韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 08. 제 48권, 제 3호, 213-234.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2009, Vol. 48, No. 3, 213-234.

대학 미적분학 수준별 교육 사례와 수치연산 소프트웨어를 활용한 교육과정 개발 연구

최 은 정 (연세대학교)

I. 서 론

많은 대학들이 다양한 전형방법으로 신입생들을 선발하고 있고 고교과정에서 제7차 교육과정을 이수한 학생들이 대학에 진학함에 따라 학생들의 수학적 기초 지식과 학습능력에 있어서 큰 차이를 보이고 있다. 이러한 상황은 상위권 대학뿐만 아니라 중위권 대학에서도 마찬가지로 일어나고 있다(최경미외, 2007). 결과적으로 다양한 수준의 학생들이 같은 계열 혹은 같은 과에 입학하게 된다.

따라서 이러한 다양한 수학적 배경을 가진 학생들에게 미적분학을 동일하게 가르치는 것은 어렵고 많은 문제를 야기한다. 수학 기초학력이나 수학 학습능력을 고등학교 과정을 충실히 이수하여 별도의 선수학습 없이 대학에서 미분적분학과목이나 처음으로 배우는 수학과목을 수강함에 있어 강의내용이나 학습량에 큰 어려움이 없이 수학할 수 있는 능력이라 할 때, 이 능력이 부족한 학생들에 대한 고려 없이 가르치는 경우 그 학생들을 소외시키게 되고, 반대로 기초학력이 떨어지는 학생들에게 중심을 두고 가르치게 되면 수학학습 능력이 우수하거나 준비된 학생들에게는 흥미를 떨어뜨리고 학습의욕을 저하 시킨다.

이에 많은 대학에서 수준별 분반을 구성하여 수준별 학습을 시도하고 있다. 하지만, 수준별 학습의 이상적인 목표에도 불구하고 최승현·이대현(2005)이 언급한 고등학교 수준별 교육과정에서 발생하고 있는 문제점들이 대학에서도 그대로 드러나고 있다(최은정, 2007).

이러한 상황에서 학생들의 전공과정을 위한 기초 과목으로서 미적분학의 기본지식을 충실히 전달하기 위한 교육과정을 만드는 것은 매우 중요하다(전재복, 2008).

연세대학교(이하 본 대학)에서는 교육과정을 효율적으로 개선하기 위해 2008학년도 1학기에 공학계열 1학년 미적분학과목(공학수학)을 수강하는 학생들을 대상으로 수치계산과 시각화를 활용한 시범교육을 실시하였다. 시범교육에 대한 결과 자료 분석과 학생들에 대한 설문조사를 통해서 도구로서의 컴퓨터 활용이 교육과정을 개선하기 위한 한 가지 대안이 될 수 있음을 확인할 수 있었다. 이 교육에서 컴퓨터의 활용은 조작적인 경험을 통하여 수학적 개념의 이해를 도왔고, 수학적 내용을 직관적으로 추측하고 직관을 실험해 볼 수 있는 도구를 제공하여 주었으며 수학적 사실을 발견할 수 있도록 하였다.

또한, Crawford(1994)(김부윤·이지성, 2008 재인용)은 수학 학습에 instrument로서의 테크놀로지 도입을 지지하며 이전에는 불가능했던 방식으로 수학적 아이디어를 접근하게 하고 테크놀로지가 수학의 인간 활동 부분을 어느 정도 가져간다면, 수학 과제의 인지적 요구의 개혁과 학습의 질의 변화를 가져오게 될 것이며, 테크놀로지가 상호작용적인 학습 환경과 새로운 가능성을 제시할 것이라고 하였는데 이러한 사실을 시범교육을 통하여 확인할 수 있었다.

시범교육에서는 기존의 선행연구에서 많이 사용된 심볼릭 소프트웨어가 아닌 수치연산 소프트웨어로 Matlab을 사용하였다. 그 결과로 컴퓨터의 수치계산과 시각화를 활용한 교육이 대학 입학생들의 학력 편차가 심한 경우에 효율적으로 이용될 수 있음을 발견하였다. 이 연구에서는 먼저 지난 5년간 본 대학에서 실시한 수준별 교육에 대해 살펴보고, 이전의 선행연구들과 본 대학에서 나타난 수준별 교육의 문제점에 대하여 살펴본다. 또한

* 접수일(2009년 4월 20일), 수정일(1차 : 2009년 7월 23일), 게재확정일(2009년 8월 6일)
* ZDM분류 : I15, I16, B40, D30
* MSC2000분류 : 97B40, 94U60, 97U70
* 주제어 : 미적분학, 수준별 교육, 수치계산과 시각화, 콘텐츠

컴퓨터는 학력 편차가 심함에도 불구하고 같은 그룹에서 가르칠 수밖에 없는 상황에서의 효율적인 미적분학 교육 방법과 도구가 될 수 있음을 확인하고, 이를 활용하기 위하여 콘텐츠 개발이 가능한 미적분학 내용을 알아본다. 그리고 콘텐츠 개발과 소프트웨어 활용 시 고려해야 할 유의사항을 제시한다. 대학 과정의 미적분학과 고등학교 과정은 많은 내용을 공유하고 있으므로 이 결과는 고등학교 교육과정까지 무리 없이 적용될 수 있을 것이다.

Ⅱ. 연구배경과 필요성

1. 수준별 교육의 현실과 문제점

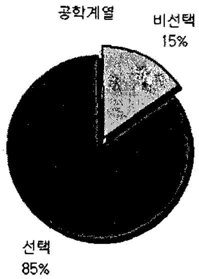
제7차 수학과 교육과정은 국민 공통 기본 교육기간(초1-고1)에 단계형 수준별 교육과정을 운영하고 고2-3학년에는 선택 중심 교육과정을 운영하는 것이 가장 큰 특징이다(교육인적자원부, 2001).

제7차 국민 공통 기본 교육기간의 수학은 기본과정과 보충과정, 심화과정으로 나누어 구성되어 있다. 그러나 학교 환경과 학생들의 학력 수준이 다양하여 운영에 혼란을 겪고 있다. 특히 수준별 수업 운영에 따른 학생들의 수준 구분의 문제, 수준별 교육에 적합한 교과서 개발 문제, 수준별 수업 운영방법의 문제, 수준별 수업에 따른 평가 문제 등이 완전히 해결되지 않은 상태로 운영되고 있는 상황이다(최승현·이대현, 2005).

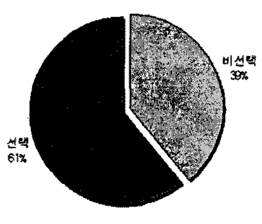
더불어 선택 중심 교육과정의 운영에서 나타나는 많은 문제점이 대학교육에 까지 심각하게 영향을 미치고 있다. 고2, 고3 과정에서 학생들의 적성과 진로를 고려하여 선택적으로 과목을 이수하여야 함에도 불구하고 대학입시 때문에 파행적으로 운영되고 있음을 알 수 있다(조택상·송윤호, 2005). 또한, 수학 능력 시험에서 수리 가형을 택한 학생들과 수리 나형을 택한 학생들 간에 학력 차이가 심하고, 수리 가형을 택했더라도 미분적분학의 선택여부에 따라 많은 차이가 난다. 수리 가형을 선택한 학생과 수리 나형을 선택한 학생들의 학력차이는 대학 미적분학에서 다루는 내용과 고교과정의 연계성을 살펴보면 잘 나타난다. 고교 과정과 비교해 볼 때 대학 미적분학에서 다루는 내용은 많은 부분 고교과정에서도 어느 정도 다루었음을 알 수 있다. 하지만 대학에서의 내용은 학생들이 고교과정을 충실히 이수한 것을 전제로 하여 더욱 심화되고 내용도 훨씬 많아진다. 대학미적분학Ⅰ의 일부 내용을 고교에서 어느 정도 배우지만 이것도 수Ⅰ → 수Ⅱ → 미분적분학으로 이어지는 과정을 모두 이수해야만 가능하다는 것을 알 수 있다.

수리 나형을 선택한 학생들 중에는 대학 미적분학 학습에 필요로 하는 고등학교 과정의 기초 미적분학 내용과 지식을 제대로 습득하지 못한 경우가 적지 않다. 심지어 상위권 대학에서 조차 아주 기초적인 함수의 미분 계산마저 어려움을 느끼는 학생들도 있다(김병학외, 2009).

본 대학 공학계열 입학생(2005년)들 중에서도 수능에서 미적분학 과목을 선택하지 않은 학생들이 많이 있으며 특히 기초반은 미적분학을 선택하지 않은 학생들의 비율이 큰 것을 <그림 1>, <그림 2>에서 알 수 있다.



<그림 1> 공학계열 학생의 수능 미적 선택 비율



<그림 2> 공학계열 기초반의 수능 미적 선택 비율

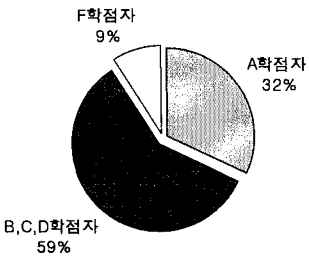
또한 미적분학 과목의 수능 선택의 여부가 대학 미적분학 과목의 이수과정에까지 많은 영향을 끼치는 것을 알 수 있다. 본 대학의 2006학년도의 입학전형 자료를 살펴보면 정시 가군과 정시 나군 학생들은 내신에서 미

적분을 선택한 경우가 90%이상이며, 수능에서는 전체가 미적분을 선택했다. 그만큼 고교 과정에서 미적분학 선수 학습이 충분히 되어 있어서 공학수학 성적도 대체로 이해도가 높은 A 학점과 B 학점의 분포가 높다.

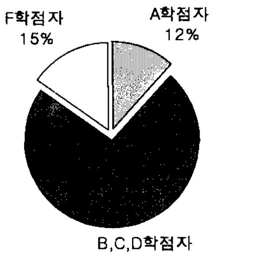
반면, 수시1의 경우에는 내신에서 선택 과목을 선택한 경우가 25%이며, 이 중에서도 미적분을 선택한 학생은 전체 수시1 입학생 중에 극소수였다. 이를 반영하듯이 성적 분포가 C 학점과 D 학점에 많으며, 이는 고교 과정에서 선수 학습이 부족함을 반영한다.

수시2의 경우에는 조기졸업자를 제외하고는 수능에서는 미적분을 선택했으며, 내신 선택과목도 미적분학인 경우가 60%정도였고 D와 F가 30%나 되어 정시모집에 비해 높다.

미적분학 과목을 선택한 학생들 중에 A학점을 취득한 학생의 수가 많았으며 선택하지 않은 학생들 그룹에는 F학점을 받은 학생들의 비율이 상대적으로 많이 있음을 <그림 3>, <그림 4>에서 알 수 있다.



<그림 3> 공학계열 수능 미적 선택 학생들의 학점분포



<그림 4> 공학계열 수능 미적 비선택 학생들의 학점분포

본 대학의 경우, 조기졸업자전형, 실업계고교출신자특별전형, 농어촌학생특별전형, 특기자및특수재능보유자전형, 재외국민과외국인전형과 같이 다양한 방법으로 대학에 입학하게 되는데 이 중 많은 학생들이 고등학교 수학 교육 내용을 충실히 이수하지 못하여 대학 미적분학 과목을 이수함에 있어 많은 어려움을 겪고 있다. 반면에 일반우수자전형으로 입학한 학생들과 대학과목 선이수 과정을 수료한 학생들과 각종 수학경시대회에서 입상할 정도로 심화된 미적분학 내용을 학습하고 입학한 학생들의 경우는 대학의 일반적인 미적분학 수업에 흥미를 못 느끼고 매우 지루해 한다.

이러한 문제를 해결하기 위해 본 대학에서는 2005년도부터 신입생 오리엔테이션 기간 중에 공학계열 신입생들을 대상으로 진단평가를 실시하고 기초반, 일반반, 심화반 3단계로 분반을 편성하여 수준별 교육을 실시해왔다. 2005학년도에는 기초반은 일반반보다 강의와 연습시간을 1시간씩 더 편성하여 수업의 진행속도를 완만하게 하여 일반반과 차별성을 두었다. 수업의 내용은 일반반과 동일하였고 시험과 평가도 일반반과 공동 관리하여 평가하였다. 시행결과 기초반의 경우 진행속도의 완만함 외에는 학습 내용의 수준을 고려하지 않은 결과로 기초반 학생들에게는 여전히 학습함에 어려움이 있었다. 이것은 최종성적 결과로 확인할 수 있는데, 많은 기초반 학생들이 F학점을 받았다. 심화반의 운영은 각 강의자에게 일임되어 운영되었다. 2006학년도에는 전년도의 결과를 바탕으로 변화를 모색하였다. 진단평가를 실시하지 않았고 기초반은 수업내용과 평가를 독립적으로 운영하였다. 기초반의 수강은 학생들의 자율에 맡겨졌지만, 1학기에 기초미적분학 내용을 이수하고 여름 계절학기를 통해 일반반의 내용을 이수하게 하였다. 그러나 진단평가를 실시하지 않은 결과로 기초학력이 부족한 학생들이 일반반에서 수강하게 되어 일반반의 학력 편차가 매우 커져서 수업진행에 있어 어려움이 많았다. 2007학년도에는 다시 진단평가를 실시하여 3단계 분반을 편성하였고 운영방식은 전년도와 동일하였다. 다만 기초반 명칭을 핵심반으로 변경하였다. 이후 2008학년도에도 동일하게 실시하였다. 그러나 총학생회를 비롯한 학생들의 계절학기강제이수의 문제, 수강료문제, 진단평가 결과에 따른

기초반의 강제배정의 문제등과 같은 문제제기로 2009학년도에는 진단평가는 실시하되 자율적으로 판단하여 반을 선택하게 하고 운영은 동일하게 하게 되었다. 하지만 기초반에 편성되어야 하는 학생이 기초반을 기피하여 많은 학생들이 일반반을 수강 신청하였다.

지난 5년간의 본 대학 공학계열 학생들을 대상으로 수준별 학습을 실시한 결과 기초반에 해당되는 많은 학생들이 기초반을 수강하는 것을 기피하였다. 이러한 결과로 수준별 학습의 취지가 많이 사라지고 결국 같은 분반에 수학 학력차이가 큰 학생들을 대상으로 미적분학을 가르치는 문제가 다시 대두 되었다.

이제까지의 연구를 살펴보면 수학편차가 큰 학생들에 대하여 다양한 교육 방안을 제시하고 있다. 이규봉(2005)은 제7차 교육과정 실시로 나타나게 된 대학 미적분학의 수준과 학생들의 선수과목에 대한 지식수준의 괴리를 지적하면서 이를 극복하기 위한 대안으로 미적분학에 앞서는 예비 수학과목을 신설하고 교수가 친근감을 갖고 지루해하지 않는 수업방법을 개발하여 학생들을 가르치도록 제안하였다. 김병무(2003)는 학생들이 수학을 학습함에 있어 수학의 중요성과 필요성을 일깨우는 것의 필요성을 언급하면서 이에 대한 방법으로 수학과 다른 학문과의 관계를 통하여 수학학습에 대한 흥미를 불러 일으켜야 함을 언급했다. 정치봉(2005)은 수학교육과정에서 중요한 요소들로 학생(Learner), 수학내용(Contents), 학습컨텍스트(Contexts), 교수학습방법(Methods) 등을 언급하고 있다. 또한, 이공계 전공교육을 지원하는 대학수학 교육이 성과를 거두기 위한 요소로 다양한 수학 학습 배경과 수준을 지닌 학생과 각 전공 분야에 맞는 교육과정 개발과 구현의 필요성을 언급하였다(전재복, 2008; 정치봉, 2005).

현실적으로 운영상에서 나타나는 수준별 교육의 문제점과 다양한 수학적 배경을 가진 학생들에게 미적분학을 동일하게 가르치는 것의 문제점을 인식하고 해결하기 위하여 적절한 교과과정 개발의 필요성이 제기 된다. 이러한 필요성에 대하여 이전 세대와는 달리 학생들이 컴퓨터를 다루는데 매우 익숙함에 주목하게 되었다. 10년 전 만해도 수학교육에 컴퓨터를 사용하게 되면 컴퓨터를 배우는 것 자체가 커다란 학습 부담으로 작용하여 교육에 어려움이 있었다. 하지만 대부분의 학생이 컴퓨터에 대한 두려움이 없이 능숙하게 사용하게 되어서 배우는 내용이나 가르치는 방법에 컴퓨터를 사용해 변화를 주는 것이 쉬워졌다. 고등학교와 대학에서 나타나는 수준별 학습의 문제와 이에 제기되는 요구 사항들에 대한 한 가지 방안으로 효율적인 미적분학 교육과 도구로서 컴퓨터를 활용한 콘텐츠 개발 방법이 필요하다.

2. 수학교육에서의 수치계산과 시각화의 효과

Freudenthal(1981)은 수학교육 방법론의 측면에서 컴퓨터의 활용을 강조하였는데 “수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 이용할 것인가?”라는 문제를 수학교육의 주요 문제 중의 하나로 설정하였고 수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위한 강력한 도구로서 컴퓨터를 이용할 것을 주장하였다.

이러한 주장은 시범교육과정에서도 확인할 수 있었는데, 학생들은 직접적 조작적인 경험을 통해서 수업내용을 능동적으로 받아들였다. 학생들 중에는 자신이 미적분학에서 배운 내용과 Matlab을 일반물리학 같은 다른 과목의 학습에 활용하였다. 또 직접 계산하기 어려운 여러 수치계산을 컴퓨터를 사용하여 데이터의 표를 만들어 보거나, 그래프를 그려서 결과를 추측해 본 후에 예상한 내용을 확인함으로써 직관적인 사고와 수학적 사실을 발견해 나가는 능동적인 체험을 하게 되어 미적분학 내용에 대한 이해도와 참여도가 높았다.

프로그램의 작성으로 얻는 효과는 적고 고난도의 프로그래밍 능력을 요구하는 어려운 그래픽 같은 것들은 결과물만을 학생들에게 제시하였다. 학생들이 어려움을 느끼는 수학적인 개념이나 공식의 유도 등에서 그래픽이나 동영상을 보여 준 경우 칠판에 그림을 그리거나 전통적으로 수업한 경우와는 이해력에 큰 차이를 보였다. 또 수업진행에 있어서도 더 수월하였다. 특히 3차원 동영상과 같은 역동적인 시각적 효과가 학생들의 호기심을 자극하였고 수업에 몰입하는 효과를 가져왔다.

Kulik, Bangert, Williams(1983)는 초등학교 6학년부터 고등학교 3학년까지의 학생들에게 컴퓨터 중심 수업이 미치는 영향에 관한 연구에서 과목에 대해 긍정적인 태도를 갖게 되었음을 밝혔는데 이러한 결과를 대학의 미적분학 교육에서도 확인할 수 있었다.

개념의 탐구나 발견을 위한 도구로서 컴퓨터의 계산력과 그래픽 기능을 이용하여 슬라이드 수업을 하여 미적분의 본질적 정의에 보다 더 많은 시간을 할애할 수 있었으며 소프트웨어를 통한 학생들의 능동적인 학습이 이루어졌고 학생들이 가장 어려워하는 대학에서의 입실론-델타 방법을 이용한 극한 개념과 같이 추상적인 내용을 그래픽 기능이나 수치계산을 통해 구체적으로 이해할 수 있었다.

Ⅲ. 미적분학 시범교육의 실시

미적분학 교육의 효과를 증진시키기 위하여 수치계산과 시각화를 활용한 교육방법을 Matlab을 사용하여 개발하였다. 여기서 개발된 내용을 기초로 2008학년도 1학기에 시범교육을 실시하였다. 본 대학 공과대학 1학년 과정인 공학수학1 일반반과 심화반 학생들을 대상으로 Matlab 시범반 2개 분반을 개설하여 운영한 것과 관련한 결과를 분석하고 운영 시의 문제점과 그 개선 방향을 살펴본다.

외국 대학에서는 Computer Algebra System(이하 CAS)이나 컴퓨터를 사용한 수치계산, 시각화, 애니메이션의 활용에 대한 필요성이 충분히 인식이 되어 있어서 미적분학을 학습함에 있어 CAS같은 소프트웨어 사용은 보편화 되어 있다.

1970년대부터 CAS는 사용되어 왔고, Reduce, Derive, Masyma 등이 있었다. 현재에는 수학자, 공학자, 과학자들이 많이 사용하는 Mathematica, Maple이 있다. 심볼릭 연산을 하는 위의 두 소프트웨어와는 다르게 수치연산을 주목적으로 하는 Matlab도 인기 있는 소프트웨어이다. 1980년대와 1990년대의 미국 전역에 걸친 미적분학 개혁운동에서 대학의 미적분학 교육과정에 컴퓨터와 CAS를 통합 시키는 문제에 많은 자금이 미국과학재단(NSF)에 의하여 투입되었다. 이에 언급된 효과로는 학생들이 더 이상 모든 계산을 직접 할 필요가 없어서 더 복잡한 문제까지 다루어 볼 수 있다는 점과 강력한 시각화 기능을 사용함으로서 미적분학에 나오는 개념의 이해를 증진시킬 수 있다는 것이다(Schwingendorf & Dubinsky, 1990; Brown, Porta & Uhl, 1991).

2000년대에 들어오면서 1980년대와 1990년대에 일었던 급격한 변화들은 잦아들었고 새로운 테크널로지들이 등장하여 컴퓨터의 사용은 더 편리해지고 이전보다 한층 더 역동적인 내용을 컴퓨터 화면에서 볼 수 있게 되었으며 CAS들의 심볼릭 연산들은 정교해지고 강력해졌다. 컴퓨터를 활용한 미적분학 실습은 전통적인 교육과정을 역동적으로 변화시켰다. 컴퓨터를 활용함으로써 미치는 영향을 전통적인 정의와 증명의 과정(Formal world), 심볼릭 연산의 과정(Symblic world), 지각과 사고실험과정(Embodied world)등 여러 측면에서 분석하고 있다(Tall & Ramos, 2004).

Roddick(2001)는 미적분학을 전통적으로 교육한 그룹과 CAS의 한 종류인 Mathematica를 사용하여 교육한 그룹을 개념의 이해도 측면과 절차적 이해의 측면, 성취도를 비교하였다. 이 연구의 결과는 Mathematica를 사용한 그룹이 문제를 더욱 개념적인 관점에서 접근하고 전통적으로 교육을 받은 그룹은 절차적으로 접근함을 보여 주었다. 또 전통적으로 교육한 그룹보다 미분과 적분 개념을 더 잘 이해하고 있음을 보여주고 있다.

한편, Allen외(1999)는 CAS를 사용함으로서 얻는 이점과 위험성을 함께 언급하고 있다.

컴퓨터의 활용은 대부분의 미적분학 교재를 살펴보아도 알 수 있다. 대부분의 교재가 CAS를 활용한 내용을 포함하고 있고 연습문제도 많이 제시되어 있다. 또, 부교재로 그래픽 자료와 애니메이션을 CD의 형태로 제공하고 있다. 이미 많은 대학에서 전체적으로 CAS와 같은 소프트웨어를 도입하여 가르치기도 하고 강좌를 따로 만들어 수강하도록 하고 있다.

외국의 다수의 대학에서는 강의 시간은 교재로 진도를 나가며 몇 가지 CAS 시스템을 활용한 데모 파일을 작성하여 보여주고, 연습시간에는 CAS 시스템의 기본적인 명령어들을 배우고 문제를 해결하는 시간을 갖고 있다. 이 사실은 각 대학의 미적분학 수업계획서나 강의자료가 있는 인터넷 홈페이지에서 쉽게 확인할 수 있다. 미국 Ohio대학의 수학과 홈페이지를 살펴보면 미적분학 과정 중에 학생들이 혼자서도 충분히 익힐 수 있도록 여러 가지 자료를 제공하고 있다. 미국의 Stanford의 경우에는 미적분학 과목이 수준별로 다양하게 개설되어있는데 특별히 Matlab을 미적분학에 사용한 강좌(강좌이름 : Math 51M)를 따로 개설하고 있다. 이 강좌의 홈페이지

에서 볼 수 있듯이 Math 51이라는 미적분학 과정에 Matlab을 배우고 활용하고 있다.

앞에서 살펴 본 바와 같이 많은 대학에서 계산력과 그래픽 기능을 이용하여 단순한 기교의 반복 숙달은 지양하고 미적분학의 본질적인 개념 교육에 보다 더 많은 시간을 할애하고 있다.

1. 시범반 운영

2008년 공과대학 신입생들을 대상으로 하는 진단고사(Placement Test)실시에 앞서 시범반 유인물을 신입생들에게 배포하여 Matlab 시범반을 자율적으로 수강 신청하도록 유도하였다. 진단고사에서 성적이 낮아 핵심반에 편성된 학생들은 선발대상에서 제외하고 시범반 수강 대상 자격은 신청자가 많은 경우 진단고사 성적에 따라 선발하기로 하였지만 지원율이 낮아서 진단평가에서 핵심반 학생과 점수 차이가 별로 없는 학생도 적지 않았다.

공학수학은 20여 개의 분반으로 공동으로 관리 되어 시험과 성적평가가 이루어져 왔다. 그러나 시범반은 별도로 운영이 되었으며 2개의 분반으로 동일한 강의자에 의해 진행되었다. 평가는 3번의 시험과 4번의 Matlab을 이용한 실습시험을 시행하였고 독립적으로 절대평가를 시행했다. Matlab 반은 추가적으로 Matlab을 학습하여 공학수학 과목의 학습에 활용해야 하므로 학습 부담이 크고 연습시간도 1시간이 아닌 2시간을 실시하였다. 그러므로 절대평가라는 혜택이 요구되었다. 시범반은 이론수업 3시간과 연습 2시간으로 운영되었다. 또한, 연습 2시간 중 1시간은 Matlab 실습 교육을 하였다. 강의 첫 2주는 Matlab소개와 기본교육을 실시하여 학생들이 기본적으로 Matlab연산, M-file 작성, 간단한 프로그래밍이 가능하도록 하였다.

2. 시범반의 강의 형태

인터넷을 통한 외국 대학과 국내 대학의 조사 결과 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 미적분학 강의 운영 방법은 크게 3가지 유형으로 구분할 수 있었다.

첫 번째 유형은 기존의 교과서를 전통적인 방법으로 강의하면서 예제풀이나 연습문제에 소프트웨어를 사용하거나, 컴퓨터를 이용하는 방식으로 기존의 강의에 컴퓨터를 부분적으로 활용하여 수업에 도움을 주는 형태이다. 이 유형은 대부분 소프트웨어의 간단한 명령어만을 익히고, 이를 이용해 문제를 해결하는 것으로서 소프트웨어를 심볼릭 계산기 수준으로만 이용하고 있다.

두 번째 유형은 교과서의 전통적인 내용에서 벗어나 예제 중심으로 강의하면서 학습하게 하는 방법이다. 프로젝트와 유사한 예제에 소프트웨어를 사용하여 강의를 하는 이 유형은 수학의 실제적인 활용 능력을 높일 수 있다. 그러나 많은 학생들을 가르치는 상황에서는 교육 내용이 정형화 되어 있지 않아 강의하는 사람에 따라 강의 내용과 난이도에서 일관성이 결여되는 문제가 발생한다.

세 번째 유형은 강의 전체에 소프트웨어를 이용하여 개념 설명에 활용하여 이해를 심화시키고 또한 직접 계산하기 힘든 복잡한 문제를 소프트웨어를 활용하여 해결하는 방법을 제시하는 교육 방식이다. 이러한 방법은 소프트웨어를 활용하여 개념 설명과 탐구 활동을 한 후 수학적 엄밀한 개념을 설명하면 아주 효과적이다.

시범반의 강의 운영은 가장 효과적인 방법이라고 생각되는 세 번째 방법으로 하였다.

3. Matlab 소개

Matlab은 수치계산과 계산 결과의 시각화를 위한 전문 컴퓨팅 환경으로서 전통적인 의미의 프로그래밍을 사용하지 않고 주어진 문제와 그 해법의 수학적인 의미를 그대로 전달할 수 있는 형태로서 수학 계산과 그래픽을 손쉽게 할 수 있도록 사용자와 대화형식을 취하는 프로그램이다. 다른 여타의 CAS들(Mathematica, Maple, Macsyma)과 비교되는 것은 심볼릭 연산보다는 수치계산을 위한 패키지라는 것이다. Matlab을 도구로 선택한 이유는 몇 가지 고려사항 때문이다. 우선 보통의 CAS들(Mathematica, Maple, Macsyma)은 가파른 학습 곡선을 가져서 초기에 사용능력을 습득하고 익숙해지는데 시간이 걸린다. 반면에 Matlab은 완만한 학습 곡선을 가져서 미적분학 학습에 필요한 내용의 학습이 용이하다.

Mathematica나 Maple같이 심볼릭 연산이 주가 되는 CAS들의 경우 각 프로그램 고유의 명령어 구문

(Syntax)가 있다. 구문(Syntax)을 학생들이 숙달시키는 것이 용이하지 않아 처음 사용하고 배울 때 많은 시간이 걸릴 수 있다. 수치연산이 주가 되는 Matlab의 경우 학습에 있어 걸림돌이 될 수 있는 것이 Matrix개념인데 이것은 수 I 과정에 나오는 내용이므로 학습에 장애가 되지 않는다. 또한 수치계산이 주가 되는 소프트웨어를 사용하는 것이 처음 소프트웨어를 익힐 때 학습 부담이 적다. 하지만 초기 시기가 지난 후의 경우는 소프트웨어마다 사용자의 사용경험과 배경지식에 따라 학습 곡선이 가파를 수도 있고 완만할 수 도 있다. 버지니아 공과대학(Virginia Polytechnic Institute and State University)에서는 Matlab을 신입생들의 문제해결 소프트웨어로 채택하게 된 배경을 설명하면서 부담이 되지 않는 학습곡선(less demanding up-front learning curve)을 이유로 제시하고 있다(Devens, 1999). 실제로 6시간 정도의 수업과 연습으로 프로그래밍까지 학생들이 익힐 수 있었다.

그리고 Mathematica나 Maple을 사용한 교재의 내용에서 볼 수 있듯이 보통의 CAS들(Mathematica, Maple, Macsyma)을 사용하는 경우 개념의 이해보다는 단순한 심볼릭 연산에 집중하게 되는 경향이 있다.

Ⅳ. 수치계산과 시각화를 활용한 콘텐츠

1. 콘텐츠와 소프트웨어 활용 시 고려사항들

중요한 수학 개념의 이해를 돕는 내용으로 구성하는 것이 중요하다. 따라서 간단한 심볼릭 연산 명령어를 사용하여 단순한 계산을 하는 내용은 최소화해야 한다. 예를 들어 적분이나 미분 극한 계산에서 심볼릭 연산 명령어를 사용한 단순 계산은 중요하지 않다.

또한 학습대상을 관찰하고 조작하는 등 능동적으로 수업에 적극 참여할 수 있도록 해야 한다. 예를 들면, 극한의 계산에서 수치적으로 수렴값 부근에서의 값의 표를 만들어 관찰하게 하고 유추하게 한다.

그리고 현실적인 문제에 적용해봄으로써 수학의 실용성을 체험하도록 하는 것이 필요하다. 예로 함수의 단원에서 귀뚜라미가 온도에 따라 우는 횟수를 측정한 것을 Matlab의 fit명령어를 사용하여 함수모델을 만들어 특정 온도에서 우는 횟수를 예측하게 함으로써 수학의 실용성을 체험시킨다.

또 컴퓨터를 사용하여 수학을 더 흥미롭게 바라볼 수 있는 내용으로 구성해야 한다. 실제로 수업에서 공이 바닥에서 튀어 오르는 모델이 구현되는 것만 보여주어도 학생들은 수업에 몰입하게 되고 수업에 흥미를 갖는다.

형태와 모양이 복잡하여 직접 그리기 어렵거나 상상하기 힘든 그래픽적 요소를 포함 시킨다. 이러한 것들은 다변수 미적분학의 경우 유용했다.

프로그래밍 수준이 너무 어렵지 않아야한다. 미적분학 내용이 부차적인 경우가 될 수 있다. 그러므로 데모로 보여줄 것은 강의자가 개발하여 제시하고 콘텐츠는 소프트웨어 활용에 너무 깊이 들어가지 않아야 한다. 예로 입실론 델타 개념을 학습시키기 위해 입실론 델타 게임을 Matlab으로 작성하여 이 게임을 활용하는 것은 의미가 있었지만 학생들이 직접 프로그래밍하는 것은 노력에 비해 효과가 적어 바람직하지 않았다.

따라서 학생들이 프로그래밍하기 어려운 것들은 강의자가 소프트웨어를 활용한 결과물만을 보여 주어서 활용하는 것이 바람직하다. 결과물의 시각화만으로도 다음과 같은 효과를 얻을 수 있다.

수학교육의 시각화는 첫째, 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있다. 둘째, 컴퓨터 그래픽을 사용하면 학생들에게 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있다. 셋째, 교과서의 정적인 시각화 이외에 역동적인 시각화를 사용하여 보다 발전된 학습이 가능하다. 넷째, 지식의 생성배경을 이해시킬 수 있음으로써 훨씬 설득력있는 수업이 가능하다. 다섯째, 시각적인 자료는 전체적이며 경우에 따라서는 많은 내용을 연결된 상태로 담을 수 있고 따라서 보다 의미 있는 형태로 여러 지식을 한 번에 파악하기 쉽다(김정희, 2000).

그리고 컴퓨터의 결과가 틀릴 수도 있다는 것을 예시해야 한다. 가끔 학생들 중에는 수학 내용을 제대로 이해하지 못하고 컴퓨터 시스템이 모든 것을 계산한다고 착각하여 수학 교육이 왜 필요한지 반문하는 경우를 보게 되는데, 컴퓨터 프로그램을 사용했을 때 생길 수 있는 문제점을 예시하여 보여줄 필요성이 있다.

끝으로 학습곡선이 완만한 소프트웨어를 선택하여야 한다. 주로 심볼릭 연산이 주를 이루는 것들은 의미 있

는 학습을 하기 위해서는 학습 곡선이 가파르다. Excel 같은 프로그램도 하나의 대안이 될 수 있다. 참고로, 서울대에서 미적분학 교육에 변화를 모색하며 Maple을 사용하였는데, 몇몇 학생들은 Maple 사용을 부담스러워 하여 Maple을 사용하는 미적분학 내용들은 제외하기를 원했다(강혜정외, 2006).

2. Matlab을 활용한 미적분학 콘텐츠 개발

Matlab을 사용해 효율적으로 미적분학 교육에 활용할 수 있는 내용들을 조사하였고 개발된 내용 중 일부를 부록으로 제시한다.

<표 1> Matlab을 활용하여 교육할 수 있는 미적분학 콘텐츠

주 제	매트랩을 이용할 수 있는 내용
함수의 표현 방법	• 주어진 이산적인 데이터에 적합한 곡선을 찾아내는 내장함수(polyfit)을 사용하여 주어진 데이터 집합을 가장 잘 표현하는 다항식 찾아내기. • 함수값의 표를 만들어 방정식의 해 구하기. • Matlab의 그래프를 이용한 방정식의 해 구하기, 내장함수(roots, fsolve, solve)등으로 해 구하기. • Matlab으로 만든 함수값의 테이블을 이용하여 역함수 그려보기.
함수의 극한	• 극한값 부근에서 함수값의 테이블을 만들어 수치로 극한 이해하기. • 함수의 그래프를 그려서 극한값 추측해 보기. • 내장함수(limit)를 이용하여 극한값 구하기. • 함수와 ϵ이 주어졌을 때 수치계산을 하여 대응되는 δ를 찾아서 $\epsilon-\delta$ 방법 이해하기. • 강의자가 입시론 델타 개념을 게임으로 만들어 게임을 실습시키기.
접 선	• 곡선의 기울기를 수치적으로 근사화하여 구하기. • 곡선과 접선을 함께 그려서 접점 근방에서 확대해 가며 관찰하기.
함수의 미분	• h가 작을 때, $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$임을 이용, 함수미분을 수치계산하고 그래프 그리기. • 도함수의 정의를 사용하여 기초 함수들의 도함수를 구해보기. (Matlab의 limit함수를 사용하기) • 심볼릭 변수로 표현 되는 함수의 미분에 사용되는 Matlab 함수(diff)를 써서 도함수 구하기. • 미분불가능한 함수들을 Matlab으로 그리고 그림창에서 미분 불가능한 점들 근처를 확대해 가며 관찰하기.
함수의 최대값과 최소값	• 극대, 극소점 들을 수치연산(미분)과 그래프를 사용하여 구하기. • 극대, 극소점 들을 기호(symbolic) 연산을 사용하여 구하기. • Matlab 내장함수(fminbnd)로 최대, 최소값 구하기. • 직접 계산하기에는 거의 불가능한 함수의 최대, 최소값을 Matlab을 사용해 구해보기.
로피탈의 정리	• 로피탈의 정리의 아이디어를 그래프를 그려서 이해하기.
Newton's Method	• 주어진 방정식의 해를 Newton's Method로 프로그래밍하여 구하기.
선형 근사화	• Matlab을 사용하여 함수와 접선의 그래프를 그리고 값을 비교해 보기. • Matlab 명령어 errorbar를 사용하여 접선과 함수의 오차를 표시해 보기.
함수의 적분	• 리만합을 이용하여 정적분의 근사값 구하기 • 정의에 따라 심볼릭 연산으로 정적분을 계산하기 • 선형근사화를 통한 적분의 계산 : Euler의 방법 • 내장 심볼릭 명령어를 사용하여 Matlab을 적분 계산기로 사용하기 • Matlab에 내장된 수치적분 함수 사용하기 : Trapezoidal 방법, Simpson 방법
수열과 급수	• 그래프를 그려 수열의 수렴여부와 수렴값을 예측해 보기. • Matlab 명령어 limit를 사용하여 수렴값 구해보기 • 테일러 다항식의 차수가 높아짐에 따라 함수에 가까이 수렴함을 확인하기

V. 교육효과에 대한 분석

시범반 2개반(이하 M1, M2)과 비교 대상을 삼은 반은 일반 공학부 1개반(이하 G), 전기전자공학부 2개반(이하 E1, E2)이다. 5개반은 모두 같은 내용을 배웠고, 강의자 또한 동일한 반이다. E1, E2, G는 모두 일반반에 해당되는 분반들이고, 시범반은 심화반과 일반반에 해당되는 학생들에게 자율적으로 선택하도록 하여 구성되었다.

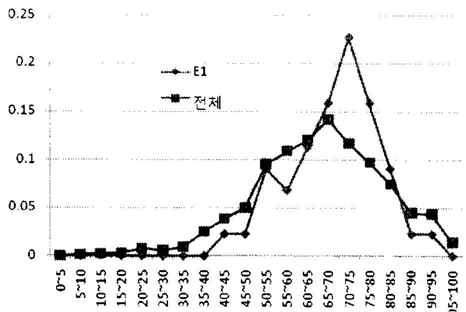
1. 진단평가에 의한 시범반 학생구성 분석

2008학년도 진단평가는 고등학교 수학II 영역과 미분과 적분 영역에서 출제 되었으며, 공간벡터와 미적분학에 해당되는 내용에서 기초 수준에 해당하는 객관식 10문제(각 3점)와 중간 수준에 해당하는 객관식 10문제(각 4점), 심화 수준에 해당하는 주관식 5문제(각 6점)를 100분간 실시하였다.

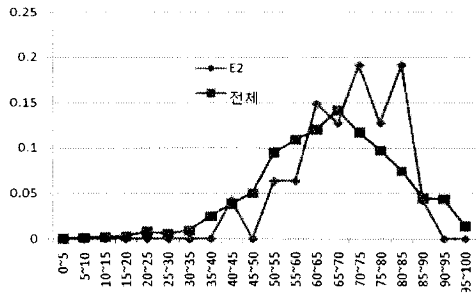
<표 2> 진단평가의 평균과 표준편차

구 분	E1	E2	G	M1	M2	전체 (1408명)
평균	64.3	65.7	60.6	60.5	58.1	61.3
표준편차	10.0	12.0	12.2	14.1	10.0	15.8

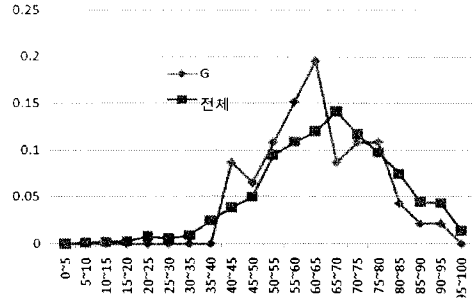
아래의 그래프는 점수대별을 5점 단위로 나누어서 각 범위의 백분율을 그린 것이다. 이공계열 신입생 전체의 백분율 분포와 각 5개 반의 백분율 분포를 쌍으로 비교하였다.



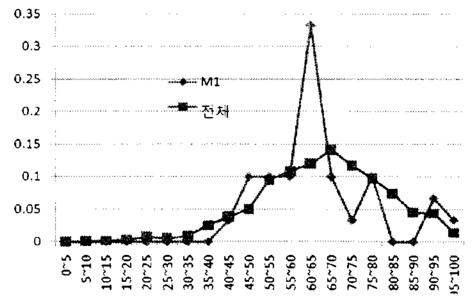
<그림 5> E1반 진단평가 성적분포



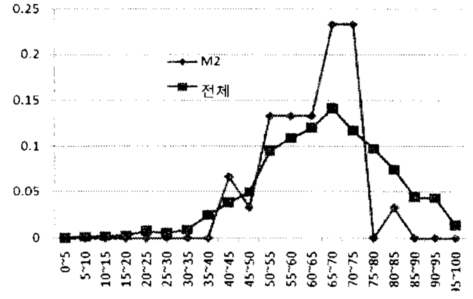
<그림 6> E2반 진단평가 성적분포



<그림 7> G반 진단평가 성적분포



<그림 8> M1반 진단평가 성적분포



<그림 9> M2반 진단평가 성적분포

E1, E2의 학생들의 진단평가 성적을 전체 성적과 비교했을 때 다른 일반반 학생들보다 미적분학을 위한 기초 수학학력이 우수한 학생들로 구성된 반임을 <표 2>, <그림 5>, <그림 6>에서 확인할 수 있다.

시범교육을 실시하는 동안 시범반 학생들의 수업태도나 학습에 대한 열의, 수업 내용에 대한 관심이 높아서 시범반 학생들의 구성이 E1, E2의 학생들과 비슷하거나 더 우수한 학생들로 구성되어 있을 거라고 여겨졌었다. 그러나 시범교육이 끝나고 결과를 분석하는 과정에서 이 시범반의 학생들이 E1, E2의 학생들보다 뛰어난 학생들이 아니었으며 오히려 일반반 학생들보다 비교적 낮은 성적의 학생들로 구성된 집단이었음을 <그림 8>, <그림 9>에서와 같이 알 수 있었다. 그럼에도 불구하고 설문조사를 분석한 결과를 보면 모든 항목에서 E1, E2의 학생들보다 비슷하거나 높은 수치의 교육효과를 보여줬다.

E1, E2의 학생들은 수학이 많이 필요한 전공에 해당하는 학생들이어서 수학과목에 기본적으로 관심이 많고 열심히 하는 학생들이어서 성적도 우수하였다. 본 대학의 경우 공학수학 과목은 공대 전체 신입생을 통합하여 상대평가 하는데 보통 A학점이 25% 이내로 부여 된다. E2반의 경우 A학점을 부여받은 학생이 46%에 달할 정도로 우수하였다. 그러나 설문조사 결과에서는 모든 항목에서 시범반 학생들에는 미치지 못하는 수치를 보여주었다.

G의 학생들의 진단평가 결과를 보면 시범반 학생들과 유사한 집단임을 <표 2>, <그림 7>, <그림 8>, <그림 9>에서 알 수 있다.

G는 E1, E2와 다른 그룹에 속하여 성적 평가를 하였으며 두 반보다 대략 평균 10점 정도가 낮은 점수를 얻었었다. G반은 시범반과 가장 유사한 집단임에도 불구하고 설문조사 결과 모든 항목에서 시범반과 아주 큰 격차를 나타냈다.

2. 설문에 의한 학습효과 분석

가. 학습동기 설문결과 분석

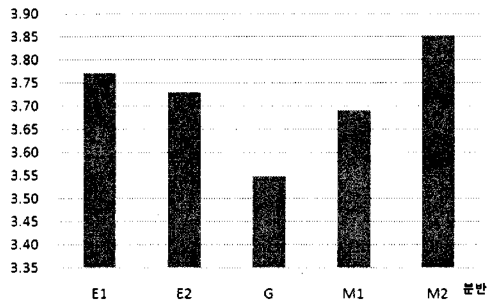
설문은 2008년도 6월에 20분간 5개반(E1, E2, G, M1, M2)의 수강생을 대상으로 수업시간에 실시하였다.

시범교육의 교육효과 측정에 사용된 설문지(학습동기 검사 33문항, 수학 학습태도 검사 28문항)는 학습효과 분석에 쓰이고 있는 것으로 교육개발평가원에서 번안한 것을 적합하게 수정하여 사용하였다. 학습동기 검사는 학습동기의 요소인 주의집중, 관련성, 자신감, 만족감등을 비교 검증하기 위한 것이다(켈러·송상호, 1999).

수학 학습태도 검사는 학생들이 Matlab을 활용한 수업을 받았을 때, 수학 교과에 대한 자아개념(우월감, 자신감), 태도(흥미도, 목적의식, 성취동기), 학습습관(주의집중, 자율학습, 학습적용 기술) 등의 요인별 학습태도에 어떤 차이가 있는지를 검증하기 위한 것이다. 평가 척도의 경우 Likert 척도를 사용하였다. Likert 5점 척도로 구성된 점수로 높을수록 효과가 좋음을 나타낸다.

학습동기는 학업성취와 학업생산성을 결정짓는 주요한 요인으로 여겨진다. 학습동기와 학습 성취도는 높은 상관관계를 가지는 것으로 알려져 있다(Small & Gluck, 1994).

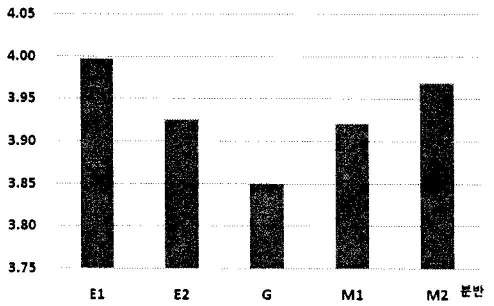
• 주의집중 항목에 관한 설문조사 결과분석



<그림 10> 주의집중 설문조사 결과

이 항목은 학습에 얼마나 주의집중을 하였고, 왜 공부해야 하는가에 관심을 가졌는지를 측정한다. <그림 10>에서 주목할 점은 진단평가 점수가 가장 낮은 시범반 M2가 주의집중 항목에서 가장 높은 점수가 나온 것이다. 이는 Matlab을 활용한 공학수학 학습이 학생들에게 호기심을 유발하여 학습내용에 더욱 집중을 하게 했고 학습내용에 많은 관심을 갖도록 유도했음을 보여준다.

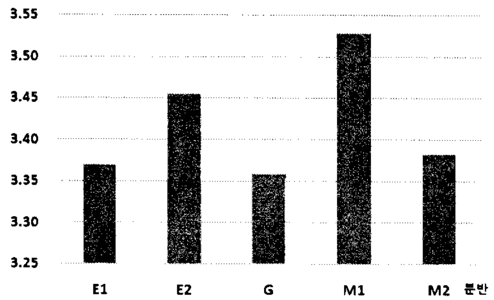
• 관련성 항목에 관한 설문조사 결과분석



<그림 11> 관련성 설문조사 결과

이 항목은 학습목적과 어떻게 관련되는가를 알고 공부를 하였는지를 측정한다. 전기전자공학부인 E1, E2의 학생들은 진단평가 결과에서 알 수 있듯이 수학과목에 대한 학습능력이 우수하고 전공의 특성상 수학과목이 자신들의 전공과목에 매우 중요하다는 것을 이미 인지하고 있다. 따라서 관련성 항목에서 점수가 높게 나온 것은 당연한 결과이다. 그러나 전공이 정해지지 않은 G와 시범반 M1, M2는 진단평가 결과가 유사한 집단이지만 관련성 항목에서 시범반 분반은 E1, E2와 대등한 점수를 보여 주는 반면 G는 다른 반들과 큰 격차를 보여 준다. 이 결과로 볼 때 Matlab을 활용한 학습이 학생들로 하여금 학습목적을 가지고 학습하도록 유도하였음을 알 수 있다.

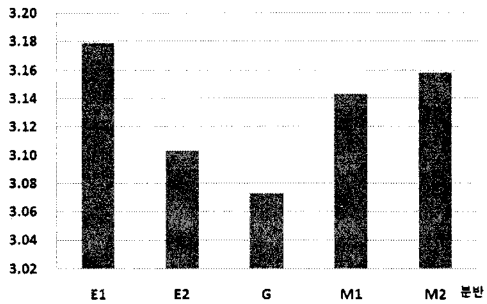
• 자신감 항목에 관한 설문조사 결과분석



<그림 12> 자신감 설문조사 결과

이 항목은 항상 100%의 성공이 보장되지는 않더라도 노력에 따라 성공할 수 있다는 자신감을 가졌는지를 측정한다. 시범반 M1이 높은 점수를 보여 주고 있고, M2도 비슷한 학력 구성분포를 보인 G반 보다 점수가 높다. 이것은 학습 과정에서 공학수학의 새로운 개념을 정확히 이해하였는지를 Matlab을 통하여 단계별로 확인하는 과정이 있었고, 이러한 과정을 통하여 학생들이 자신감을 얻을 수 있었던 것으로 분석된다.

• 만족감 항목에 관한 설문조사 결과분석



<그림 13> 만족감 설문조사 결과

이 항목은 학습자의 노력의 결과가 그의 기대와 일치하고 그 결과에 대하여 만족하고 있는지를 측정한다. 즉, 자신이 노력한 만큼 보상이 되었다고 생각하는가를 측정한다. 진단평가 점수가 유사한 집단인 G와 비교해 볼 때 시범반의 점수가 훨씬 높게 나타났다. 이것은 시범반 M1, M2의 학생들이 관련성이 있는 주제들을 학습하는 동안 전반적으로 긍정적인 만족감을 유발하였다는 것을 알 수 있다.

나. 학습동기와 교과에 대한 학습태도 통계분석

Matlab을 활용한 수업을 받은 실험집단과 그렇지 않은 통제집단 사이의 교과에 대한 학습태도와 학습동기에 대해 t-검정을 실시함으로써 실험집단과 통제집단 사이의 차이를 알아보았다.

통계적 분석에 있어서는 E1, G, M1반을 선택하여 통계적 검정을 하였다. E2반과 M2반은 E1, M1반과 각각 다른 분반이고 다른 조교가 배정되었으며 수업시간이 공휴일과 여러 번 겹쳐서 수업진행에 어려움이 있었다. 따라서 통계의 분석에 영향을 미칠 수 있는 요인을 최소화하여 좀 더 정확한 분석 결과를 얻기 위하여 E1, G, M1반을 통계적 분석의 대상으로 삼았다.

<표 3> M1반과 G반의 학습동기와 교과에 대한 학습태도 분석

구분	실험집단M1		통제집단G		t	p
	평균	표준편차	평균	표준편차		
주의집중	3.6920	0.4173	3.5481	0.4914	1.292	0.101
관련성	3.9206	0.4732	3.8469	0.4716	0.630	0.265
자신감	3.5278	0.3892	3.3579	0.4538	1.643	0.053
만족감	3.3724	0.4103	3.3443	0.4257	0.272	0.393
전체학습동기	3.6558	0.3557	3.5497	0.3656	1.191	0.119
교과에대한자아개념	3.6429	0.5710	3.4744	0.5871	1.177	0.122
교과에대한태도	3.4011	0.4131	3.2130	0.4360	1.796	0.039
교과에대한학습습관	3.1948	0.4240	3.0793	0.4807	1.040	0.151
교과에대한학습태도	3.3488	0.3484	3.1978	0.3979	1.820	0.036

<표 4> M1반과 E1반의 학습동기와 교과에 대한 학습태도 분석

구분	실험집단M1		통제집단E1		t	p
	평균	표준편차	평균	표준편차		
주의집중	3.6920	0.4173	3.7733	0.4679	0.764	0.224
관련성	3.9206	0.4732	3.9974	0.4224	0.697	0.245
자신감	3.5278	0.3892	3.3695	0.3847	-1.682	0.049
만족감	3.3724	0.4103	3.4352	0.4707	0.594	0.277
전체학습동기	3.6558	0.3557	3.6603	0.3396	0.053	0.479
교과에대한자아개념	3.6429	0.5710	3.5000	0.5000	-1.081	0.142
교과에대한태도	3.4011	0.4131	3.4204	0.4040	0.194	0.423
교과에대한학습습관	3.1948	0.4240	3.2093	0.3462	0.151	0.440
교과에대한학습태도	3.3546	0.3781	3.3488	0.3484	0.065	0.474

<표 5> E1반과 G반의 학습동기와 교과에 대한 학습태도 분석

구분	통제집단E1		통제집단G		t	p
	평균	표준편차	평균	표준편차		
주의집중	3.7733	0.4679	3.5481	0.4914	2.120	0.019
관련성	3.9974	0.4224	3.8469	0.4716	1.517	0.067
자신감	3.3695	0.3847	3.3579	0.4538	0.124	0.451
만족감	3.4352	0.4707	3.3443	0.4257	0.918	0.181
전체학습동기	3.6603	0.3396	3.5497	0.3656	1.416	0.080
교과에대한자아개념	3.5000	0.5000	3.4744	0.5871	0.212	0.416
교과에대한태도	3.4204	0.4040	3.2130	0.4360	2.227	0.014
교과에대한학습습관	3.2093	0.3462	3.0793	0.4807	1.393	0.084
교과에대한학습태도	3.3546	0.3781	3.1978	0.3979	1.638	0.053

M1반과 G반의 통계적 분석을 살펴보면, 학습동기와 관련된 모든 항목에서 M1반의 평균이 높게 나왔다. 특히 자신감 항목에서 유의 수준 10%에서는 p=0.053으로서 유의미한 차이가 있는 것을 알 수 있다. 교과에 대한 학습태도와 관련한 항목에서도 M1반의 평균이 높게 나왔다. 특히 교과에 대한 태도 항목은 유의수준 5%에서 p=0.039로서 유의미한 차이가 있는 것을 알 수 있다. 이것은 시범반 학생들이 더 뚜렷한 목적의식을 갖고 수업에 흥미를 가지고 참여하였음을 확인시켜 준다. 그리고 전체적으로 교과에 대한 학습태도에서 유의수준 5%에서 p=0.036을 얻은 결과를 볼 때 Matlab을 활용한 수업이 학생들에게 긍정적인 영향을 주었음을 알 수 있다.

M1반과 E1반의 통계적 분석을 살펴보면, 이 두 분반은 자신감 항목을 제외한 모든 항목에서 비슷한 결과를 보인다. 진단평가에서 이 두 반은 평균 점수가 큰 차이를 보였으나 Matlab을 활용한 M1반의 학생들이 E1반 학생들과 비슷한 학습동기와 학습태도를 갖고 있으며 수학과목에 대한 높은 자신감을 갖고 있다는 것을 알 수 있다.

E1반과 G반의 경우 모든 항목에서 E1반이 높은 평균 점수를 얻었다. E1반이 G반 학생들 보다 진단평가 점수가 훨씬 높았다. 그런데 학습동기와 학습태도 모든 면에서 여전히 큰 차이를 보여주고 있다.

위에서 살펴본 바와 같이 Matlab을 활용한 수업이 학습동기와 교과에 대한 태도에 어느 정도 긍정적인 영향을 주었다는 것을 알 수 있다.

3. $\epsilon-\delta$개념의 이해도 비교

시범반을 제외한 다른 반들은 학사운영이 공동관리로 이루어졌다. 그래서 Matlab의 내용을 수업에 도입하여 발생하는 학습 진도의 차이 때문에 같은 시험문제로 평가하고, 같은 시험범위에 대하여 비슷한 시기에 시험을 볼 수 없었다. 3번에 걸쳐 각각 미분, 적분, 급수 내용에 대하여 개념적 이해도를 측정하기 위한 True/False 퀴즈를 10분간 실시하였는데 고등학교에서 배운 개념과 대부분 중복되어 통계적으로 유의미한 차이를 발견할 수는 없었다. 그러나 Matlab 활용이 학업성취도에 아주 긍정적인 역할을 할 수 있음을 발견할 수 있었다.

예를 들면, 1학년 학생들이 가장 이해하기 어려워하는 ε-δ문제의 이해도를 비교해 보았을 때 나타났다. 일반반의 문제와 다른 주관식 문제였지만 공동 관리인 일반반의 채점을 했던 조교가 같은 기준으로 채점을 하였다. E1, E2, G반에서 본 시험 문제와 난이도는 차이가 있을 수 있다. 그러나 매년 ε-δ문제의 답안작성에서 보이는 유형화된 오류들이 M1, M2반에서는 극히 찾아보기 힘들었다. 1차 시험에서 일반반과 시범반의 시험문제와 점수이다. 이 결과를 보면 시범반 M1, M2가 더 잘 이해하고 있음을 알 수 있다.

일반반 문제(10점)

Using $\epsilon-\delta$ definition of limit,
prove that $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{1}{x}=2$

공학계열 일반반 전체 평균 : 5.13점, 표준편차 : 3.37

Matlab 시범반 문제(각 10점)

(a) $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$.
Prove $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ using the $\epsilon-\delta$ definition

(a) 시범반 M1, M2 평균 : 9.43점, 표준편차 : 1.61

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 3, & x=1\end{cases}$
Prove $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ using the $\epsilon-\delta$ definition

(b) 시범반 M1, M2 평균 : 9.01점, 표준편차 : 2.61

매년 신입생들이 가장 어려워하는 ε-δ개념에서 조차 이러한 큰 차이를 보이고 있으므로 Matlab을 활용한 수업이 학업성취도에 아주 긍정적인 영향을 미쳤음을 충분히 유추할 수 있다고 본다.

Ⅵ. 컴퓨터 활용 교육의 현황과 문제점

시범교육을 실시하는 동안 컴퓨터실에 Symbolic Package가 구비되지 않아 모든 개념을 수치계산의 개념으로 바꾸어서 사용해야 하는 번거로움이 있었다. 하지만, 학생들의 이해에는 이것이 오히려 많은 도움이 되었다. 그러나 미적분학 교육의 효과를 극대화하기 위해서는 Symbolic Package를 사용한 교육도 함께 이루어져야 할 것이다.

또한 조교 교육의 필요성이 제기 된다. 조교들조차 Matlab을 피상적으로만 사용하던 박사과정 학생들이어서 실습시간을 준비하기 위해 매우 많은 준비가 필요하여 학습 부담이 과중하였다. 그 결과 학생들의 질문에 대하여 조교들이 효율적으로 대답할 수 없었다.

강의 시간 수의 확대도 고려해야 한다. 미적분학 강의 내용은 일반반 학생들과 동일하고 Matlab학습과 미적분학에 Matlab을 활용하는 과정까지 학습해야 하므로 강의 시간이 부족하였다. 또한 강의자는 Matlab의 사용 설명과 Matlab을 활용한 미적분학의 개념 이해를 돕는 프레젠테이션을 해야 했으므로 강의를 준비하는 시간이 일반반에 비하여 3-4 배는 들었다. 따라서 강의하는 사람과 조교들의 부담을 완화하는 방안이 필요할 것으로 보인다.

연습시간을 1시간 추가한 것은 신입생의 경우 수업시간에 가르친 Matlab의 내용에 대하여 자율적인 실습을 기대하기 어려워서 실습을 강제하기 위하여 이루어졌다. 실습은 학생들이 수업시간에 배운 내용을 컴퓨터상에서 실행해 보는 것이 주를 이루었고 조교는 보조자로 활용하였다. 이것이 Matlab을 다루는 능력에는 긍정적인 영향을 주었다고 확신한다. 하지만 이러한 Matlab 실습을 위한 연습시간의 추가가 학습부담이 되어 부정적으로 작용했을 수도 있으므로 연습시간의 1시간 추가가 학업성취도나 학습동기에 영향을 미쳤는지는 차후의 연구를 통하여 확인해 볼 필요가 있다.

일시에 모든 수강생들을 대상으로 대규모로 변화를 모색하기 보다는 3-4개반과 같은 소규모로 학생들이 수강하게 하여 CAS를 이용한 학습여건을 넓혀가는 것이 바람직하다고 본다. 일시에 대규모로 시작할 경우 실습공간의 문제와 강사와 조교 교육의 문제가 커다란 압력으로 작용하게 된다. 또한 고가인 컴퓨터 소프트웨어 패키지를 구입하는 것은 매우 큰 부담이 된다. Matlab과 비슷한 환경과 유사한 많은 기능을 공유하면서도 무료 공개 소프트웨어인 Octave같은 것을 사용하는 것도 좋을 것이다.

CAS를 활용하기 위한 실습공간과 인력이 부족할 경우 나타날 수 있는 현실적인 문제점이 강혜정외(2006)에 잘 나타나 있다. 학생들이 충분한 CAS사용 교육을 받지 못해 CAS로 쓰인 Maple의 사용을 부담스러워함을 지적하고 있다. 또, Maple에 대한 교육은 원활한 실습 진행을 위한 전제 조건임을 지적하면서 조교들이 Maple 사용에 익숙하지 않아 학습에 있어 보조 인력으로 활용이 불가능하였으며 이러한 결과로 Maple은 흥미롭지도 않고 유용하지도 않다고 생각한 학생이 많았고 오히려 제외하기를 바란 학생이 많았음을 언급하고 있다.

Ⅶ. 결론 및 제언

수치와 통계가 모든 것을 말해주지 않으므로 시범반 수업에서 얻은 개인적이고 비공식적인 경험을 언급하는 것이 적절하다고 본다. 비교대상이 되는 반에 비하여 시범반이 더 흥미를 가지고 수업에 임했고, 훨씬 적극적이었다. 주의집중 면에서는 비교를 할 수 없을 정도였다. 통계적 분석을 위해 진단평가 성적을 보기 전에는 시범반 학생들이 매우 뛰어난 학생들로 구성되었다고 생각할 정도였다. 이러한 결과는 수동적으로 수업을 듣기만 하지 않고 자신이 배운 내용을 컴퓨터를 활용해 실험해보고 학습하는 과정에서 나온다고 생각한다. 교과 내용을 자기 주도하에 통제하고 학습할 수 있는 기회를 제공하는 것이 수학에 대한 기초학력이 떨어지는 학생들에게는 자신감을 주고, 우수한 학생들에게는 수업을 흥미롭게 만들 수 있다는 사실을 확인하는 계기가 되었다.

미적분학의 경우 많은 교과내용이 고등학교와 공통되며 근본적인 개념 교육은 고등학교 내용과 큰 차이가 없다. 따라서 고등학교 미적분학 수업에 수치연산 소프트웨어를 활용하여 교과과정에 긍정적인 변화를 줄 수 있을 것이라 생각된다. 제7차 교육과정에서는 문제를

푸는 능력보다는 수학적 기초지식과 창의적인 문제해결력을 기르는데 중점을 두고 있다. 단순히 공식을 암기하여 푸는 단순 계산보다는 개념과 개념을 연결한 원리를 파악하고 여기에서 얻어진 사고를 통해 실생활의 문제 해결력을 높이고자 한다. Matlab을 활용한 시범교육의 결과가 이러한 목표에도 부합됨을 보여주었고 또 고등학교 교육과정에서 나타나는 학력편차가 심한 경우에도 적합하게 응용될 수 있을 것이다.

2008학년도 1학기에 실시하여 운영한 미적분학 시범교육과 관련한 결과를 분석하고 운영 시의 문제점과 그 개선 방향을 살펴보았다.

다양한 수학적 배경을 가진 학생들에게 미적분학을 동일하게 가르치는 문제에 대한 개선책을 마련하고 미적분학 교육의 효과를 증진시키기 위하여 도구로서 컴퓨터를 활용하였다. 또한 구체적으로 소프트웨어 패키지인 Matlab을 사용하여 미적분학 교육에 활용 가능한 교과내용을 마련하였다.

콘텐츠 개발과 관련해서 개발 시 고려해야 할 점들을 살펴보았고 단편적으로 한 예를 다루지 않고 미적분학의 내용에서 효율적으로 교수할 수 있는 내용과 개념들을 조사하여 보았다.

시범교육 효과에 대한 분석을 통하여 학습에 있어서 중요한 요소인 주의집중, 관련성, 자신감, 만족감에 긍정적인 도움이 된 것을 확인할 수 있었다.

이 연구에서는 Matlab을 사용하였는데 앞으로 Matlab과 유사하고 성능도 우수한 공개 소프트웨어 Octave나 상용이지만 Excel과 같은 구하기 쉽고 사용이 용이한 소프트웨어를 사용한 콘텐츠의 개발이 요구된다. 일반적으로 쉽게 구할 수 있는 스프레드쉬트 프로그램인 Excel을 사용하여 콘텐츠화 할 수 있는 모든 것을 담은 책은 아직 없는 것으로 보인다. Octave나 Excel로 이러한 교재를 개발한다면 고등학교 과정에서의 활용이 좀 더 용이할 것으로 생각된다. Octave의 경우는 사용 환경 등이 Matlab과 유사하므로 이 연구에서의 내용이 그대로 적용될 수 있을 것이다.

학생들이 직접 프로그램을 작성하기에는 너무 부담스럽거나 학생들이 프로그램을 작성하는 것보다는 결과물을 보여주는 것이 더 중요한 내용들이 있다. 이러한 경우 프로그램이나 결과물들은 데모와 같은 형태로 데이터베이스화하여 누구나 사용할 수 있도록 하는 노력이 필요할 것으로 보인다. 한 예로 Mathematica를 사용하여 Wolfram Research사에서는 많은 미적분학에 나오는 내용을 데이터베이스화하여 무료로 제공하고 이것을 학습에 사용할 수 있도록 하고 있다. 뉴톤의 방법, 리만합, 회전체 부피 등의 경우에서 단지 시각적으로 계산 방법을 알려주는 것만으로도 아주 효과적이다.

이 연구에서는 시범교육을 대학에서만 실시하였는데 고등학교 교육에서는 어떤 효과와 문제점이 있는 지를 확인하기 위한 고등학교에서의 시범교육 사례가 있어야 할 것으로 보인다.

도구로서 컴퓨터를 활용하여 효과적으로 교수할 수 있기 위해서는 컴퓨터 교육 환경의 문제와 교강사의 교육 문제의 해결, 더불어 이에 적합한 교재 개발이 있어야 할 것이다.

끝으로, 수능에서 미적분학 과목을 선택하지 않은 공학계열 학생들 그룹 중 12%가 A학점을 취득하였다(<그림 4>). 이 그룹의 63%는 일반우수자전형, 21%는 조기졸업자전형, 16%는 재외국민과외국인전형과 사회기여자전형으로 입학한 학생들이다. 입학전형 자료를 살펴보면 이들 중 90%의 학생들이 고등학교에서 조차 미적분학을 배우지 않았다. 그럼에도 불구하고 A학점을 취득한 것은 적은 인원이지만 주목할 만한 사실이다. 따라서 어떠한 요인이 이러한 결과를 가져 왔는지 앞으로 연구해 볼 필요가 있다.

참 고 문 헌

강혜정 · 김도한 · 서승현 · 안홍주 · 최광석 (2006). '생명과학을 위한 수학' 강의 분석 및 개선 방안에 대한 소고, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 20(4), pp.503-521.

교육인적자원부 (2001). 고등학교 교육과정 해설, 서울: 대한 교과서 주식회사.

김광환 · 김병학 · 김경석 · 박은아 (2009). 대학수학교육의 현황과 7차교육과정세대의 효율적인 수학교육방안, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 23(2), pp.255-277.

김병무 (2003). 대학수학과 다른 과목과의 관계를 통한

수학의 중요성 알리기, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 15, pp.235-242.

김부윤 · 이지성 (2008). Instrument로서의 테크놀로지와 수학 학습 패러다임의 변화, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 47(3), pp.261-271.

김정희 (2000). 그래핑 계산기를 활용한 수학개념 연계 지도의 실제, 부경대학교 교육학석사학위논문.

문창현 · 조용욱 (2002). 컴퓨터를 활용한 교수-학습 방안에 관한 연구(II), 신라대학교 자연과학연구소 논문집, 10.

이규봉 (2005). 대학에서 수학교육의 현황과 문제점, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 19(4), pp.787-792.

전재복 (2008). 바람직한 대학기초수학 교육과정 운영방안-공학기초수학을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 22(4), pp.399-416.

정치봉 (2005). 이공계위기, 산학협력, 직무능력표준 및 대학수학교육학, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 19(4), pp.649-670.

조택상 · 송윤호 (2005). 학교 수학교육의 현황과 문제점, 수학교육논총, 23.

최경미 · 장인식 · 정보현 · 정순모 · 양우석 · 조규남 (2007). 중위권 대학 신입생의 수학적 배경과 대학수학 성취도 사이의 관계, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 46(1), pp.53-67.

최승현 · 이대현 (2005). 수학과 단계형 수준별 교육과정 운영 실태 분석 및 개선 방안 탐색, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 44(3), pp.325-336.

최은정 (2007). 2007년 1학기 학부대학 워크샵 발표 자료, 연세대학교 학부대학.

켈러 · 송상호 (1999). 매력적인 수업설계, 서울: 교육과학사.

Allen, G. D., Herod, J., Holmes, M., Ervin, V., Lopez, R. J., Marlin, J., Meade, D., & Sanches, D. (1999). Strategies and guidelines for using a computer algebra system in the classroom. *International Journal of Engineering Education*, 15(6), pp.411-416.

Brown, D., Porta, H. A., & Uhl, J. J. (1991). Calculus and Mathematica: A laboratory course for learning by doing. In L. C. Leinbach (Ed.), *The laboratory approach to teaching calculus* (pp.99-110). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Crawford, K. (1994). The Context of Cognition : The Challenge of Technology. In P. Emest(Ed.), *Constructing Mathematical Knowledge : Epistemology and Mathematics Education* (pp. 92-106). London: The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of mathematical education, *Educational studies in mathematics*, 12(2), pp.133-150.

Jensen, R. J., & Williams, B. S. (1993). *Research Ideas for the Classroom/Middle Grades Mathematics* (pp.225-244). New York: Macmillan Publishing.

Kulik, J. A., Bangert, R. L., & Williams, G. W. (1983). Effects of computer-based teaching on secondary school students, *Journal of Educational Psychology*, 75, pp.19-26.

Roddick, Cheryl D. (2001). Differences in Learning Outcomes : Calculus & Mathematica vs. Traditional Calculus, *PRIMUS*, 11(2), pp.161-184.

Schwingendorf, K. E., & Dubinsky, E. (1990). Purdue University: Calculus, concepts, and computers: Innovations in learning. In T. W. Tucker (Ed.), *Priming the calculus pump: Innovations and resources* (pp.175-198). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Small, R. V., & Gluck, M. (1994). The relationship of motivational conditions to effective instructional attributes: A magnitude scaling approach, *Educational Technology*, 34(8), pp.33-39.

Tall, D. O., & Ramos, J. P. M. (2004). Reflecting on Post-Calculus-Reform. Topic Group TSG12, ICME-10.

A case study on differentiated curriculum for the university calculus and the curriculum development using a numerical software

Choi, Eun Jeong

University College, Yonsei University, 120-749 Seoul Korea

E-mail: eunjchoi@yonsei.ac.kr

College students have a diverse educational background with the recent multiplicity in university admissions standards and procedures. As a result, their mathematical preparation and performance varies widely. Teaching calculus to such a diverse student group is a demanding task.

Differentiated curriculum has been conducted for the university calculus course in Yonsei university for the past five years. A case study on the differentiated curriculum in Yonsei university is presented for the curriculum improvement. With its ideal purpose, the differentiated curriculum has created issues and problems in practice. As an alternative to the ideal differentiated curriculum, this study shows that a computer-based approach using a numerical software could give aids to overcoming the difficulty of inadequately prepared students in the learning process while mathematically sophisticated students could keep interested in the course. This study also presents the useful topics in calculus that can be implemented for computer-based calculus education and provides guidelines for the effective usage.

* ZDM Classification : I15, I16, B40, D30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B40, 94U60, 97U70
* Key Words : Calculus, Contents, Matlab, CAS, Differentiated Mathematics Curriculum

<부록1> 실제로 구현한 내용의 예시

예시1 : 함수의 활용

과학 분야 등 실제 상황에서 발생하는 많은 함수 들은 대부분 실험 데이터에 의해서 나타내어진다. 다음 표는 어떤 귀뚜라미의 온도에 따라 우는 소리의 횟수를 기록한 것이다. 아래의 물음에 답하시오.

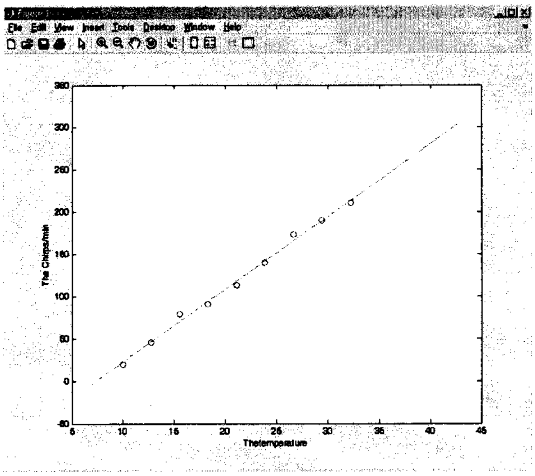
℃	울음소리(횟수)/분
10	20
12.8	46
15.6	79
18.3	91
21.1	113
23.9	140
26.7	173
29.4	190
32.2	211

1. Matlab을 이용해 위의 표를 그래프로 나타내시오.
2. Matlab 함수 fit를 이용하여 위의 표를 잘 표현할 수 있는 연속함수를 찾으시오. fit 함수를 이용하여 위의 표를 잘 표현할 수 있는 1차, 2차, 3차 함수를 각각 찾으시오. 어떤 다항함수가 위의 표를 가장 잘 표현하는 함수인가?
3. 찾은 함수로 온도가 38도 일 때 몇 번이나 울음소리를 낼지 예측해보시오. (즉, 함수값은?)

스크립트 예시

```
clear
x = [10 12.8 15.6 18.3 21.1 23.9 26.7 29.4 32.2];
y = [20 46 79 91 113 140 173 190 211];
plot(x,y,'o')
a = polyfit(x,y,1);
x_fit = 7:1:43;
y_fit = polyval(a,x_fit);
plot(x,y,'o',x_fit,y_fit);
xlabel('Thetemperature'),ylabel('The Chirps/min');
TheChirps38 = polyval(a,38)
```

결과그래프



예시2 : 극한의 계산

Matlab을 사용하면 숫자와 수식 계산을 쉽게 할 수 있다. 이러한 장점을 활용하여 함수의 값을 한 점 근처의 많은 점에서 계산해 봄으로써 극한의 개념을 이해해 본다. 함수 $f(x)$에 대해 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$를 구해보자.

1. a에 가까워지는 수열 $a+0.3, a+(0.3)^2, a+(0.3)^3, \cdots, a+(0.3)^n, \cdots$에 대한 함수값의 표를 만들어 본다.

함수 $f(x)=\frac{12(\sqrt[3]{x+8}-2)}{x}$에 대해 x가 0으로 접근할 때 극한 값을 구해보자.

스크립트 예시

```
n = 1:10;
x = 0.3.^n;
fx = 12*((x+8).^(1/3) - 2)./x;
disp('     x               fx')
format long, disp([x; fx]')
```

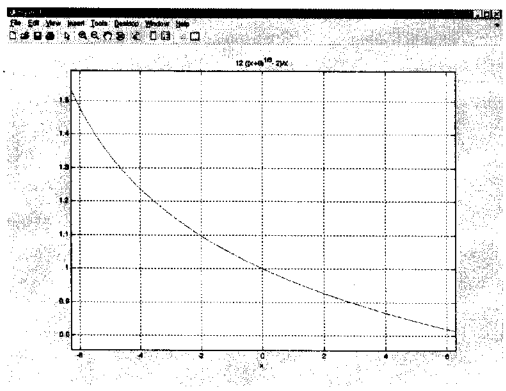
계산 결과 표

x	fx
0.30000000000000	0.98775408021828
0.09000000000000	0.99627326315635
0.02700000000000	0.99887710464053
0.00810000000000	0.99966268971591
0.00243000000000	0.99989876708327
0.00072900000000	0.99996962653948
0.00021870000000	0.99999088762047
0.00006561000000	0.99999726623604
0.00001968300000	0.99999917980636
0.00000590490000	0.99999975423664

2. 다음과 같이 명령어 창에 입력하여 그래프를 그려본다.

```
>> ezplot('12*((x+8)^(1/3)-
2)/x'),grid
```

결과 그래프



위의 그래프에서 0의 근처를 살펴보면 극한값이 1이 될 것이라 유추해 볼 수 있다.

3. 내장함수 limit를 사용한 극한값 구하기

```
>> syms t
>> limit( 12*((t+8)^(1/3) - 2)/t,0)
ans =
1/2*8^(1/3)
>> double(ans)
ans =
    1
```

예시3 : 도함수의 계산

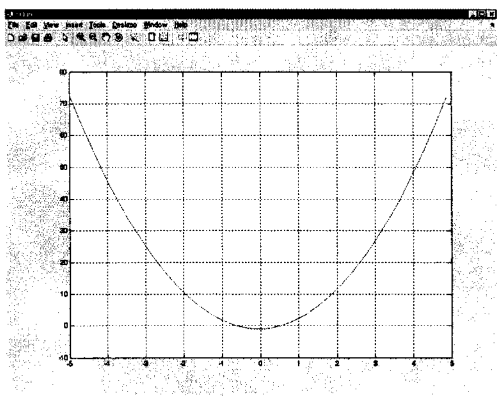
함수의 도함수를 다음과 같이 구하시오.

1. h가 작을 때, $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$가 됨을 이용하여 함수의 미분을 수치적으로 계산하고 그리시오.

스크립트 예시

```
clear
h=.1;
x = -5 : h : 5;
f = x.^3 -x +1;
fprime = diff(f)/h;
plot(x(1:end-1), fprime),grid
```

결과 그래프



2. 도함수의 정의를 사용하여 구하시오.(Matlab의 limit함수를 사용하시오.)

스크립트 예시

```
clear
syms x h;
f = x^3 -x +1;
fxh = subs(f,x,x+h);
quotient = (fxh-f)/h;
fprime = limit(quotient,h,0)
```

실행결과

```
ans =
3*x^2-1
>>
```

3. 함수의 미분에 사용되는 Matlab 함수를 써서 도함수를 구하시오.

스크립트 예시

```
clear
syms x;
f = x^3 -x +1;
fprime = diff(f,x)
```

실행결과

```
ans =
3*x^2-1
```

예시4 : 적분의 계산

Matlab을 사용한 수치계산을 통하여 리만합의 개념에 대하여 이해한다.

1. 리만합 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$에서 왼쪽 끝점을 사용한 합 L_n을 구하는 Matlab 함수를 작성하시오.

스크립트 예시

```
function lftSum = leftsum(fun,a, b, n)
h = (b-a)/n;
x = a : h : b-h;
y = feval(fun, x);
lftSum = h*sum(y);
```

위 스크립트 예시에서 fun은 함수를 문자열로 표현해서 입력하여야 한다.

2. 잘 알고 있는 $\int_0^1 x^3 dx = 0.25$ 와 같이 값을 알고 있는 정적분 계산을 사용하여 위의 함수에서 n을 증가 시킬수록 참값에 가까워짐을 확인하시오. 오차가 0.01이내에 있기 위해서 n의 값을 얼마 이상으로 하여야 하는지 계산하시오.

스크립트 예시

```
function y = f(x)
y = x.^3;
```

실행결과

```
>> leftsum('f', 0,1, 100)
ans =
   0.2450
```

3. 함수 leftsum의 x = a : h : b-h;를 적절히 바꾸어 오른쪽 끝점을 사용한 합과 중점을 사용한 합을 구하는 함수를 작성하고, $f(x)=x^3$에 대해 구간 [0, 1]을 100개로 나누어서 계산한 결과와 비교해 보시오.

<부록 2> 공 학 수 학 설 문 조 사

번호	문 항	전혀 그렇지 않다	그렇지 않다	보통이다	그렇다	매우 그렇다
1	교수는 학생들이 수업의 내용에 대해 열중하도록 만들었다.	①	②	③	④	⑤
2	이 수업에서 배운 내용은 차후 나에게 매우 유용할 것 같다.	①	②	③	④	⑤
3	이 과목의 다음학기 내용을 잘 해낼 수 있을 것 같은 자신감이 있다.	①	②	③	④	⑤
4	이 과목을 수강하는 동안 주의집중이 잘 되지 않았다.	①	②	③	④	⑤
5	교수는 수업의 내용이 중요하다고 느끼게 만들었다.	①	②	③	④	⑤
6	이 과목에서 좋은 점수를 얻기 위해서는 운이 있어야 한다.	①	②	③	④	⑤
7	이 과목은 좋은 점수를 얻기 위해서 아주 많은 노력을 해야만 한다.	①	②	③	④	⑤
8	수업의 내용이 이미 내가 알고 있는 내용과 어떤 관련이 있는지 이해할 수 없다.	①	②	③	④	⑤
9	이 수업에서 좋은 점수를 얻는 것은 나의 노력에 달려 있었다고 생각한다.	①	②	③	④	⑤
10	수업의 내용 구성이 주의를 집중시키며 요점을 파악하는데 도움이 되었다.	①	②	③	④	⑤
11	이 수업의 내용이 나에게는 매우 어려웠다.	①	②	③	④	⑤
12	이 수업에 대해서 매우 만족한다.	①	②	③	④	⑤
13	나는 좋은 성적을 받으려고 노력했다.	①	②	③	④	⑤
14	같이 수업을 듣는 학생들이 배우는 내용에 대해 흥미와 관심이 많았다.	①	②	③	④	⑤
15	나는 이 과목을 즐겁게 공부했다.	①	②	③	④	⑤
16	내가 어떤 점수를 받을 지 예측하기 힘들다.	①	②	③	④	⑤
17	다른 학생들이나 후배들에게 이 강의를 추천하겠다.	①	②	③	④	⑤
18	이 수업내용이 나의 기대와 목표를 충족시켰다	①	②	③	④	⑤
19	강의 구성이 흥미로웠고 배우는 방법이 수업에 집중하도록 하였다.	①	②	③	④	⑤
20	나는 적극적으로 이 수업에 참여하였다.	①	②	③	④	⑤
21	좋은 성적을 얻기 위해서 열심히 공부하는 것이 중요하다고 생각한다.	①	②	③	④	⑤
22	강의 과정이 다양하고 흥미로운 방법과 내용이 많았다.	①	②	③	④	⑤
23	이 강의는 나에게 유익하지 않았다.	①	②	③	④	⑤
24	수업 중에 자주 공상에 잠기거나 딴 생각을 하였다.	①	②	③	④	⑤
25	내가 열심히 공부하면 이 과목에서 좋은 성적을 얻을 수 있다고 생각한다.	①	②	③	④	⑤
26	이 수업은 나의 앞으로의 공부에 커다란 도움이 될 것이라 생각한다.	①	②	③	④	⑤
27	수업 중 내용에 대한 질문과 문제들이 나의 관심을 끌었다.	①	②	③	④	⑤
28	이 수업은 너무 어렵지도 않고, 너무 쉽지도 않다.	①	②	③	④	⑤
29	나는 다소 이 수업에 실망하였다.	①	②	③	④	⑤
30	이 수업에서 내가 공부해야 하는 양은 적절하였다.	①	②	③	④	⑤
31	내가 얼마나 잘 하고 있는지에 대한 충분한 피드백을 받는다.	①	②	③	④	⑤
32	수업은 내가 생각했던 것 보다 훨씬 이해하기가 어려웠다.	①	②	③	④	⑤
33	나는 이 수업이 즐거웠으며, 더 많은 것을 배우고 싶다.	①	②	③	④	⑤
34	나는 공학수학 수업이 재미가 있다.	①	②	③	④	⑤
35	나는 공학수학 수업 시간에 다른 생각을 많이 한다.	①	②	③	④	⑤
36	나는 공학수학에 대해서 더 많이 배우고 싶다.	①	②	③	④	⑤
37	나는 공학수학 과목은 꼭 예습을 한다.	①	②	③	④	⑤

38	나는 공학수학 시간에 배운 것을 응용해 보고 싶다.	①	②	③	④	⑤
39	나는 공학수학 공부를 시험 때만 열심히 한다.	①	②	③	④	⑤
40	나는 공학수학은 열심히 할수록 재미있는 것 같다.	①	②	③	④	⑤
41	나는 공학수학 시간에 선생님이 가르치는 것을 열심히 듣는다.	①	②	③	④	⑤
42	나는 공학수학 시간이 끝났을 때 무엇을 배웠는지 잘 모르겠다.	①	②	③	④	⑤
43	나는 공학수학 시험을 본 후에 점수를 빨리 알고 싶다.	①	②	③	④	⑤
44	나는 공학수학 시간이 끝난 후 그 시간에 배운 것들을 머리 속에 정리해 본다.	①	②	③	④	⑤
45	나는 공학수학 수업시간이 지루하다.	①	②	③	④	⑤
46	나는 공학수학 시간에 다른 짓을 하지 않는다.	①	②	③	④	⑤
47	나는 공학수학에서 내가 노력만 하면 좋은 점수를 얻을 수 있다고 생각한다.	①	②	③	④	⑤
48	나는 공학수학이 앞으로 공부하는데 꼭 필요한 과목이라 생각한다.	①	②	③	④	⑤
49	나는 공학수학 시간에 배운 것을 꼭 복습한다.	①	②	③	④	⑤
50	나는 공학수학 시간에 배운 것을 확실히 알고 넘어간다.	①	②	③	④	⑤
51	나는 공학수학을 공부하는데 별 어려움이 없는 편이다.	①	②	③	④	⑤
52	나는 공학수학 다음 수업이 기대가 된다.	①	②	③	④	⑤
53	나는 공학수학을 공부해도 어렵게 느껴진다.	①	②	③	④	⑤
54	나는 공학수학의 내용에 대해 더 많은 것을 알고 싶다.	①	②	③	④	⑤
55	나는 다른 학생보다 공학수학을 더 잘하고 싶다.	①	②	③	④	⑤
56	나는 공학수학 수업시간이 좀 더 많았으면 좋겠다.	①	②	③	④	⑤
57	나는 공학수학 수업이 언제 끝났는지 모를 때가 많다.	①	②	③	④	⑤
58	나는 공학수학을 지금보다 더 공부하고 싶다.	①	②	③	④	⑤
59	나는 공학수학 시간에 모르는 것이 있어도 질문하지 않고 그냥 넘어간다.	①	②	③	④	⑤
60	나는 공학수학 공부를 잘 하기 위하여 계획을 세우고 노력한다.	①	②	③	④	⑤
61	나는 공학수학 공부를 할 때 중요한 것은 요약해 둔다.	①	②	③	④	⑤

<학습동기 측정 도구>

하위 영역	문항번호 *역코딩
주의집중	1, 4*, 14, 19, 22, 24*, 27
관련성	2, 5, 8*, 13, 18, 20, 21, 23*, 26
자신감	3, 6*, 9, 11*, 16*, 25, 28, 31, 32*
만족감	7*, 12, 15, 17, 29*, 30, 33

<학습태도 측정 도구>

상위영역	하위영역	문항번호 *역코딩
자아개념	우월감, 자신감	41, 51, 47, 53*
공부태도	흥미, 목적의식, 성취동기	34, 40, 45*, 52, 56, 39, 55, 58, 36, 43, 50, 54, 59*,
학습습관	주의집중, 자율학습, 학습기술 적용	35, 42*, 46, 57, 37, 49, 60, 38, 44, 48, 61