어진 변의 길이는 S, 주어진 각도는 A로 표기하며, 아동이 작도에 사용한 요소를 순서대로 쓰고, 요소 사이에 '-' 기호를 삽입하기로 하였다. 이를테면 아동이 S, A, S가 주어졌을 때 이를 차례로 사용하여 SAS 합동인 삼각형을 그렸다면 S-A-S로 표기한다.[2)]

요소가 1개 또는 2개만 주어졌을 경우 삼각형을 하나 작도하기 위해서는 아동이 다른 요소를 임의로 추가해야 한다. 이 추가된 요소를 주어진 요소와 구분하여, 삼각형을 그리기 위해서 아동들이 임의로 선택한 변의 길이는 (S), 각도는 (A)로 표기하기로 하였다. 이를테면 S가 하나 주어졌을 때 아동이 임의의 각과 변을 하나씩 선택하여 SAS 합동인 삼각형을 그렸을 경우 S-(A)-(S)와 같이 나타내며, SS 조건이 주어졌을 때 임의의 끼인각을 선택하여 SAS 합동인 삼각형을 그리는 것은 S-(A)-S로 표기한다.

4. 자료 수집

자료 수집은 참여관찰, 면담, 비디오 촬영, 활동지 수

2) ASA가 주어졌을 때 아동들은 모두 S를 밑변으로 놓는 것을 가장 먼저 하고 그 다음 양끝각을 그렸다. 이것을 일반적인 표기법으로 하면 S-A-A가 될 것이나, SAA 삼각형을 그리는 방법과 구별하기 위해 예외적으로 A-S-A로 표기하였다.

집으로 이루어졌다. 먼저 연구자는 아동들의 탐구 과정을 현장에서 지켜보면서 학생들의 작도 방식이나 추측 등 주목할 만한 사항을 간단히 메모하였다. 면담은 반구조화된 면담 방식으로 이루어졌다. 연구자는 해야 할 질문의 형태와 순서('어떤 요소를 선택하였니?', '어떤 요소들 때문에 삼각형이 서로 달라지는 것 같니?', '하나의 삼각형만 그려질까?', '두 삼각형이 서로 같은지 어떻게 하면 알 수 있을까?', '그 요소들만 측정하면 삼각형이 서로 같은지 알 수 있겠니?)를 미리 구안하여 두었다. 그리고 별도의 면담지를 사용하지 않고, 아동들의 이해 정도와 아동들이 직면하는 어려움에 따라 관련된 질문을 던져 대화를 시작하고, 아동들의 답변에 따라 그와 관련된 다른 질문을 하면서 대화 형식으로 면담을 진행하였다. 아동들의 모든 탐구 과정은 비디오 촬영 후 전사하였으며, 아동들이 작도한 그림을 수집하였다.

5. 자료 분석의 기준

수집한 자료는 다음 <표 Ⅲ-2>와 같이 최소조건의 의미 발견과 삼각형의 합동조건 발견으로 나누어 세부 주제에 해당하는 것으로 분류하였다. 그리고 각 세부주제별로 학생들의 활동의 흐름에서 나타나는 특징을 추출하였다.

<표 Ⅲ-2> 자료 분석의 기준

	최소조건의 의미 발견	삼각형의 합동조건 발견
1	초기관념	탐구맥락
2	작도의 필요성 인식	작도방법의 선호도
3	조건의 불충분성 인식	합동조건의 추측
4	최소조건의 충분성 인식	SAS합동조건 발견
5	최소조건의 편리성 인식	ASA합동조건 발견
6	최소조건의 정확성 인식	SSS합동조건 발견

Ⅳ. 연구결과

아동들이 삼각형의 합동조건을 구성해 가는 과정을 삼각형의 합동조건이 최소조건이라는 것을 이해해가는 과정에 나타난 특징과 각각의 삼각형의 합동조건을 찾아내는 과정에서 나타난 특징으로 나누어 분석한다.

1. 최소조건으로서 삼각형의 합동조건

삼각형의 6요소 중 요소 1개 또는 2개가 같으면 두 삼각형은 일반적으로 합동이 아니다. 그러나 SSS와 같이 특정한 3개의 요소가 같으면 두 삼각형은 합동이다. 삼각형의 합동조건은 합동임을 판단하는데 필요한 가장 적은 요소로 이루어진 일종의 최소조건이다. 이 절에서는 삼각형의 합동조건이 최소조건임을 이해하는 과정에서 아동들이 보인 특성을, 아동들이 탐구 이전에 두 삼각형의 합동을 판단하는데 무엇이 필요하다고 생각하고 있는지, 두 삼각형의 합동 여부를 판단하는데 필요하다고 생각하는 요소의 개수는 어떻게 달라지는지, 삼각형의 합동조건이 지닌 최소조건으로서의 의미를 이해하고 있는지에 초점을 맞추어 알아본다.

(1) 초기 관념

연구에 참여한 6명의 아동들은 두 삼각형이 같은지 다른지 어떻게 알 수 있을까라는 질문에 모두 길이와 각도를 재 보아야 한다고 하였다. 모든 아동이 세 변의 길이와 세 각의 크기(3S3A)를 다 재 보아야 두 개의 삼각형이 똑같은지 다른지 알 수 있다고 하였다. 6개의 요소를 모두 알아야 하는가라는 질문에 대해, 아동들은 4학년에서 배운 삼각형의 내각의 합이 180°라는 사실을 기억하고 각도 하나를 재지 않아도 된다고 하였다(3S2A). 그러나 더 이상 요소의 개수를 줄이지 못하였다. 요소의 개수를 5개보다 적게 줄일 수 있는지 알기 위해서는 작도를 해 보아야 한다. 요소의 개수를 줄여도 단 하나의 삼각형이 그려지는 것을 확인해야 하기 때문이다.

그러나 6명의 아동 누구도 주어진 조건으로 하나의 삼각형이 그려지는지 알아봄으로써 두 삼각형이 합동인지 확인할 수 있다는 생각을 해내지 못했다. 결국 연구자가 이를테면 1개의 요소(s=12cm)가 주어졌을 때 한 변이 12cm인 삼각형들을 그려서 같은 삼각형만 그려지는지 그렇지 않은지 살펴보면 된다와 같은 설명을 해주었다. 아동들은 스스로 작도의 필요성을 생각해 내지는 못했지만, 연구자의 설명을 듣고 난 후 작도를 통해 주어진 조건이 삼각형의 합동조건인지를 알아볼 수 있다는

것을 이해하였다.

(2) 삼각형의 합동 판정에 필요하다고 생각한 요소의 개수

아동들은 요소의 개수를 1개, 2개, 3개로 늘려가며 다음 <표 Ⅳ-1>에 나온 순서로 각 조건이 주어졌을 때 삼각형이 합동이 되는지 탐구하였다(요소가 3개인 경우 중에서 합동조건이 아닌 SSA, SAA, AAA 조건은 제외하고 표기하였다).

<표 Ⅳ-1> 조건 탐구 순서

P1	S→A→AA→SS→SA→SAS→ASA→SSS
P2	S→A→AA→SS→SA→SAS→SSS→ASA
P3	S→A→SA→AA→SS→SAS→ASA→SSS
P4	S→A→AA→SA→SS→SAS→ASA→SSS
P5	S→A→SA→SS→AA→ASA→SSS→SAS
P6	S→A→SA→SS→AA→SSS→ASA→SAS

요소의 개수가 1개에서 2개로, 2개에서 3개로 넘어갈 때는 바로 전 단계에서 삼각형의 합동을 판단할 수 있을 것이라고 추측한 조건에서부터 시작하였다. 이를테면 P4가 SAS 조건을 ASA, SSS 조건보다 먼저 탐구한 것은 바로 전에 SS 조건을 탐구하면서 SAS 조건으로 합동을 판단할 수 있을 것이라고 추측했기 때문이다. 한 가지 예외가 있는데, P6이 SSS 조건을 먼저 탐구한 것은 SA, SS, AA 조건을 탐구하면서 그 어떤 합동조건도 추측하지 못한 채, 요소 3개로 가능한 경우 중 SSS 조건을 먼저 탐구했기 때문이다. 각각의 아동이 <표 Ⅳ-1>의 순서에 따라 탐구해 가면서 각 단계에서 삼각형의 합동을 판단하기 위해 필요하다고 추측한 요소의 개수와 그 조건은 각각 <표 Ⅳ-2>, <표 Ⅳ-3>과 같다. 이를테면 P2는 <표 Ⅳ-1>에서 요소 2개인 경우를 AA → SS → SA의 순으로 탐구하였다. P2가 AA를 탐구하면서 삼각형의 합동을 판단하는데 필요하다고 추측한 요소의 수는 4(AA+2S)이고, SS를 탐구하면서 필요하다고 추측한 요소의 수는 3(SAS)이다.

<표 Ⅳ-2> 삼각형의 합동 판단에 필요하다고 추측한 요소의 수

	초기관념	요소 1개		요소 2개			요소 3개		
P1	5	5	2	5	5	3	3	3	3
P2	5	5	2	4	3	3	3	3	3
P3	5	4	3	3	3	3	3	3	3
P4	5	5	2	3	3	3	3	3	3
P5	5	4	2	4	3	3	3	3	3
P6	5	5	2	4	4	5	3	3	3

<표 Ⅳ-3> 삼각형의 합동 판단에 필요하다고 추측한 요소

	초기관념	요소 1개		요소 2개			요소 3개		
P1	3S2A	S+2S2A	A+A	AA+3S	SS+1S2A	SAS	SAS	ASA	SSS
P2	3S2A	S+2S2A	A+A	AA+2S	SAS	SAS	SAS	SSS	ASA
P3	3S2A	S+2S1A	SAS	ASA	AA+1S	SAS	SAS	ASA	SSS
P4	3S2A	S+2S2A	A+A	ASA	SAS	SAS	SAS	ASA	SSS
P5	3S2A	S+2S1A	A+S	SA+2S	SAS	ASA	ASA	SSS	SAS
P6	3S2A	S+2S2A	A+S	SA+2S	SS+1S1A	AA+3S	SSS	ASA	SAS

요소 1개가 주어졌을 때 아동들은 탐구 초기에는 삼각형의 합동을 확인하려면 4, 5개의 요소가 필요할 것이라고 생각했으나, 후반부에 이르러 2, 3개의 요소면 될 것이라고 추측을 수정하였다. 요소 2개에 대한 탐구 초기에 P1은 요소 2개로도 여러 다른 삼각형이 작도되는 것을 보면서 5개의 요소가 필요할 것이라고 생각하였으나, 탐구 후반부에 요소 3개면 될 것 같다고 추측을 수정하였다.

(3) 최소조건의 이해

탐구를 통해 아동들은 요소가 1개 또는 2개인 것은 합동을 판단하는데 부족하며, 요소가 3개인 경우 중에서 합동조건이 있다는 것을 알게 되었다. 또 합동조건을 발견한 이후에 요소의 개수가 4개 이상인 경우를 탐구하면서, 다음 P6의 사례에서 볼 수 있는 바와 같이, 요소 4개 속에 합동조건에 필요한 요소들이 포함되어 있기 때문에 합동조건으로 환원하여 생각할 수 있다고 생각하였다.

연구자: 변의 길이 3개하고 각도 1개를 알면 그릴 수 있을까?
P6: 그릴 수 있어요.
연구자: 12cm, 10.5cm, 7.8cm, 40°를 알 때, 어떻게 그릴까?
P6: 12cm를 먼저 긋고요. 40°에 맞춰서 10.5cm를 그으면 나머지는 7.8cm 될 것 같은데요.
연구자: 그렇지. 그렇게 하거나 또는 다르게 어떻게 할 수 있지?
P6: 각도 안 쓰고 변 3개로 그리면 돼요.
연구자: 그러면 변의 길이 2개하고 각도 2개를 알면 어떻게 그릴 수 있을까? 12cm, 10.5cm, 40°, 80°를 알 때, 어떻게 그릴래?
P6: 12cm 긋고 40°에 맞춰서 10.5cm를 그으면 위가 그냥 80°가 되잖아요.

탐구활동이 끝난 후 주어진 요소의 개수가 3개, 4개, 5개, 6개일 때 모두 하나의 삼각형 작도된다면 어떤 것을 선택하겠느냐고 하자 아동들은 모두 3개라고 대답했다. 요소 3개를 선택한 이유는 그것이 간단하고, 시간을 줄여주며, 그 이상의 조건은 복잡하고 불필요하기 때문이라고 하였다. 이로 미루어 보건대, 아동들은 최소조건의 편리함을 인식하고 있었다. 그러나 다음 P1과 P4의 사례에서와 같이, 아동들은 요소를 더 많이 알고 그리면 삼각형이 더욱 정확히 그려진다고 생각하는 오류도 동시에 가지고 있는 불안정한 이해 상태를 보였다.

연구자: 5개를 알고 그리거나 6개 다 알고 그리는 것이 3개로 그릴 때와 차이가 있을까?
P1: 더 정확해요.
연구자: 3개로 그릴 때와 6개로 그릴 때 어떤 차이가 있을까?
P4 : 다 쓰면 확실하게 그려질 것 같아요.
연구자: 3개로 그린 것보다 확실할 것 같아?
P4 : 네.

두 삼각형의 합동을 판단할 때, 3개의 요소를 측정하는 것보다 6개의 요소를 측정하는 것이 더 확실하다고 생각하는 것은, 아동들이 최소조건의 정확성을 인식하고 있지 못함을 뜻한다. 4개 이상의 요소로 작도한 것과 3개의 요소로 작도한 것을 비교한 후에야, 아동들은 정확성에서 차이가 없음을 인식하였다.

연구자 : 이건 전에 3개로 그린 거고 이건 4개로 그린 건데, 4개로 그린 삼각형이 더 정확한 것 같아?
P1 : (살펴보더니) 아니요. 똑같아요.
연구자 : 6개로 그리면 어떨까?
(중략)
연구자 : 그러면 3개로 그린 건 덜 정확한 거야?
P1 : 그건 아닌 것 같아요. 정확한 거랑 상관없어요.
연구자 : 조건 3개로 그리나 4개로 그리나 5개로 그리나 6개로 그리나
P1 : 차이 없어요.

이를테면 SAS가 삼각형의 합동조건이라는 것은 이 3개의 요소로 그린 삼각형이 더 많은 요소로 그린 삼각형과 본질상 정확성에서 차이가 없다는 것을 함의한다. 그러나 연구에 참여한 아동들은 SAS와 같은 삼각형의 합동조건을 발견한 다음에도, 3개의 요소로 그린 것보다는 6개의 요소로 그린 것이 더 정확할 것이라는 그릇된 관념을 가지고 있었고, 실제 더 많은 요소로 그린 삼각형과 합동조건에 따라 그린 삼각형을 비교해 본 다음에 이런 잘못된 생각을 수정할 수 있었다.

2. 삼각형의 합동조건 발견

이 절에서는 아동들이 SAS 합동조건, ASA 합동조건, SSS 합동조건을 발견해 가는 과정에서 나타난 특징을 분석한다. 이에 앞서 요소의 개수와 위치를 고려하는 맥락, 요소의 개수가 1개, 2개일 때 삼각형의 합동조건 추측에서 나타난 특징에 대해 논의한다.

(1) 요소의 개수와 위치

요소의 개수만 고려하는 맥락에서는 2S1A 조건과 1S2A 조건에서 서로 다른 삼각형이 작도될 수 있으며, 3S 조건만이 합동조건이 된다. 요소의 개수와 위치를 함께 고려하면 SAS, ASA, SSS, SAA 조건이 합동조건이 된다. 그러므로 SSS, SAS, ASA와 같은 합동조건을 찾기 위해서는 조건의 개수와 위치를 함께 고려해야 한다.

요소 3개가 주어졌을 때의 탐구 초기에 6명의 아동들은 요소의 개수, 곧 변과 각의 개수만 고려하려고 하였다. 이들은 요소가 3개인 경우가 변 3개, 변 2개 각 1개, 변 1개 각 2개, 각 3개의 4가지로 나누어진다고 생각하였다. 이를테면 P3은 다음과 같이 변과 각의 위치가 달라져도 개수가 같으면 같은 경우라고 생각했다.

연구자 : 변의 길이 2개, 각도 1개를 고르는데 12cm, 7.8cm, 60°(SAS)를 골랐잖아. 그럼 12cm, 7.8cm, 40°(SSA)도 따져봐야 할까?
P3 : 아니요.
연구자 : 왜?
P3 : 둘 다 똑같이 변 2개, 각 1개잖아요.

이와 같이 아동들은 요소의 개수가 같아도 변과 각의 위치가 달라졌을 때 서로 다른 경우가 된다는 것을 스스로 인식하지 못했다. 결국 연구자가 변과 각의 개수가 같을 때 각의 위치가 달라지면 어떻게 되는지를 알아보게 하여, 요소의 위치가 중요함을 알게 해야 했다.

(2) 요소가 1, 2개일 때 삼각형의 합동조건 추측

아동들은 주어진 요소의 개수가 하나의 삼각형을 작도하기에 불충분할 때, 임의의 요소를 스스로 선택하여 삼각형을 작도하였다. <표 Ⅳ-4>는 주어진 요소의 개수가 3개보다 적을 때 아동들이 사용한 작도 방법의 유형을 나타낸 것이다.

<표 Ⅳ-4> 주어진 요소의 개수가 3개보다 적을 때 아동들이 사용한 작도방법

	S 조건	A 조건	SS조건	SA조건	AA조건
P1	S-(A)-(S)	A-(S)-(A)	S-(A)-S	S-A-(S)	A-(S)-A
P2	S-(A)-(S)	A-(S)-(A)	S-(A)-S	S-A-(S)	A-(S)-A
P3	S-(A)-(S)	(S)-A-(S)	S-(A)-S	A-S-(A)	A-(S)-A
P4	S-(A)-(S)	A-(S)-(A)	S-(A)-S	S-A-(S)	A-(S)-A
P5	S-(A)-(S)	(S)-A-(S)	S-(A)-S	S-A-(S)	A-(S)-A
P6	S-(A)-(S)	(S)-A-(S)	S-(A)-S	S-A-(S)	A-(S)-A

위의 표를 보면, 아동들은 S-A-S 작도 방법(총 20회)을 A-S-A 작도 방법(총 10회)보다 선호하고 있으며, S-S-S 작도방법은 단 한 번도 등장하지 않았다. 합동조건의 추측은 작도 방법과 밀접한 연관이 있다. <표Ⅳ-5>는 아동들이 각 단계에서 옳게 추측한 합동조건을 나타낸 것이다.

<표 Ⅳ-5> 합동조건의 추측

	조건 1개		조건 2개		
P1					SAS
P2				SAS	SAS
P3		SAS	ASA		SAS
P4			ASA	SAS	SAS
P5				SAS	ASA
P6					

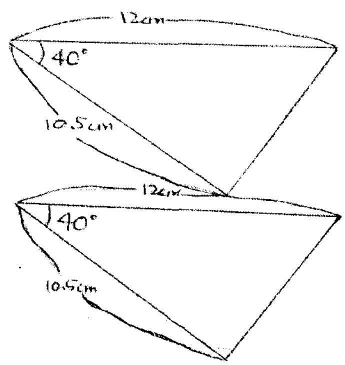
총 11번의 추측 가운데 8번은 SAS 합동조건이며, ASA 합동조건이 그 뒤를 따르고, SSS 합동조건에 대한 추측은 나타나지 않았다. 아동들은 요소가 1개, 2개인 경우에 삼각형을 다르게 만드는 요소를 찾아봄으로써, 적어도 3개의 요소를 측정해야 삼각형의 합동을 판단할 수 있다는 것을 알게 되었으며, 그 과정에서 SAS, ASA 합동조건을 추측하였다.

(3) SAS 합동조건의 발견

2S1A에서 P6을 제외한 5명의 아동들은 SAS 조건을 삼각형의 합동조건으로 발견하였다. 이는 요소가 1개, 2

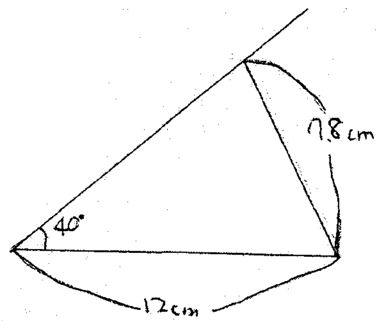
개인 경우를 탐구한 경험이 바탕이 된 것으로, 아동들은 SAS 조건으로 삼각형을 쉽게 작도했다. 다음 P1의 사례에서 볼 수 있듯이, 아동들은 SAS가 합동조건임을 어렵지 않게 발견하였다.

(P1이 12cm, 40°, 10.5cm의 삼각형을 두 개 그린 후)
연구자: 두 삼각형이 같은 것 같아? 다른 것 같아?
P1: 같은 것 같아요.
연구자: 같은지 알려면 어떻게 해야 하지?
P1: 각을 두 개 재고 변을 세 개 다 재야 되요
P1: (나머지 한 변의 길이와 각도 하나를 잰다.) 같아요.
연구자: 그럼, 두 삼각형이 같은지 다른지 알아보려면 변 3개, 각 2개를 다 알아야 할까?
P1: 아니요.
연구자 : 그럼 어떻게만 알면 되겠어?
P1: 변을 2개 재고요. 각은 1개 재야 하는 것 같아요.
연구자: 12cm, 10.5cm, 40°가 같으면 두 삼각형이 같다고 말할 수 있어?
P1: 네.



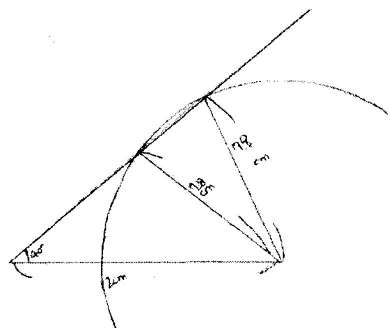
<그림 Ⅳ-1> P1의 SAS 합동삼각형

2S1A에는 SAS와 SSA가 있다. SSA 조건에서는, 주어진 각 A와 마주보는 S가 다른 S보다 짧을 때 서로 다른 2개의 삼각형이 그려질 수 있다. 그런데 아동들은 SSA 조건도 합동조건이 된다고 생각했다. 아동들은 SSA 조건으로 삼각형을 작도하기 위해 자와 각도기를 사용했다. <그림 Ⅳ-2>와 같이 아동들은 대개 먼저 수평으로 변(12cm)을 하나 긋고 그 한쪽 끝점에서 주어진 각(40°)을 그린 다음 나머지 한 변(7.8cm)의 길이를 맞추는 방식으로 작도하였다. 이때 마지막 한 변의 길이(7.8cm)가 맞으면서 아랫변의 한 꼭지점에서 끝나게 맞추는 것이 쉽지 않아 몇 차례 각의 변의 길이를 조정하면서 시행착오를 반복하였다. 그러나 어쨌든 이렇게 해서 결국 처음 삼각형과 같은 삼각형을 작도할 수 있었고, 그래서 SSA도 합동조건이라고 생각했다.



<그림 Ⅳ-2> P1의 SSA 삼각형2

컴퍼스를 사용하면 SSA 조건일 때 주어진 삼각형과 다른 삼각형이 그려질 수 있다는 사실을 확인하기 쉽다 (<그림 Ⅳ-3>). 컴퍼스로 삼각형의 한 변의 길이를 반지름의 길이로 하는 원을 그리면, 한 변의 다른 끝점이 올 수 있는 자리가 모두 표시된다. 아동들은 SSS 조건을 탐구하면서 컴퍼스의 사용 방법을 익히고 난 다음에야, 연구자의 조언에 따라 컴퍼스를 사용하여 다음과 같이 두 개의 삼각형이 작도될 수 있음을 알게 되었다.


<그림 Ⅳ-3> P4의 SSA 삼각형

컴퍼스를 이용하여 위와 같은 그림을 그리고도 그것이 의미하는 바를 잘 이해하지 못한 아동들도 있었다. 같은 조건을 만족하는 서로 다른 두 개의 삼각형이 그림

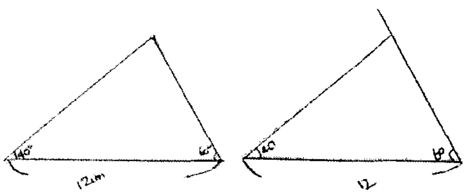
에 있지만, 두 삼각형이 한 그림에 있어서 식별하기 어려웠던 것이다. 그러나 곧 그림에서 두 개의 삼각형을 식별할 수 있게 되었고, 그 결과 SSA 조건은 합동조건이 될 수 없다고 생각하게 되었다.

아동들은 이러한 탐구 과정에서 한 각의 위치가 중요한 차이를 만든다는 사실을 점차 알게 되었고, 두 변이 주어졌을 때 그 사이에 끼인각을 알아야 한다는 사실을 깨달았다. 아동들은 이 각을 처음에는 '변의 왼쪽에 있는 각', '변의 아래에 있는 각'과 같이 부정확하게 표현했으나, 후에 '두 변의 가운데 각(P5)', '사이에 있는 각(P6)', '두 변이 만나는 곳(P3)'과 같은 용어로 지칭하였다.

(4) ASA 합동조건의 발견

1S2A 상황에서 P6을 제외한 5명의 아동들이 ASA를 합동조건으로 선택하였다. 작도에서는 모두 A-S-A 방법을 사용했는데, 이는 이전에 A 조건, SA 조건, AA 조건으로 삼각형을 작도할 때도 사용되었던 방법이다. 다음 P4의 사례에서 볼 수 있는 바와 같이, 이미 SAS 합동조건을 찾은 아동들은 이것을 사용해, ASA 조건으로 작도한 두 삼각형이 서로 같은 하나의 삼각형임을 확인하여 ASA가 합동조건임을 발견하였다.

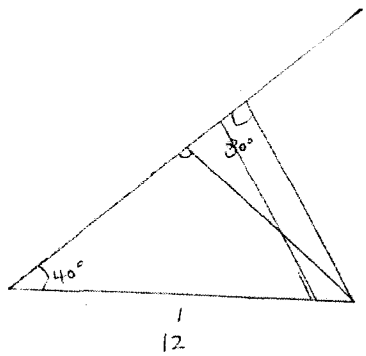
(P4가 40°, 12cm, 60°의 삼각형을 두 개 그린 후)
연구자: 나머지 한 각은 얼마일까?
P4 : 80°요.



<그림 Ⅳ-4> P4의 ASA 합동삼각형

연구자: 두 삼각형이 같을까? 어떻게 하면 알 수 있지?
P4 : 변 하나만 더 재면 될 것 같아요.
연구자: 어느 변?
P4 : 둘 중에 하나요.
P4 : (오른쪽 변을 재 본다.) 똑같이 나와요. 두 삼각형은 같아요.

ASA 합동조건을 발견한 아동들에게 변의 위치는 그대로 두고 두 각의 위치를 달리했을 때 곧 SAA일 때도 합동을 판단할 수 있을지 물어보았다. 아동들은 작도를 통하여 확인하고자 하였으나, S-A-A의 방법으로는 삼각형을 그리기 힘들다. 주어진 변의 끝점에서 한 각을 그리고 나면, 각의 다른 한 변의 길이가 정해져 있지 않으므로 나머지 다른 한 각의 꼭지점의 정확한 위치를 찾기 힘들기 때문이다.



<그림 Ⅳ-5> P5의 SAA 삼각형

이를테면 P5는 처음에 변의 길이를 맞추려고 하다가 각도를 맞추지 못했고 두 번째는 각도를 맞추려고 하다가 변의 길이를 맞추지 못했다. 결국 크기가 40°인 각의 변을 연장하고 나서야 삼각형을 그릴 수 있었다. 그러나 연구자가 꼭 그렇게 그렸어야 했을까를 묻자, 아동들은 삼각형의 내각의 합을 이용하면 굳이 S-A-A 방법으로 그릴 필요가 없음을 깨달았다.

(P5가 SAA 조건-12cm, 40°, 80°-으로 삼각형을 그리고 난 후)
연구자 : 80°를 맞추기 위해서 꼭 위에서 각을 그렸어야 할까?
P5 : 아, 아니요. 오른쪽에서 60°로 그리면 돼요.

(P1이 SSA 조건-12cm, 60°, 80°-으로 삼각형을 그리고 난 후)
연구자 : 꼭 이런 방법(S-A-A)으로 그려야 할까?
P1 : 아니요. 12cm, 40°, 60°로 그려도 돼요.

아동들은 SAA 조건을 ASA 조건으로 바꾸어 작도해

도 된다는 것을 알고, 작도의 편의성을 고려할 때 두 각은 한 변의 양끝각을 선택하는 것이 편리하다는 사실을 깨달았다. 아동들은 이를 '변의 꼭지점에 있는 두 각', '변의 양 옆에 있는 두 각', '한 변 위에 있는 각' 등으로 표현했다.

(P6이 ASA 조건과 SAA 조건으로 삼각형을 그려본 후)
연구자 : 12cm를 골랐을 때 몇 도 몇 도 아는 게 편할까?
P6 : 40°, 60°요.
연구자 : 그럼 7.8cm를 골랐으면?
P6 : 80°, 60°요.
연구자 : 10.5cm를 골랐으면?
P6 : 80°, 40°요.
연구자 : 그럼 한 변을 골랐을 때 알아야 하는 두 각은 어떤 각이라고 말하면 될까?
P6 : 그 변의 끝에 있는 두 각이요.

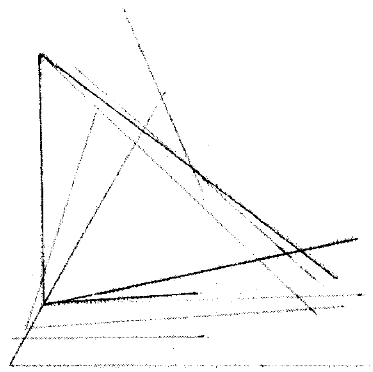
SAS 합동조건 탐구 시에 드러나지 않았던 각 그리기에 관한 문제점이 각의 변의 길이가 주어져 있지 않은 경우(SSA, SAA, ASA, AAA 조건)를 탐구하면서 점차 드러났다. 아동들은 각을 나타낼 때 적당한 지점에 한 점을 찍고 그 점까지만 각의 변을 그었다. SAS 합동조건에서도 아동들은 그렇게 했지만, 이때는 그 점을 지나도록 주어진 변의 길이만큼 선을 그었기 때문에 문제점이 드러나지 않았다. 그러나 ASA 합동조건에서는 각의 변의 길이가 주어져 있지 않다. 각을 표시하기 위해 찍은 점까지만 각의 변을 그으면, 각의 변을 연장해야 하는 경우가 생기는데, 이것을 의외로 어려워하는 아동들이 있었다. 각의 변을 일직선으로 연장하지 못하거나 경우에 따라서는 각의 변을 연장조차 하지 못해 조건에 맞는 삼각형을 작도하지 못하기도 하였다.

(5) SSS 합동조건의 발견

앞에서 언급한 바와 같이, 아동들은 요소가 1개, 2개인 경우를 탐구할 때 SSS 합동조건을 추측하지 못했다. SS 조건에서 컴퍼스가 아닌 자를 사용한 것이 SAS 조건을 추측하기 쉽게 한 대신 SSS 조건을 추측하기 어렵게 만든 것으로 보인다. 아동들은 요소가 3개인 경우를 따져보면서 SSS 조건에 대해서도 살펴보았지만, 세 변의 길이만으로 합동을 판단할 수 있을 것이라고는 생각하지 못했다.

연구자 : 세 변의 길이로만 해 보자. 세 변의 길이만으로 두 삼각형이 같다고 말할 수 있을까?
P1 : 어. 아니요.
연구자 : 왜 안 될 것 같아?
P1 : 각의 크기를 하나도 모르니까요.

SSS 조건이 합동조건인지를 탐구할 때의 어려움은 아동들이 컴퍼스를 사용해야 한다는 발상을 하지 못하는 데에 있다. 아동들은 자만 사용하여 세 변의 길이를 정확히 맞추려 했다. 그러나 한 변의 길이를 긋고 두 번째 변의 길이를 긋는 순간, 그 두 변이 이루는 각이 생기게 된다. 이 때문에 아동들은 여러 번 시행착오를 했고, 삼각형을 완성하지 못한 경우도 있었다. 세 변의 길이가 주어졌을 때 자만 사용하여 삼각형을 작도하려던 시도가 실패로 끝나면서 아동들은 SSS 조건이 합동조건이 아닐 것이라고 생각하였다.



<그림 IV-6> P3의 SSS 삼각형

자를 사용해 두 변이 올 수 있는 특정한 위치만을 찾아냈던 것에서 벗어나, 두 변의 끝점이 올 수 있는 모든 위치를 찾으려면 어떤 도구를 사용하면 좋을지 생각해 보도록 한 연구자의 조언에 P2, P3, P4, P5는 컴퍼스를 떠올렸고, 그 중 P3과 P4는 4학년에서 배운 정삼각형의 작도를 떠올렸다. P1과 P6은 연구자의 조언에도 불구하고 컴퍼스를 생각하지 못해 연구자가 안내해 줄 수밖에 없었다.

정삼각형을 작도하는 방법을 다룬 후에, 아동들은 그 방법을 이용하여 세 변의 길이가 각각 다른 삼각형

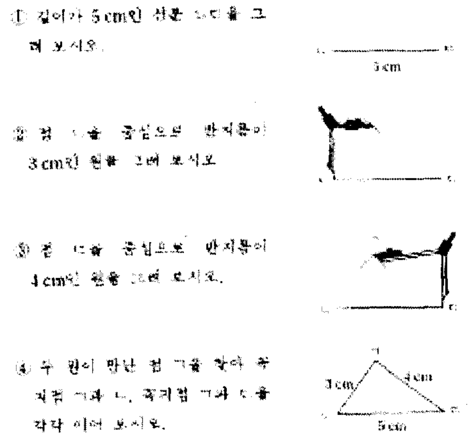
(12cm, 10.5cm, 7.8cm)을 작도하는데 성공하였고, SSS가 합동조건임을 발견하였다. 그러나 P1과 P4를 제외한 네 아동은 삼각형 작도에 성공하고도, 왜 컴퍼스를 사용하여 원을 그렸는지, 두 원의 반지름의 길이를 왜 두 변의 길이와 같게 하였는지, 왜 두 원의 교점에서 선분을 내려 그었는지에 대해서는 여전히 잘 이해하지 못하였다.

3. 논의

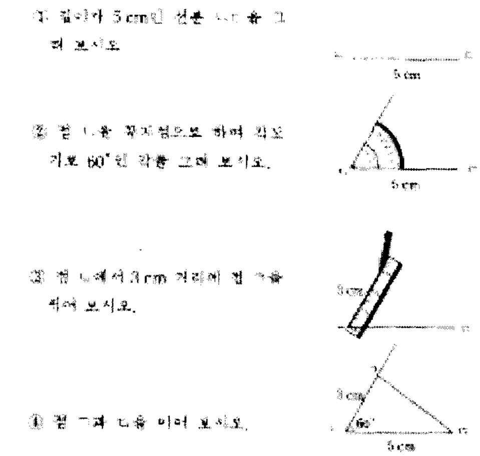
연구에 참여한 아동들은 공통적으로 세 변의 길이와 세 각의 크기(3S3A)를 다 재 보아야 두 개의 삼각형이 똑같은지 다른지 알 수 있다는 초기관념을 가지고 있었다. 아동들에게 두 삼각형이 합동인지 알아보려면 6개의 요소를 모두 측정해 보면 된다는 생각은 매우 자연스러운 것이었다. 삼각형의 세 각의 크기와 세 변의 길이가 같으면 두 삼각형의 넓이가 같고 모양이 같다는 것이 직관적으로 자명한 것이 아님에도 불구하고, 아동들은 세 변의 길이와 세 각의 크기가 같기만 하면 두 삼각형은 합동일 것이라고 생각하고 있었다. 이것은 길이와 각도가 아동들이 삼각형을 비롯하여 이제까지 학습한 여러 도형의 모양과 크기를 결정하는 기본적인 요소였기 때문으로 보인다.

아동들이 초기에 가지고 있던 이와 같은 관념은 주어진 요소의 개수가 1개 또는 2개인 경우를 탐구하면서 급속히 약화되었다. 요소의 개수가 1개에서 2개로, 2개에서 3개로 넘어갈 때는 아동들은 바로 전 단계에서 삼각형의 합동을 판단할 수 있을 것이라고 추측한 조건에서부터 탐구를 시작하였으며, 앞의 <표 Ⅳ-2>에서 볼 수 있는 바와 같이 요소가 2개인 경우의 탐구 후반부에 이르러서는 모든 아동이 3개의 요소만으로도 삼각형의 합동을 판단할 수 있을 것이라고 생각하게 되었고, SAS, ASA와 같은 경우일 때 합동을 판단할 수 있을 것이라는 올바른 추측을 하기에 이르렀다. 주어진 요소의 개수가 3개보다 적은 경우에 대한 탐구, 특히 주어진 요소가 2개인 경우에 대한 탐구는 연구에 참여한 아동들이 지닌 초기관념을 약화시키고 합동조건을 추측하고 발견하게 하는데 유용하였다. 또한 합동조건을 발견한 이후에 요소의 개수가 4개 이상인 경우를 탐구하는 것은 아동들이 삼각형의 합동조건이 지닌 최소조건으로서의 의미를 이해하는데 도움이 되었다. 이 연구의 결과는 초등학교 5학년 학생들이 요소의 개수를 1개부터 늘려가는 탐구를 통해 삼각형의 합동조건을 구성하는 것이 가능함을 시사하는 것으로 해석될 수 있다.

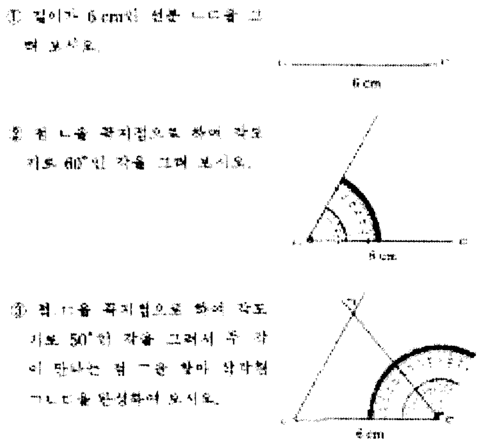
초등학교 교과서에는 다음 <그림 Ⅳ-7>, <그림 Ⅳ-8>, <그림 Ⅳ-9>와 같이 SSS, SAS, ASA 합동조건을 학습하는 활동이 병렬적으로 제시되어 있다(교육인적자원부, 2004a, pp. 46-48.).



<그림 Ⅳ-7> 초등학교 교과서의 활동 1 (SSS)



<그림 Ⅳ-8> 초등학교 교과서의 활동 2 (SAS)



<그림 IV-9> 초등학교 교과서의 활동 3 (ASA)

초등학교 교과서에서 위의 세 활동이 제시된 방식을 보면, SSS, SAS, ASA 각각의 합동조건을 학습하는데 어떤 어려움의 차이가 있을 것을 상정하고 있지 않다. 그런데 이 연구에 참여한 아동들은 세 합동조건 중 어떤 것은 쉽게 추측하거나 발견했지만 어떤 것은 그렇게 하지 못하는 모습을 보였다. 아동들은 요소가 3개보다 적은 경우를 탐구하면서 SAS 합동조건을 가장 쉽게 추측하였고, 뒤이어 ASA 합동조건을 쉽게 추측하였으나, SSS 합동조건은 추측하지 못했다. 요소가 3개인 경우를 탐구하면서 합동조건을 발견할 때에도 SAS 조건을 가장 쉽게 발견하였다. ASA 합동조건의 발견은 SAS만큼은 쉽지 않았다. 각을 나타낼 때 적당한 지점에 한 점을 찍고 그 점까지만 각의 변을 긋는 아동들의 습관은 각의 변의 길이가 주어져 있지 않은 ASA 조건을 탐구하는 것을 어렵게 만들었다. SSS 합동조건의 발견은 다른 두 합동조건의 발견에 비해 매우 어려웠다. 아동들은 요소가 3개인 경우를 따져보면서 SSS 조건에 대해서도 살펴보았지만 SSS가 합동조건이 될 것이라고 생각하지 못했다.

SSS 합동조건의 추측이나 발견이 SAS, ASA 합동조건의 발견에 비해 상대적으로 어려웠던 이유는 아동들의 작도 방법과 관련이 깊다. 일반적으로 수학적인 작도에서 사용하는 자는 눈금 없는 자를 뜻한다. 눈금 없는 자는 직선을 긋는 데 사용되며, 주어진 길이를 바로 옮길 수는 없다. 주어진 길이를 옮기는 데는 컴퍼스의 사용이 절대적이다. 두 개의 나무다리를 줄로 묶어 만든 고대의 컴퍼스는 땅에서 다리를 뗄 때 두 다리 사이의 거리가 유지되지 않는다. 그래서 유클리드는《원론》제 1권 명제 2의 증명에서 눈금 없는 자와 컴퍼스로 주어진 길이를 옮기는 다소 복잡한 절차를 제시하였다(Heath, 1956). 오늘날 아동들이 사용하는 컴퍼스는 땅에서 다리를 떼어도 다리 사이의 거리가 유지되므로, 컴퍼스를 이용하여 주어진 길이를 간단히 옮길 수 있다. 그러나 아동들은 cm 표시가 된 자를 사용했기 때문에, 컴퍼스가 아니라 자를 주어진 길이를 옮기는데 사용했다.

삼각형을 작도할 때에 아동들은 변의 길이나 각의 크기를 이용한다. 이때 성공적으로 삼각형을 작도하기 위해서는 변의 길이나 각의 크기가 주어진 것이 작도와 관련하여 의미하는 바를 명확히 알고 있어야 한다. 각의 크기가 주어진 것은 직선을 그릴 수 있음을, 변의 길이가 주어진 것은 원을 그릴 수 있음을 뜻한다는 것을 분명히 알고 있다면 작도를 통해 세 합동조건을 발견함에 있어서 SSS, SAS, ASA 사이에 어려움의 차이는 없을 것이다. 한 변 S가 주어졌을 때, 삼각형의 세 꼭지점 중 두 꼭지점은 주어진 선분 S의 양 끝점에 의해 결정되므로, 삼각형을 작도하기 위해서는 다른 한 꼭지점의 위치만 정하면 된다. 이 꼭지점의 위치를 정하기 위해서는 이 점을 지나는 두 개의 선을 구하면 된다(Polya, 1981). 자와 컴퍼스를 이용하여 작도하므로 두 선은 원 또는 직선이어야 하고, 여기서 다음의 세 가지 경우가 가능하다: 두 원, 한 원과 한 직선, 두 직선이 바로 그것이다. 두 원으로 세 번째 꼭지점이 정해지는 경우가 SSS이고 한 원과 한 직선으로 정해지는 경우가 SAS이고, 두 직선으로 정해지는 경우가 ASA이다.

아동들은 각의 크기가 직선에 대응한다는 것을 상대적으로 잘 적용하였다. 각의 크기가 주어졌을 때 아동들은 각도기와 자를 이용하여 직선을 그었다. 그러나 변의 길이가 주어졌을 때는 컴퍼스를 이용하여 원을 그리려고 하는 생각을 하기보다는 자를 이용하여 선분을 그으려고 했다(초등학교 교과서에 제시된 SSS, SAS, ASA 합동 삼각형 작도방법은 모두 처음에 선분을 하나 그릴 때 자로 길이를 재서 긋는다. 또 SAS에서 다른 한 변을 그을 때에도 자를 사용한다). 변의 길이나 각의 크기가 의미하는 자취가 모두 선분이나 직선이라고 생각하고 있는

한, 원을 작도하는 도구인 컴퍼스는 별 필요가 없는 도구가 되고 만다. 이와 같은 아동들의 인식은 SSS 합동조건을 발견하는데 결정적인 장애로 작용하였다. 연구에 참여한 아동들은 컴퍼스가 원을 그리는 도구라는 막연한 인식을 가지고 있었을 뿐이었다. 이들은 4학년 때 정삼각형을 작도한 경험이 있음에도 불구하고, SSS의 다른 두 변의 길이를 놓을 때 컴퍼스를 사용해야 한다는 것을 생각해 내거나 이해하기 어려워하였다.

연구에 참여한 아동들이 결과적으로 삼각형의 세 합동조건을 발견하고 이해하였다는 것은 '과연 초등학교 5학년 연령의 아동들이 요소의 개수를 늘려가는 탐구를 통해 삼각형의 합동조건을 발견할 수 있겠는가'라는 문제에 대해 긍정적인 답을 제시하는 것으로 보인다. 그러나 아동들은 삼각형의 합동조건을 발견하는 과정 곳곳에서 여러 가지 장애에 부딪혔고 상당수의 장애를 스스로 극복하지 못하여 교사의 도움을 필요로 하였다는 점 역시 주목할 필요가 있다. 이를테면, 아동들은 측정의 방법에서 작도의 방법으로 전환해야 할 필요성을 스스로 인식하지 못하였다. 또 요소의 개수와 위치를 함께 고려해야 한다는 생각도 스스로 해내지 못했다. 아동들은 요소 3개인 경우가 변 3개, 변 2개 각 1개, 변 1개 각 2개, 각 3개의 4가지 경우로 나누어진다고 생각했고, 그로 인해 SSA와 같은 경우에 대해서 그릇된 판단을 하기도 하였다. 또 앞에서 지적한 바와 같이, 변의 길이에 컴퍼스로 작도한 원이 대응한다는 생각을 하지 못해 SSS가 합동조건이고 SSA가 합동조건이 아님을 이해하는데 어려움을 겪었다. 초등학교 5학년 아동들로 하여금 요소의 개수를 늘려가는 탐구 경험을 통해 삼각형의 합동조건을 발견하게 하고자 할 때, 이들이 이와 같은 어려움에 직면할 수 있음을 염두에 두고 이를 줄여주는 방법을 모색할 필요가 있다.

V. 결어

우리나라 수학과 교육과정에서 삼각형의 합동조건을 처음 다루는 것은 초등학교 5학년에서이다. 우리나라 교과서에서 삼각형의 합동조건을 다루는 방식은 유클리드보다 클레로의 방식에 가깝다. 초등학교 교과서에서 삼각형의 합동조건은 세 변의 길이, 두 변의 길이와 끼인 각, 한 변의 길이와 양끝각이 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 그리는 활동을 통해 도입되며, 주어진 요소의 개수가 3개보다 적거나 많은 경우를 다루지 않는다.

이 연구에서는 초등학교 4학년 과정을 이수한 아동들이 요소의 개수를 1개, 2개, 3개, 4개로 늘려가며 삼각형의 합동조건을 탐구하는 과정을 분석하였다. 그 결과, 주어진 요소의 개수가 3개보다 적은 경우를 탐구하는 것은 최소조건의 의미를 이해하고 합동조건을 추측하게 하는데 유용한 것으로 나타났다. 또한, 아동들이 쉽게 발견하는 합동조건과 그렇지 못한 합동조건이 있었다. 그리고 아동들이 삼각형의 최소조건의 의미를 이해하고 합동조건을 발견하는 것을 가로막는 요인들이 발견되었다.

이 연구로부터 초등학교 5학년에서 삼각형의 합동조건 지도와 관련하여 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다. 초등학교 교과서에서는 SSS, SAS, ASA의 경우에 주어진 삼각형과 같은 삼각형을 하나씩 작도해 보게 한 후 이 조건들이 삼각형의 합동조건이 된다는 것을 제시하고 있으며, 주어진 요소의 개수가 1개 또는 2개인 경우에 대한 탐구는 하지 않고 있다. 그런데 이 연구에서 아동들은 주어진 요소의 개수가 1개 또는 2개인 경우를 탐구하면서 세 변의 길이와 세 각의 크기를 모두 확인해 보아야 한다는 초기의 생각을 버리고, 나아가 SAS, ASA와 같은 합동조건을 추측하고 발견할 수 있었다. 이것은 초등학교 5학년 아동들이 주어진 요소의 개수가 1개 또는 2개인 경우를 유의미하게 탐구하는 것이 가능하고, 아동들이 삼각형의 합동조건을 이해하는데 이와 같은 경험이 도움이 될 수 있음을 시사한다. 현재 초등학교 교과서에서는 SSS, SAS, ASA 각각의 합동조건 학습에 있어 어려움의 수준 차이를 상정하지 않고 있다. 그런데 아동들이 삼각형의 세 합동조건 각각을 이해하는데 겪는 심리적인 어려움에 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. 교사는 삼각형의 세 합동조건과 관련하여 아동들이 경험하는 심리적인 난이도에 차이가 있다는 사실과 그 원인에 대해서 숙지하고 있어야 할 것이다. 아동의 자기주도적이고 능동적인 탐구와 교사의 적절한 도움은 성공적인 수학 학습 지도를 위해 모두 필수불가결하다. 교사가 아동에게 적절한 도움을 제공하기 위해서는 먼저 아동이 탐구 과정에서 어떤 난관에 직면할 수 있는지 자세히 알아야 할 것이다. 이 연구에서 드러난, 아동

이 삼각형의 합동조건을 발견하는 과정에서 부딪힌 여러 가지 장애들은 앞으로 삼각형의 합동조건에 대한 지식을 구성해 가는 아동들의 탐구를 지원하는 방안을 모색하는 연구의 기초가 될 것이다.

참 고 문 헌

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 두산동아.

강정미 (2005). 삼각형의 결정조건 지도에 관한 연구. 서울시립대 교육대학원 석사학위논문.

고상숙 · 정승진 (2001). 그래핑 계산기를 이용한 삼각형의 SsA 합동조건 탐구. 대한수학교육학회 춘계 수학교육학 연구발표대회 논문집, pp.407-422.

교육인적자원부 (2007). 수학 4-가, 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2004a). 수학 5-나, 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2004b). 수학익힘책 5-나, 서울: 천재교육.

권석일 (2006). 중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰. 서울대학교 박사학위논문.

권오남 · 박경미 (1997). 그래픽 계산기를 활용한 수학교육. 청람수학교육 **6**, pp.23-38. 한국교원대학교수학교육연구소.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 고려출판.

김수현 · 최윤상 (2007). 삼각형의 결정과 합동의 분석. 한국학교수학회논문집 **10(3)**, pp.341-351.

김응태 · 박한식 · 우정호 (2003). 수학교육학개론, 서울: 서울대학교출판부.

박교식 (2007). 삼각형 다시보기, 서울: 수학사랑.

박규홍 외 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 두레교육.

박선용 · 권석일 (2004). '삼각형의 결정조건'에 대한 논의의 분석, 수학교육학연구 **14(4)**, pp.435-447.

박윤범 외 (2008). 중학교 수학 7-나. 서울: 대한교과서.

우정호 (2004). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

우정호 (2007). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교출판부.

이영하 · 허민 · 박영훈 · 여태경 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 지학사.

임재훈 (2005). 삼각형의 결정조건과 합동조건에 대한 교수학적 분석, 수학교육학연구 **15(2)**, pp.131-145.

이종우(편) (2008). 기하학의 역사적 배경과 발달, 서울: 경문사.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 금성출판사.

최노성 (2002). 삼각형 결정조건. 수학사랑 **36**, pp.142-143.

황석근 · 이재돈 (2008). 중학교 수학 7-나, 서울: 한서출판사.

Clairaut, A. C. (장혜원 역) (2005). 클레로의 기하학 원론, 서울: 경문사.

Demana F., & Waits B. K. (1987). Problem solving using microcomputers, *The college mathematics journal*, **18**, pp.236-241.

Eggleton, P. J. (2001). Triangles à la fettuccine: A hands-on approach to triangle-congruence theorems, *Mathematics Teacher* **94(7)**, pp.534-547.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. I.* New York: Dover Publications, Inc.

Hirschhorn, D, B. (1990). Why is the SsA triangle congruence theorem not included in textbook?, *Mathematics Teacher* **83**, pp.358-361.

Polya, G.. (1981). *Mathematical discovery.* New York: John Wiley & Sonns, Inc.

Toeplitz, O. (1963). *The Calculus.* Chicago: The University of Chicago Press.

Children's sense-making of triangle congruence conditions

Son, Sohyun
Youngtong Elementary School, Suwon 963-3, Korea
Email: morning1023@empal.com

Yim, Jaehoon
Gyeongin National University of Education, Incheon, Korea
Email: jhyim@ginue.ac.kr

This study investigated how 5th grade students found and understood triangle congruence conditions (SSS, SAS, ASA). In particular, this study focused on children's processes of discovering triangle congruence conditions and the obstacles which they encountered in the process of making sense of these conditions.

Our data indicates that inquiring the cases in which less than three factors of triangle are given is helpful for children to guess triangle congruence conditions and understand the minimal characteristic of these conditions. And the degree of difficulty of discovering each congruence condition is different. Children discovered SAS condition and ASA condition easily, but it was hard for them to discover and understand that SSS was also a triangle congruence condition because they connected the length of a given side with the use of a scaled ruler not a compass.

* ZDM classification : G43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : triangle congruence conditions, SSS condition, SAS condition, ASA condition, geometric construction