J. Astron. Space Sci. 26(3), 317-328 (2009)

선형 및 비선형 상대궤도운동 모델들의 정확도 분석

박한얼, 박상영†, 이상진, 최규홍
연세대학교 천문우주학과

Analysis of Linear and Nonlinear Relative Orbit Dynamics for Satellite Formation Flying

Han-Earl Park, Sang-Young Park†, Sang-Jin Lee, and Kyu-Hong Choi
Dept. of Astronomy, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea
E-mail: spark@galaxy.yonsei.ac.kr

(Received August 7, 2009; Accepted August 24, 2009)

요 약

위성의 상대운동 모델은 두 위성 사이의 상대적인 운동을 기술하며, 위성편대비행 연구의 기본이 된다. 이 연구에서는 선형 및 비선형 상대운동 모델들의 정확도를 산출하고 이를 비교 분석하였다. 우선 모델의 정확도를 나타내는 '모델링 오차 지수(Modeling Error Index)'를 정의하였다. 다양한 주위성 궤도의 이심률과 두 위성 사이의 거리에 대해 모델링 오차 지수를 계산하여, 여러 궤도환경에 따른 기존의 여러 가지 상대운동 모델들의 정확도를 산출하였다. 여러 가지 상대운동 방정식들의 모델링 오차 지수는 주위성의 이심률의 크기, J2 섭동 고려 여부, 위성들의 상대거리의 크기에 따라 달라진다. 이 연구에서 사용한 상대운동 모델의 정확도는 편대비행 동역학 모델의 오차를 나타내므로, 이 연구 결과를 이용해서 주어진 편대비행 임무에 알맞은 모델을 선택하는 것이 가능하다.

Abstract

Relative dynamic models of satellites which describe the relative motion between two satellites is fundamental for research on the formation flying. The accuracy of various linearized or nonlinear models of relative motion is analyzed and compared. A 'Modeling Error Index (MEI)' is defined for evaluating the accuracy of models. The accuracy of the relative dynamic models in various orbit circumstance are obtained by calculating the modeling error with various eccentricities of the chief orbit and distances between the chief and the deputy. It is found that the modeling errors of the relative dynamic models have different values according to the eccentricity, J2 perturbation, and the distance between satellites. Since the evaluated accuracy of various models in this paper means the error of dynamic models of the formation flying, the results of this paper are very useful for choosing the appropriate relative model of the formation flying mission.

Keywords: formation flying, relative motion, modeling error

†corresponding author

1. 서 론

위성편대비행이란 두 대 이상의 위성들이 하나의 임무를 수행하기 위해 일정한 대형을 유지하며 비행하는 것을 말한다. 위성편대비행은 한 대의 위성으로 임무를 수행하는 기존 우주미션의 틀을 깨고 저비용, 고효율의 임무 설계를 가능하게 함으로써 현재는 미래 우주기술로 주목받고 있다. 즉, 하나의 대형 위성 대신 여러 대의 소형 위성들을 사용하여 더욱 효율적인 성능을 구현할 수 있고, 임무의 실패에 대한 부담을 줄일 수 있으며, 유연성 있는 임무 설계가 가능하다. 이러한 위성편대비행 기술을 구현하기 위해 상대운동 모델, 재배치를 위한 최적 궤도 설계, 대형 유지를 위한 제어 알고리즘 등이 활발하게 연구되고 있다. 이 가운데 상대운동 모델은 최적 궤도 설계와 제어 알고리즘 등을 개발하는 토대가 되기 때문에 가장 기본이 되고 중요하다고 할 수 있다.

상대운동 모델은 선형화 여부, 주위성 궤도, 섭동의 고려 여부 등에 따라 다양한 모델들이 존재한다. 대표적인 상대운동 모델은 Hill's 방정식이다(Vallado 2007). 이 모델은 주위성 궤도가 원궤도이고, 두 위성 사이가 위성 궤도 반지름에 비하여 무시할 만큼 작으며, 섭동이 없다고 가정한 모델이다. 또 Hill's 방정식을 기본으로 J2 섭동을 추가로 고려한 모델이 Schweighart(2001)와 Ross(2003)에 의해 각각 독자적으로 연구되었다. 주위성 궤도를 타원궤도로 확장한 대표적인 상대운동 모델은 Lawden 방정식으로 Tschauner-Hempel 방정식이라고도 한다(Tschauner & Hempel 1965). 이 모델은 궤도 이심률이 0일 때 Hill's 모델과 완전히 동일하다. 또 주위성 궤도가 타원궤도 이면서, J2 섭동이 고려된 모델은 Theron et al.(2004)에 의해 개발되었다. 지금까지 소개된 상대운동 모델들은 모두 선형화된 모델들이다. 선형 모델은 두 위성 사이의 거리가 궤도 반지름에 비하여 작다는 가정으로부터 선형화 된다. 하지만 계획되고 있는 위성편대비행 임무들 가운데는 두 위성 사이가 수백 km 이상 되는 것들도 있어 새로운 상대운동 모델의 필요성이 요구되었다. Irvin & Jacques(2002)와 Won & Ahn(2003)은 상태의존 Riccati(State-Dependent Riccati Equation, SDRE) 기법을 사용하여 각각 독자적으로 비선형 상대운동 모델을 연구하였다. Irvin & Jacques(2002)이 개발한 모델은 주위성 궤도를 원궤도로 가정하고, 섭동을 포함하지 않는다. Won & Ahn(2003)은 주위성 궤도를 타원궤도로 확장한 모델을 개발하였다. 단, 이 모델은 일부 항이 작다는 가정하에 무시된다. Park et al.(2008)에서는 역시 SDRE 기법을 사용하여 기존의 비선형 상대운동 모델들을 개선한 두 개의 모델을 개발하였다. 하나는 기본적으로 Won & Ahn(2003)이 개발한 모델과 같지만, 기존에는 무시되었던 항을 포함하여 모델을 개발하였다. 다른 하나는 J2 섭동을 추가로 포함하여 개발하였다.

편대비행의 재배치와 궤도유지를 위하여 궤도제어가 필수적이다. 이러한 궤도제어는 위성들의 상대 운동방정식을 바탕으로 구현되어진다. 그러므로 사용되는 상대 운동 방정식의 모델이 얼마나 정확한가에 따라서 편대위성들의 재배치와 궤도유지의 효율이 달라진다. 이 논문에서는 기존의 선형 및 비선형 상대운동 모델들을 간단하게 소개하고, 그 정확도를 비교 분석하였다. 모델의 정확도는 '모델링 오차 지수(Modeling Error Index, MEI)'를 정의하여 산출하였다. MEI는 J2 섭동을 포함한 비선형 운동방정식을 사용하여 주위성과 부위성 각각 지구 관성 좌표계(Earth Centered Inertial, ECI)에서 수치 적분한 후 국부수직, 국부수평(Local Vertical Local Horizontal, LVLH) 좌표계로 변환한 결과와 상대운동 모델의 수치 적분한 결과를 비교하여 계산할 수 있다. 상대운동 모델의 정확도는 주위성 궤도의 이심률과 두 위성 사이의 거리에 직접적인 영향을 받는다(Alfriend & Yan 2005). 따라서 MEI를 다양한 주위성 궤도의 이심률과 두 위성 사이의 거리에 대해서 계산하여 상황에 따른

표 1. Relative Dynamic Models.

Model Name	Nonlinearity	Eccentricity	J2 Perturbation	etc
Hill's equation	Linearized	Zero	Not included	
Schweighart	Linearized	Zero	Included	
Lawden equation	Linearized	Non Zero	Not included	
LawdenJ2	Linearized	Non Zero	Included	
Irvin	Nonlinear	Zero	Not included	Singularity
Park	Nonlinear	Non Zero	Not included	
ParkJ2	Nonlinear	Non Zero	Included	

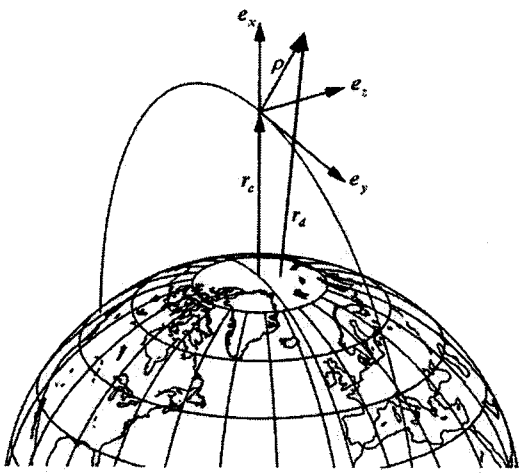

그림 1. 위성편대비행 연구에 주로 사용되는 LVLH 좌표계(Vallado 2007).

상대운동 모델들의 정확도를 분석하였다.

2. 편대위성의 상대운동 모델

서론에서 소개한 다양한 상대운동 모델 가운데 정확도 분석에 사용한 모델은 총 7가지로 표 1과 같다. 각 모델들은 크게 선형과 비선형, 주위성의 원궤도와 타원궤도, J2 섭동의 고려 여부로 그 특징을 구분할 수 있다.

2.1 상대운동 좌표계

위성편대비행 연구에서는 주위성과 부위성 사이의 상대적인 운동에 관심을 갖기 때문에 주로 회전 기준 좌표계를 사용한다. 회전 기준 좌표계는 주위성을 원점으로 하고 지구를 중심으로 회전하는 좌표계로서 주위성에 대한 부위성의 상대적인 운동을 연구하는데 용이하다. 여기서 주목할 점은 물리적으로 주위성이 꼭 존재할 필요는 없지만 대형의 기준점을 제공하기 위해 가상의 주위성을 가정한다(Vaddi 2003). 회전 기준 좌표계는 LVLH 좌표계라고도 하며(Schaub & Junkins 2003), 그림 1이 LVLH 좌표계를 나타낸 그림이다. 그림 1에서 $\mathbf{r}_c$는 지구중심으로부터 주위성의 위치 벡터이고,

$\mathbf{r_d}$는 부위성의 위치 벡터이다. 또 $\boldsymbol{\rho}$는 주위성과 부위성의 상대적인 위치 벡터를 나타낸다. 그리고 그림 1에 보이는 궤도를 기준 궤도 또는 주위성 궤도라고 하며, 앞서 언급한 LVLH 좌표계의 원점에 주위성이 위치하여 이 궤도를 따라 지구 주위를 공전하고 있다. 마지막으로 각각의 좌표축은 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{e_x} \equiv \frac{\mathbf{r_c}}{|\mathbf{r_c}|}, \quad \mathbf{e_y} \equiv \mathbf{e_z} \times \mathbf{e_x}, \quad \mathbf{e_z} \equiv \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$$

여기서 $\mathbf{e_x}$는 LVLH 좌표축의 단위벡터로서 주위성의 위치벡터 방향과 같고, $\mathbf{h}$는 주위성의 각운동량으로, $\mathbf{h} = \mathbf{r_c} \times \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{c}$이다. $\mathbf{e_z}$ 역시 단위벡터로서 주위성의 각운동량($\mathbf{h}$)과 평행한 벡터 방향으로 궤도 평면에 수직한 방향이 된다. 마지막으로 $\mathbf{e_y}$는 $\mathbf{e_x}$와 $\mathbf{e_z}$의 외적 벡터 방향과 같은 단위벡터이다. 따라서 기준 궤도가 원 궤도 일 때에는 $\mathbf{e_y}$의 방향은 주위성의 속도 벡터($\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{c}$) 방향과 평행을 이루게 된다(Schaub & Junkins 2003).

2.2 선형 상대운동 모델

2.2.1 Hill's 모델

Hill's 방정식은 위성편대비행에서 사용되는 가장 간단한 형태의 상대운동 모델이며, Clohessy-Wiltshire 방정식 이라고도 한다. 이 모델은 주위성 궤도를 원궤도로 가정하고, 섭동을 고려하지 않았으며, 두 위성 사이의 거리가 위성 궤도 반지름에 비하여 작다는 가정으로부터 선형화되었다. 이 식은 다음과 같다(Vallado 2007).

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + n^2 z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 x, y, z는 LVLH 좌표계상에서 상대 위치 변수들이고, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$은 상대 속도변수들이다. n은 주위성의 평균 운동(mean motion)으로 다음과 같이 계산된다.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

여기서 μ는 지구 중력 파라미터, a는 주위성 궤도의 장반경이다. 이 모델은 주위성 궤도를 원궤도로 가정하기 때문에 n은 시간에 따라 변하지 않는 상수이다.

2.2.2 Schweighart 모델

Schweighart(2001)와 Ross(2003)는 각각 독자적으로 주위성이 원 궤도를 돌 때 J2 섭동을 고려하여 상대적인 선형 운동방정식을 유도하였는데 그 중에서 Schweighart(2001)가 유도한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2(nc)\dot{y} - (5c^2 - 2)n^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2(nc)\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} + (3c^2 - 2)n^2 z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 $c \equiv \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_e^2}{8a^2}[1 + 3\cos(2i)]}$으로 정의되며, R_e는 지구 반지름, i는 주위성의 궤도 경사각이다.

2.2.3 Lawden 모델

주위성 궤도가 타원 궤도 일 때 주위성과 부위성 사이의 상대 운동을 묘사한 운동방정식을 Lawden 또는 Tschauner-Hempel 방정식이라고 하며, 이는 식 (3)과 같다(Tschauner & Hempel 1965). 식 (3)은 시간에 따라 변하는 파라미터 즉, ν(진근점각)가 존재한다는 점에서 위의 식 (1,2)와 큰 차이가 있다. 이것은 타원 궤도일 경우 진근점각의 변화량($\dot{\nu}$)이 상수가 아니기 때문이다. 만약 주위성의 궤도 이심률(e)이 0이면 즉, 기준 궤도가 원 궤도 일 때 식 (3)은 식 (1)과 정확하게 같아진다.

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} n \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \frac{(1+e\cos\nu)}{(1-e^2)^{3/2}} n \begin{pmatrix} -(3+e\cos\nu) & 2e\sin\nu & 0 \\ -2e\sin\nu & -e\cos\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \tag{3}$$

여기서 e와 ν는 모두 주위성 궤도에 관한 것으로, 각각 궤도 이심률과 진근점각을 나타낸다.

2.2.4 Lawden의 J2섭동을 포함한 모델 (LawdenJ2)

J2 섭동을 고려한 Lawden 방정식은 식 (4)와 같다(Theron et al. 2004).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = & -\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} n \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \frac{(1+e\cos\nu)}{(1-e^2)^{3/2}} n \right. \\ & \left\{ \begin{pmatrix} -3(3+e\cos\nu) & 2e\sin\nu & 0 \\ -2e\sin\nu & -e\cos\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - K_{J_2} \frac{1+e\cos\nu^2}{(1-e^2)^2} \left[4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \\ & - \begin{pmatrix} \sin i \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin i\cos\theta & \cos i \\ 0 & -\cos i & -\sin i\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ & \left. \left. \begin{pmatrix} \sin i \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin i\cos\theta & -\cos i \\ 0 & \cos i & -\sin i\cos\theta \end{pmatrix} \right] \right\} \left. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $K_{J_2} \equiv \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e^2}{a}\right)^2$으로 정의 되는 상수이다. 또 θ는 다음과 같이 정의된다.

$$\theta \equiv \omega + \nu$$

위 식의 궤도요소는 모두 주위성에 관한 것이다.

2.3 비선형 상대운동 모델

2.3.1 Irvin 모델

Irvin & Jacques(2002)은 SDRE 기법을 사용하여 비선형 상대운동 모델을 개발하였다. 이 모델은 주위성 궤도를 원궤도로 가정하고, 섭동을 고려하지 않는다. 그 식은 다음과 같다(Irvin & Jacques

2002).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n^2\sigma_x & 0 & 0 & 2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2n & n^2\sigma_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n^2\sigma_z & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{5}$$

여기서 $\sigma_x \equiv (\frac{a}{x}+1)\sigma_y$; $\sigma_y \equiv 1-\sigma_z$; $\sigma_z \equiv \frac{a^3}{[(a+x)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$이다. 이 모델의 특징은 σ_x의 정의에서 볼 수 있듯이, 상태변수 x가 분모에 있어 x가 0에 가까워지면 특이점이 발생하게 된다. 따라서 이 모델을 사용하기 위해서는 x값에 0이 들어가지 않도록 주의해야 한다.

2.3.2 Park 모델

주위성이 타원궤도를 돌 때 상대적인 비선형 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \ddot{\nu}y - \dot{\nu}^2 x + \frac{\mu}{\gamma}x + \frac{\mu}{\gamma}r - \frac{\mu}{r^2} = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2 y + \frac{\mu}{\gamma}y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\mu}{\gamma}z = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $\gamma \equiv [(r+x)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}$, r은 지구중심에서 주위성까지의 거리이다. 식 (6)을 사용하여 비선형 모델을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{\gamma} & 0 & \ddot{\nu} & 2\dot{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\ddot{\nu} & -2\dot{\nu} & \dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu r}{\gamma} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

실제로 식 (7)은 Won & Ahn(2003)이 디자인 한 SDRE 비선형 모델이다. 식 (7)은 상대적인 운동방정식을 잘 묘사하고 있지만 Won & Ahn(2003)은 식 (7)의 마지막 항을 무시하였다. Park et al.(2008)는 식 (7)의 마지막 항을 포함하는 새로운 SDRE 비선형 모델을 다음과 같은 방법으로 만들었다. 먼저 문제가 되는 항만 따로 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\mu}{\gamma}r - \frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}\left\{\left[1 - \left(-\frac{2}{r}x - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{3}{2}} - 1\right\} \tag{8}$$

식 (8)을 간단하게 하기 위해 다음과 같이 정의한다.

$$\xi \equiv -\frac{2}{r}x - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} \tag{9}$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하고, 음의 이항 급수(negative binomial series)를 사용하면 식 (10)과 같이 정리할 수 있다(Arfken & Weber 2001).

$$\frac{\mu}{\gamma}r - \frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu}{r^2}\left\{(1-\xi)^{-\frac{3}{2}} - 1\right\} = \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^2}\Psi\xi \tag{10}$$

여기서 Ψ는 다음과 같이 급수의 형태로 정의된다.

$$\Psi \equiv 1 + \psi_1 + \psi_2 + ...$$

여기서

$$\psi_1 \equiv \frac{\left(\frac{3}{2}+1\right)}{2}\xi, \quad \psi_2 \equiv \frac{\left(\frac{3}{2}+2\right)}{2}\psi_1\xi, \quad \psi_3 \equiv \frac{\left(\frac{3}{2}+3\right)}{2}\psi_2\xi, ...$$

이다. 결론적으로 식 (9, 10)을 식 (6)에 대입하고, 다시 비선형 모델을 만들면 식 (11)과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{\gamma} + \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^3}(2+\frac{x}{r})\Psi & 0 & \ddot{\nu} + \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^4}y\Psi & 2\dot{\nu} & \frac{3}{2}\frac{\mu}{r^4}z\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\ddot{\nu} & -2\dot{\nu} & \dot{\nu}^2 - \frac{\mu}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{11}$$

2.3.3 Park의 J2 섭동을 포함한 모델 (ParkJ2)

실제로 지구는 완벽한 구의 형태가 아니기 때문에 지구 주위를 도는 위성은 섭동을 받게 된다. Park et al.(2008)은 이러한 지구 비대칭 구면에 의한 섭동 효과 중에서 가장 큰 영향을 미치는 J2 섭동 효과를 고려하여 비선형 상대 운동방정식과 SDRE 비선형 모델을 디자인 하였다. 먼저 섭동이 포함된 비선형 상대 운동 방정식은 다음과 같다(Park et al. 2008).

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} - 2\dot{\nu}\dot{y} - \ddot{\nu}y - \dot{\nu}^2 x \\ \ddot{y} + 2\dot{\nu}\dot{x} + \ddot{\nu}x - \dot{\nu}^2 y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\gamma^3}\left[\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] + \frac{3}{2}\frac{J_2\mu R_e^2}{\gamma^4}\begin{bmatrix} J_x(i_d,\theta_d) \\ J_y(i_d,\theta_d) \\ J_z(i_d,\theta_d) \end{bmatrix}$$
$$- \frac{\mu}{r^3}\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\frac{J_2\mu R_e^2}{r^4}\begin{bmatrix} J_x(i_c,\theta_c) \\ J_y(i_c,\theta_c) \\ J_z(i_c,\theta_c) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

여기서 첨자 'c'는 주위성; 첨자 'd'는 부위성을 뜻한다. J_x, J_y, J_z는 다음과 같이 정의된다.

$$J_x(i,\theta) \equiv 1 - 3\sin^2 i \sin^2\theta$$
$$J_y(i,\theta) \equiv 2\sin^2 i \sin\theta\cos\theta$$
$$J_z(i,\theta) \equiv 2\sin i \cos i \sin\theta$$

식 (12)는 앞서 소개했던 식 (4)와 타원 궤도와 J_2 섭동을 고려했다는 점에서 동일하다. 하지만 식 (12)는 선형화를 하지 않았기 때문에 식 (4)와는 다르게 주위성의 궤도 요소뿐만 아니라 부위성의 궤도 요소(i_d, θ_d)까지 포함된 것을 확인 할 수 있다. 비선형 상대 운동방정식을 SDRE 비선형 모델로 디자인하기 위해서는 주위성과 부위성의 궤도요소 차이를 상대 운동방정식의 상태 변수들로 표현 할 수 있어야한다. 이를 위해서 Park et al.(2008)은 Gim & Alfriend(2003)가 제안한 변환 행

렬(transformation matrix)을 사용하였다. 이 변환 행렬을 사용하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} a_d \\ \theta_d \\ i_d \\ q_{1d} \\ q_{2d} \\ \Omega_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_c \\ \theta_c \\ i_c \\ q_{1c} \\ q_{2c} \\ \Omega_c \end{pmatrix} + \sum^{-1} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{13}$$

여기서 $q_1 \equiv e\cos\omega$, $q_2 \equiv e\sin\omega$이고, Ω는 승교점의 적경, ω는 근지점이각이다. $\sum^{-1}$은 변환 행렬로써 Gim & Alfriend(2003)의 부록에 소개되어 있다. 식 (13)에 따르면 부위성의 궤도요소를 주위성의 궤도요소와 변환 행렬과 상태변수의 곱으로 나타낼 수 있다. 이 변환 행렬과 음의 이항 급수(negative binomial series)를 사용하여 최종적으로 만들어진 SDRE 비선형 모델은 Park et al.(2008)의 부록에 자세한 식이 소개되어 있다.

3. 모델링 오차 지수(Modeling Error Index)

다양한 상대운동 모델들의 정확도를 객관적으로 비교해 보기 위해서는 정확도를 수치적으로 표현할 지수를 정의하여 사용하면 편리하다(Alfriend & Yan 2005). 실제로 Junkins et al.(1996)과 Junkins(2003)에서는 상대운동 모델의 정확도를 대표하는 지수를 정의하여 사용하였다. 하지만 이 지수는 선형 모델에서만 계산이 가능하였기 때문에 Alfriend & Yan(2005)에서는 비선형 모델에서도 적용이 가능한 새로운 지수를 정의하였다.

이 연구에서도 역시 '모델링 오차 지수(MEI)'를 정의하여 사용하였다. MEI는 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다: 1) 식 (14)를 사용하여 주위성과 부위성을 각각 ECI 좌표계상에서 수치 적분한 후 그 상대위치를 계산한다.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{eci} &= -\frac{\mu}{r_{eci}^3}x_{eci} - \frac{3J_2\mu R_e^2 x_{eci}}{2r_{eci}^5}\left(1 - \frac{5z_{eci}^2}{r_{eci}^2}\right) \\ \ddot{y}_{eci} &= -\frac{\mu}{r_{eci}^3}y_{eci} - \frac{3J_2\mu R_e^2 y_{eci}}{2r_{eci}^5}\left(1 - \frac{5z_{eci}^2}{r_{eci}^2}\right) \\ \ddot{z}_{eci} &= -\frac{\mu}{r_{eci}^3}z_{eci} - \frac{3J_2\mu R_e^2 z_{eci}}{2r_{eci}^5}\left(3 - \frac{5z_{eci}^2}{r_{eci}^2}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 첨자 'eci'는 ECI 좌표계에서의 변수라는 것을 의미한다. 그리고 r_{eci}는 지구 중심에서 위성까지의 거리이다. 2) ECI 좌표계 상의 상대위치를 LVLH 좌표계로 변환 한다. 3) 상대운동 모델을 수치적분을 통해 LVLH 좌표계상에서 궤도 전파한다. 4) 2)와 3)의 차이로부터 식 (15)를 이용하여 MEI를 계산 한다. 이렇게 계산한 MEI는 모델들의 정확도를 비교 분석하는 지표로서 사용 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &\equiv \frac{\mathbf{f}_{rel}(t_i) - \mathbf{f}_{ref}(t_i)}{t_i} \\ e_{rms} &\equiv \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_i} \\ \text{MEI} &\equiv \frac{e_{rms}}{\rho_0} \times 100(\%) \end{aligned} \tag{15}$$

표 2. Orbital Elements of Chief Satellite.

Orbital elements	Values
a (km)	7,000
i (deg)	45
Ω (deg)	0
ω (deg)	0
e	0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1
M (deg)	0

여기서 $\mathbf{f}_{rel}(t_i)$은 상대운동 모델을 사용하여 구한 t_i 시간의 상대위치; $\mathbf{f}_{ref}(t_i)$는 t_i 시간까지 식 (14)를 이용하여, 주위성과 부위성을 각각 수치 적분한 후 LVLH 좌표계로 변환한 상대위치를 뜻한다. 그러므로 $\mathbf{e}_i$는 시간 t_i까지 상대운동 모델의 오차 변화율을 뜻하고, e_{rms}는 평균 모델 오차 변화율 즉, $|\mathbf{e}_i|$의 Root Mean Square(RMS) 오차를 뜻한다. 그리고 ρ_0는 주위성과 부위성 사이의 상대거리이다. MEI는 위 정의처럼 e_{rms}의 두 위성의 상대 거리에 대한 백분율을 의미한다. 즉, MEI가 '1'이고 두 위성 사이의 거리가 100km라고 하면 평균 모델 오차 변화율이 1km임을 의미한다. 즉, 매 초마다 모델 오차가 1km씩 발생한다. 따라서 모델의 정확도는 계산된 MEI 값이 작을수록 좋다.

4. 수치 시뮬레이션 결과

모델들의 정확도를 분석하기 위해 다양한 환경에서 MEI를 계산하였다. 주위성의 궤도요소는 표 2와 같다. 즉, 지구 저궤도이고 궤도 이심률은 0부터 0.1까지 다양한 값을 사용하였다. 이 외에 두 위성 사이의 상대거리 역시 1, 5, 10, 25, 50, 75, 100, 150, 200km로 다양하게 바꾸어 실시하였다. 시뮬레이션 시간은 12시간이며, 수치적분을 위해 MATLAB 내장 함수 ode45를 사용하였다.

그림 2에서 그림 7까지는 두 위성의 상대거리에 대한 각 모델들의 MEI를 주위성의 이심률 별로 그린 것이다. 모든 그림에서 그래프의 '□'는 원궤도를 가정한 선형 모델, '○'는 타원궤도를 가정한 선형 모델, '△'는 비선형 모델을 뜻한다. 먼저 그림 2는 주위성의 궤도가 원궤도인 경우이다. 대부분의 모델이 타원궤도인 경우보다 대체로 작은 MEI를 보여준다. 비선형 모델들은 두 위성 사이의 거리에 따라 MEI의 증가폭이 매우 작음을 알 수 있다. 선형 모델들(Hill 모델, Schweighart 모델, Lawden 모델)은 LawdenJ2 모델을 제외하고는 모두 거의 같은 MEI를 보여주는데, 두 위성 사이의 거리가 증가할수록 MEI도 증가한다. 타원궤도와 J2 섭동을 고려한 LawdenJ2 모델은 특이하게도 거리가 100 km에서 가장 작은 MEI를 보여준다. 이는 일반적으로 원궤도에서는 원궤도를 가정한 모델들(Hill 모델, Schweighart 모델)과 비슷한 정확도를 가질 것으로 예상할 수 있다. 하지만 그림 2에서 보는 바와 같이 LawdenJ2 모델은 예상과 다른 결과를 보여주었다. 이것은 타원궤도와 J2 섭동이 포함된 복잡한 비선형 상대 운동방정식을 선형화를 통해 선형모델로 유도하는 과정에서 비롯된 문제일 수 있다. 결과적으로, 일부 시뮬레이션 환경에서는 모델의 성능이 제대로 발휘되지 않는 것으로 보인다.

그림 3은 주위성의 궤도 이심률이 0.02인 타원궤도일 때 그래프이다. 그림 3은 그림 2와는 두 가지 크게 다른 점이 존재하는데, 첫 번째는 그림 2에서 우수한 성능을 보여주었던 Irvin 모델의 MEI가 크게 증가하여 Hill 모델이나 Schweighart 모델과 비슷한 수준이 되었다. 이는 Irvin 모델이 주위성의 궤도를 원궤도로 가정한 모델이기 때문에 타원궤도에서는 그 성능이 크게 저하되는 것이다. 다

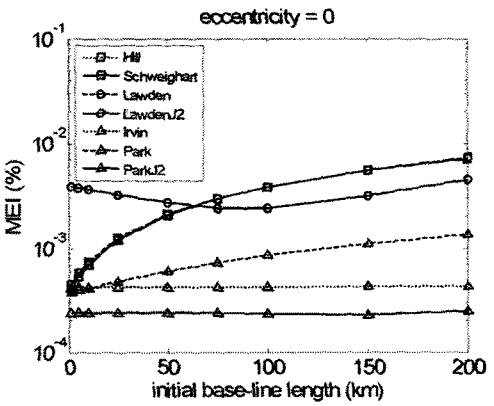

그림 2. 이심률이 0일 때 MEI.

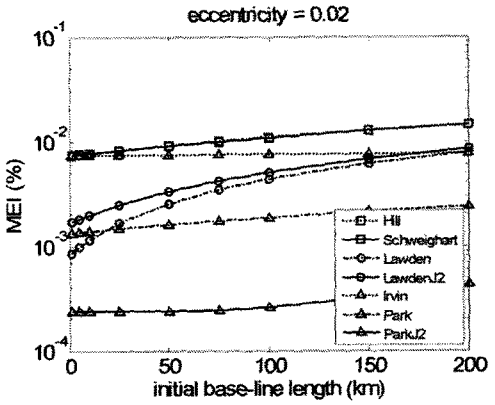

그림 3. 이심률이 0.02일 때 MEI.

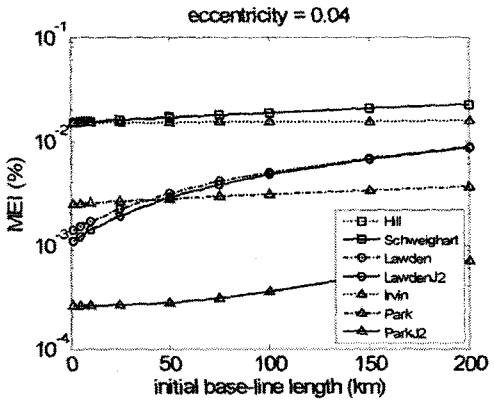

그림 4. 이심률이 0.04일 때 MEI.

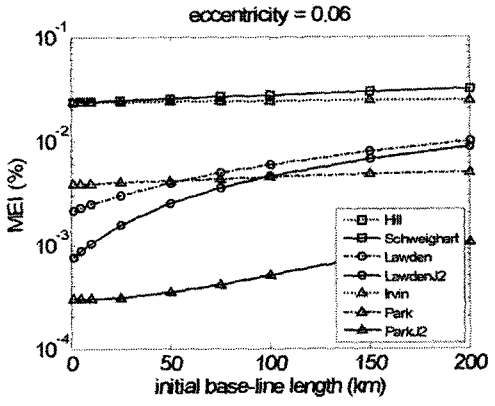

그림 5. 이심률이 0.06일 때 MEI.

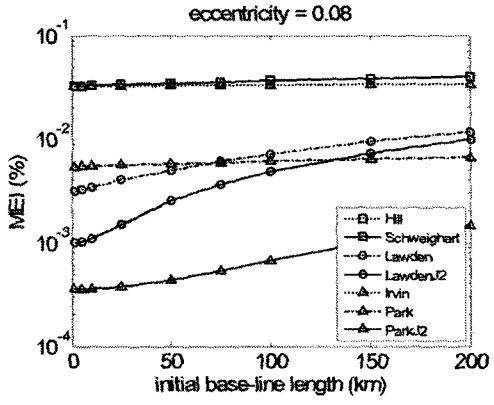

그림 6. 이심률이 0.08일 때 MEI.

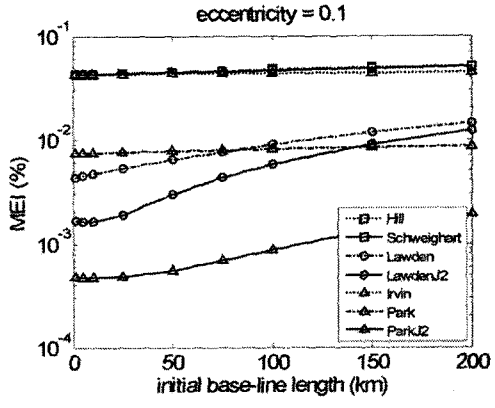

그림 7. 이심률이 0.1일 때 MEI.

만, 비선형 모델답게 두 위성 사이의 거리증가에 따른 오차 증가량은 매우 작은 것을 알 수 있다. 두 번째는 LawdenJ2 모델이 다른 선형 모델들과 유사한 경향을 보여주게 되었다. 하지만, 여전히 J2 섭동이 고려되지 않은 Lawden 모델보다도 큰 MEI를 보여준다.

그림 4는 이심률이 0.04로 증가한 경우에서 MEI를 확인한 것이다. 전체적인 경향은 그림 3과 같다. 다만, 이심률이 0.04로 증가하면서 LawdenJ2 모델의 MEI가 Lawden 모델보다 더 작아진 것을 확인할 수 있다. 이것으로 LawdenJ2 모델은 일정 이상의 이심률에서 그 성능이 정상적으로 발휘됨을 알 수 있다.

그림 5에서 그림 7까지는 주위성의 궤도 이심률이 각각 0.06, 0.08, 0.1인 경우이다. 그 전체적인 경향은 그림 4와 거의 동일하다. Park 모델은 두 위성 사이의 거리가 짧을 때는 Lawden 모델이나 LawdenJ2 모델보다 MEI가 크다. 하지만 두 위성 사이의 거리가 증가할수록 Park 모델의 성능이 J2 섭동을 고려한 LawdenJ2 모델보다도 좋아지는 것을 알 수 있다. 이는 궤도이심률에 따라 다르지만, 두 위성 사이의 거리가 대략 100km에서 150km 정도가 되면 비선형성에 대한 영향이 J2 섭동의 영향보다 크게 작용하게 되어 Park 모델의 성능이 더 좋아지는 것으로 해석해 볼 수 있다.

그림 2에서 그림 7까지 공통적으로 나타나는 특징을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 Hill 모델과 Schweighart 모델 사이의 MEI는 거의 같았다. Schweighart 모델은 Hill 모델과 비교하여 J2 섭동을 추가로 고려한 모델이다. 하지만 주위성의 궤도를 원궤도로 가정하고 상대거리가 짧다는 기본적인 가정 때문에 이 연구에서 실시한 대부분의 시뮬레이션에서는 그 효과가 미미하여 그 차이가 그래프로 잘 드러나지 않았다. 다만, 그림 2에 보이는 것처럼 원궤도이고 상대거리가 작을 때에는 Schweighart 모델이 Hill 모델보다 더 작은 MEI를 갖는 것이 확인 되었다. 다음으로 비선형 모델의 상대거리 증가에 따른 MEI 증가폭이 선형 모델보다 작았다. 이것은 선형 모델과 비선형 모델의 특징을 가장 잘 설명해 주는 결과로서, 비선형 모델은 두 위성 사이의 상대거리가 증가하면서 커지는 비선형성을 잘 반영한다고 볼 수 있다. 마지막으로, ParkJ2 모델이 모든 시뮬레이션 경우에 대해 가장 작은 MEI를 보여 주었다. 이것은 ParkJ2 모델이 상대거리에 따른 비선형성뿐만 아니라 이심률과 J2 섭동의 영향까지도 가장 잘 반영하고 있다는 뜻이다.

5. 결 론

다양한 상대운동 모델들의 정확도를 비교 분석 하였다. 이 논문은 모델링 오차 지수(Modeling Error Index)를 정의하여 모델들의 정확도를 비교 분석 할 수 있었다. MEI는 크게 세 가지 요인에 의해 영향을 받는다. 첫 번째로, 주위성의 궤도 이심률에 영향을 받는다. 즉, 주위성 궤도가 타원 궤도일 때 원궤도를 가정한 모델들의 MEI는 크게 증가하였다. 두 번째로, J2 섭동에 영향을 받는다. J2 섭동을 제외하고 같은 조건이라면 J2 섭동을 고려한 모델이 고려하지 않은 모델보다 작은 MEI 값을 보여주었다. 다만, Schweighart 모델의 경우 그 효과가 미미하였고, LawdenJ2 모델은 일정 이상의 이심률을 가질 경우에만 더 좋은 성능을 보여주었다. 마지막으로, 두 위성 사이의 거리에 영향을 받는다. 시뮬레이션 결과를 보면 두 위성 사이의 거리가 증가할수록 MEI가 증가하는 것을 확인 할 수 있다. 다만, 비선형 모델의 경우 선형 모델에 비하여 그 증가량이 매우 작았다. 실제로 약 100km에서 150km 이상 되면 J2 섭동을 고려하지 않은 비선형 모델이 J2 섭동을 고려한 선형 모델보다 더 좋은 성능을 보여주었는데, 이는 일정 이상 상대거리가 증가하면 J2 섭동보다 비선형성에 의한 영향이 더

커지는 것으로 볼 수 있다. 결론적으로 상대운동 모델들은 궤도환경에 따라 다양한 오차를 보여주었으며, 이 연구에서는 그러한 오차의 크기를 명확히 제시하였다. 따라서 위성편대비행 임무를 설계할 때 요구조건을 고려하여 알맞은 상대운동 모델을 선택할 수 있을 것이다.

감사의 글: 이 연구는 한국과학재단의 국가지정연구실사업(No. M10600000282-06J0000-28210) 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

Alfriend, K. T. & Yan, H. 2005, JGCD, 28, 254

Arfken, G. B. & Weber, H. J. 2001, Mathematical Methods for Physicists (San Diego: Academic Press), pp.338-339

Gim, D. W. & Alfriend, K. T. 2003, JGCD, 26, 956

Irvin, D. J. & Jacques, D. R. 2002, Advances in the Astronautical Sciences, 109, 589

Junkins, J. L., Akella, M. R., & Alfriend, K. T. 1996, Journal of the Astronautical Sciences, 44, 541

Junkins, J. L. 2003, Advances in the Astronautical Sciences, 115, 3

Park, H.-E., Park, S.-Y., & Choi, K.-H. 2008, in Spaceflight Mechanics, eds. J. H. Seago, B. Neta, T. J. Eller, & F. J. Pelletier (San Diego: the American Astronautical Society), pp.1695-1714

Ross, I. M. 2003, JGCD, 26, 657

Schaub, H. & Junkins, J. L. 2003, Analytical Mechanics of Space Systems (Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.), pp.593-618

Schweighart, S. A. 2001, Master's Thesis, Massachusetts Institute of Technology

Theron, A., Jouhaud, F., & Chretien, J.-P. 2004, ONERA, Note interne 1/08282

Tschauner, J. & Hempel, P. 1965, Acta Astronautica, 11, 104

Vaddi, V. V. S. S. 2003, PhD. Thesis, Texas A&M University

Vallado, D. A. 2007, Fundamentals of Astrodynamics and Applications (Hawthorne: Microcosm Press), pp.389-416

Won, C. H. & Ahn, H. S. 2003, The Journal of the Astronautical Sciences, 51, 433