

# 선형시불변 단일입출력 시스템의 영점과 계단응답 특성

## Zeros and Step Response Characteristics in LTI SISO Systems

이상용\*  
(Sang-Yong Lee)

**Abstract:** This paper deals with the relationship between zeros and step response of the second and third order LTI(Linear Time Invariant) SISO(Single-Input and Single-Output) systems. As well known, if a system has a single unstable zero, it shows the step response with undershoot and, on the other hand, a stable zero slower than the dominant pole causes the system to have the step response with overshoot. Generally, in the case of a system with two unstable real zeros, it is known to have B type undershoot[7]. But there are many complex cases of the step response extrema corresponding to zeros location in third order systems. This paper investigates the whole cases depending on DC gains of the additive equivalence systems and they are to be classified by the region of zeros which are related to the shape of the step response. Moreover, monotone nondecreasing conditions are proposed in the case of complex conjugate zeros as well as the case of two stable zeros.

**Keywords:** SISO system, zero, extrema, monotone nondecreasing

### I. 서론

대상시스템의 특성과 그 특성을 감안하여 설계한 제어기의 성능지표로서 시정수, 상승시간, 정착시간, 상향초과, 하향초과의 존재여부 및 크기 등 계단응답 특성을 파악해야 하는 경우가 많다. 이중에 시정수, 상승시간, 정착시간 등을 시스템 극점에 의해 결정되는데, 이에 따라 출력 또는 상태 변수의 되먹임을 이용해 극점의 위치를 적절히 조절함으로써 관련 성능을 만족시킬 수 있다. 반면에 상향초과나 하향초과 등의 성능지표는 주로 시스템 영점에 의해 결정되는데, 주극점보다 느린 영점이 존재할 경우 상향초과가 발생하고, 불안정한 영점이 존재하면 하향초과가 발생한다 [1,3,4]. 특히 우반평면에 훌수개의 영점이 있는 경우에는 A형 하향초과가 존재한다[5]. 그러나 영점에 의한 시스템의 응답에 제약이 있는 경우에는 되먹임 제어기 설계를 통해 영점의 위치를 변화시킬 수 없기 때문에 제어성능이 개선되지 않거나 제한되는 등의 어려움이 따른다[2-4]. 따라서 영점에 의한 시스템 성능과 응답특성을 사전에 파악하는 것은 매우 중요하며, 이 특성이 만족스럽지 못한 경우에는 시스템을 재설계하거나 교체해야 한다.

[6]에서는 공정제어에서 하향초과가 발생하는 상황에 대한 물리적 의미에 대해 예를 들어 설명하고 있으며, 서로 이득의 부호가 다른 두 전달함수의 합의 꼴로 하향초과 현상이 나타나는 열가지 경우에 대해 정리되어 있다. 상대차수(relative degree)가 1인 2차 시스템에서는 영점이 한 개이기 때문에 [1]에서 보인 바와 같이 안정한 실극점을 가질 때 계단응답은 단조증가하는 경우, 하향초과를 갖는 경우 또는 상향초과를 갖는 경우로 구분할 수 있다. 그러나 3차 시스템에서는 두 개의 영점이 존재하기 때문에 A형 하향초과를 갖는 경우는 물론 B형 하향초과를 갖는 경우도 발생한다. 계단응답에서 A형 하향초과와 B형 하향초과의 구분

은 그림 1과 같으며, 이에 대한 구체적인 정의는 [7]에 언급되어 있다.

[8]에는 실극점과 실영점을 갖는 시스템의 계단응답에 나타나는 극대·극소점(local extrema)의 개수에 대해 정리되어 있다. 이에 의하면, 3차 시스템은 두 개의 영점이 모두 우반면에 있는 경우, 두 개의 영점이 모두 주극점보다 느린 좌반면에 있는 경우 등 단순히 하향초과, 상향초과 등으로 분류하기 어려운 복잡한 상황들이 존재한다. 또한 기존의 결과는 실영점에 대한 해석에 한정되어 있으며, 복소 영점이 존재하는 경우에 대해서는  $H_\infty$  제어기법 등을 통해 주파수영역에서의 성능한계에 대해 다루고 있으나, 시간영역 응답특성에 대한 연구는 제시되지 않고 있다.

[1]에 언급되었듯이 단조증가하는 부시스템(subsystem)의 꼴셈형 시스템 또는 덫셈형 시스템도 단조증가하는 계단응답을 갖는다. 그러나 부시스템들의 이득의 부호가 다를 경우 [6]에서와 같이 덫셈형 시스템이 하향초과를 갖는 경우가 발생한다.

이 논문에서는 실극점을 갖는 2차와 3차 시스템에서 시스템의 이득 특성에 따른 영점의 위치와 계단응답 특성을

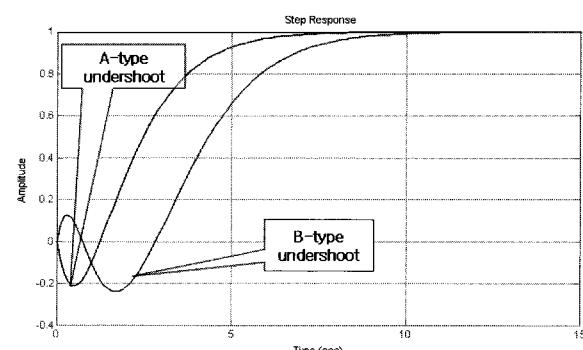


그림 1. A형 하향초과와 B형 하향초과.

Fig. 1. A-type and B-type undershoot.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 5. 7., 채택확정: 2009. 5. 26.

이상용: 인하대학교 전기공학과(imugi13@naver.com)

정리하여 제시한다. 특히 [8]에서 다루지 않은 궁액복소영점을 갖는 경우에 단조증가계단응답을 갖기 위한 극점의 위치적 조건을 제시한다. 또한 인접한 두 극점 사이에 두 개의 영점이 존재하는 경우 극대·극소점 개수의 범위만을 확인할 수 있었던 기존의 결과와 달리 3차 시스템의 경우 극대·극소점을 갖지 않는, 즉 단조증가응답을 갖는 조건을 제시한다. 이와 같이 이 논문에서는 2차와 3차 시스템의 시간응답특성을 다루면서 관련조건을 직접 제시하고 있다는 점에서 의의가 있으며, 4차 이상의 고차시스템들은 2차나 3차 부 시스템들로 분할할 수 있으므로 이 논문의 결과와 개념을 확장하여 적용할 수 있다.

## II. 2차 시스템의 영점과 계단응답

단조증가 계단응답을 갖는 시스템들의 골셈형이나 덧셈형 시스템은 단조증가 계단응답을 갖는다. 그러나 단조증가 계단응답을 갖는 시스템들의 직류이득 부호가 서로 다른 경우에는 덧셈형 시스템의 응답이 단조증가하지 않을 수 있다. 이 절에서는 어떤 조건 하에서 이러한 현상이 나타나는지 규명한다.

두 개의 1차형 시스템의 덧셈형으로 표현되는 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) + G_2(s) \\ &= \frac{a_1}{-\frac{1}{p_1}s+1} + \frac{a_2}{-\frac{1}{p_2}s+1} \end{aligned} \quad (1)$$

이때  $a_1, a_2$ 는 각각  $G_1(s)$ 과  $G_2(s)$ 의 직류이득이고,  $p_1$ 과  $p_2$ 는 각각의 시정수로서 안정한 1차형 부시스템이라는 가정에 의해  $p_1$ 과  $p_2$ 는 모두 음의 실수이다.

$$G(s) = \frac{-\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2}{p_1 p_2} s + (a_1 + a_2)}{\frac{1}{p_1 p_2} s^2 - \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} s + 1} \quad (2)$$

식 (2)는 다루고자 하는 합성 시스템이다. 편의상  $a_1 + a_2 = 1$ , 즉 직류이득(DC gain)은 1이라고 하고,  $p_1$ 을 주극점(dominant pole),  $p_2$ 를 빠른극점(fastest pole)이라고 놓으면  $p_1 > p_2$ 이며, 부시스템의 부호에 따라 시스템을 다음과 같이 분류할 수 있다.

영점이 한 개만 존재하는 시스템의 경우, 이 영점은 항상 복소평면상의 실수축에 위치한다. 두 시스템의 합성시스템은 각각의 이득의 부호에 따라 영점의 위치가 달라지며 그에 따른 계단응답의 특성도 달라지는데 이 특성은 그림

표 1. 부 시스템 이득의 경우의 수.

Table 1. Cases of the subsystem DC gains.

Case #	$a_1$ 부호	$a_2$ 부호
1	+	+
2	+	-
3	-	+
4	-	-

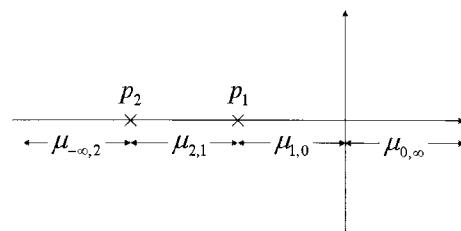


그림 2. 극점과 원점으로 구분한 실수영역.

Fig. 2. Line segments on the real axis by poles and origin.

3과 같이 복소평면의 실수축에 대해서 두 개의 극점과 원점으로 구분되는 영역으로 나누어 생각할 수 있다.

그림 2의 각각의 영역은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mu_{0,\infty} &= \{z : G(z) = 0, 0 < z < \infty\} \\ \mu_{1,0} &= \{z : G(z) = 0, p_1 < z < 0\} \\ \mu_{2,1} &= \{z : G(z) = 0, p_2 < z < p_1\} \\ \mu_{-\infty,2} &= \{z : G(z) = 0, -\infty < z < p_2\} \end{aligned}$$

그리고  $m_{0,\infty}, m_{1,0}, m_{2,1}, m_{-\infty,2}$ 를 각각  $\mu_{0,\infty}, \mu_{1,0}, \mu_{2,1}, \mu_{-\infty,2}$ 의 영역에 있는 영점의 개수라고 하면 [8]에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$m_{1,0} + m_{0,\infty} \leq \eta \leq m_{1,0} + m_{0,\infty} + m_{2,1} - p \quad (3)$$

이때  $\eta$ 는 시스템의 계단응답에 존재하는 극대·극소점(local extrema)의 개수이며  $p$ 는  $m_{2,1}$ 이 홀수일 경우 1이고 짝수일 경우 0이다.

보조정리 1: 주어진 2차형 시스템이 식 (1)과 같이 두 개의 부시스템의 덧셈형 등가시스템으로 표현된다고 가정하면 다음의 관계가 성립한다.

- 1)  $a_1 > 0, a_2 > 0$ 인 경우  $z \in \mu_{2,1}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 2)  $a_1 > 0, a_2 < 0$ 이고  $-a_2 < a_1 \frac{p_1}{p_2}$ 인 경우  $z \in \mu_{-\infty,2}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 3)  $a_1 > 0, a_2 < 0$ 이고  $-a_2 > a_1 \frac{p_1}{p_2}$ 인 경우  $z \in \mu_{0,\infty}$ 이며 A형 하향초과를 갖는다.
- 4)  $a_1 < 0, a_2 > 0$ 인 경우  $z \in \mu_{1,0}$ 이며 상향초과를 갖는다.

증명 : 1)의 경우 : 식 (2)의 영점은 다음과 같은데

$$z = \frac{(a_1 + a_2)p_1 p_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} \quad (4)$$

1)의 조건하에서 아래의 부등식을 만족함을 보일 수 있다.

$$p_2 < \frac{(a_1 + a_2)p_1 p_2}{a_1 p_1 + a_2 p_2} < p_1 \quad (5)$$

우선 좌측 부등식이 성립함을 보이기 위해 양변에 양수인  $(a_1 p_1 + a_2 p_2)/p_2$ 를 곱하면  $a_2 p_2 < a_2 p_1$ 이 되어 부등식이

성립한다. 우측 부등식은 같은 방법으로 양변에 양수인  $(a_1p_1 + a_2p_2)/p_1$ 을 곱해 확인할 수 있다. 그리고 이 경우를 식 (3)에 대입하면  $\eta = 0$ 이 되어 단조증가 계단응답을 가짐을 확인할 수 있다.

2)의 경우에 다음의 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

$$z = \frac{(a_1 + a_2)p_1p_2}{a_1p_1 + a_2p_2} < p_2 \quad (6)$$

이때, 좌변의 분자항은 직류이득이 항상 0보다 큰 1이고  $p_1$ 과  $p_2$ 가 안정하다는 가정에 의해 항상 0보다 크고 분모항은  $-a_2 < a_1p_1/p_2$ 이므로 0보다 작다. 식 (6)의 양변에 음수인  $(a_1p_1 + a_2p_2)/p_2$ 를 곱하면  $a_2p_1 > a_2p_2$ 가 되어 부등식이 성립한다. 그리고 이 경우를 식 (3)에 대입하면  $\eta = 0$ 이 되어 단조증가함을 확인할 수 있다.

3)의 경우에 다음의 부등식이 성립한다.

$$0 < \frac{(a_1 + a_2)p_1p_2}{a_1p_1 + a_2p_2} = z \quad (7)$$

우변의 분자항은 항상 0보다 크고 분모항은  $-a_2 > a_1p_1/p_2$ 으로 0보다 크므로 부등식이 성립한다. 그리고 이 경우를 식 (3)에 대입하면  $\eta = 1$ 을 얻게 되어 극대·극소점이 한 개 존재함을 알 수 있으며 [5]에 의해 A형 하향초과가 존재함을 알 수 있다.

4)의 경우에 해당하는 부등식은 다음과 같다 :

$$p_1 < \frac{(a_1 + a_2)p_1p_2}{a_1p_1 + a_2p_2} < 0 \quad (8)$$

가운데 식의 분자는 항상 0보다 크다. 그리고 직류이득이 1이라는 가정에 의해  $a_1 = 1 - a_2$ 을 분모식에 대입하면  $p_1 + a_2(p_2 - p_1)$ 인데 이것은  $p_1$ 과  $p_2 - p_1$ 이 음수이고  $a_2$ 가 양수임으로 분모가 0보다 작다. 따라서 부등식 (8)의 우식이 성립한다. 부등식 (8)의 좌식의 경우는 양변에 양수인  $(a_1p_1 + a_2p_2)/p_1$ 을 곱하면  $a_2p_2 < a_2p_1$ 이 되어 부등식이 성립함을 알 수 있다. 그리고 이 경우를 식 (3)에 대입하면  $\eta = 1$ 이 되어 극대·극소점이 한 개 존재함을 알 수 있으며 [5]에 의해 A형 하향초과가 존재하지 않으므로 이 극대·극소점은 상향초과임을 확인할 수 있다. ■

보조정리 1의 결과를 요약하면 표 2와 같은 관계를 얻을 수 있다. 여기서  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ 인 경우는 직류이득이 1인 경우를 만족하지 못하므로 다루지 않았지만, 이 경우는 1)의 경우와 같은 응답특성을 가지며 직류이득의 부호가 음인 경우에 해당한다.

표 2. 계단응답과 부시스템 이득 부호와의 관계.

Table 2. Relationship between step response and DC gain of the subsystems.

$a_1 > 0$ , $a_2 > 0$	단조증가
$a_1 > 0$ , $a_2 < 0$ , $-a_2 < a_1p_1/p_2$	단조증가
$a_1 > 0$ , $a_2 < 0$ , $-a_2 > a_1p_1/p_2$	A형 하향초과
$a_1 < 0$ , $a_2 > 0$	상향초과

2차형 시스템을 1차형 부시스템들의 등가 덧셈형 시스템으로 표현했을 때 두 시스템 직류이득의 부호가 같으면 단조증가하는 계단응답을 얻을 수 있다. 빠른 극점을 갖는 부시스템의 이득이 음의 방향이면서 작을 때에는 계단응답이 단조증가하지만 음의 응답이 커질 때에는 하향초과 형태의 극값을 갖는다. 주극점에 해당하는 부시스템의 이득이 음수인 경우에는 상향초과가 발생하며 크기가 커질수록 상향초과가 커진다. 즉 영점에 의한 극값은 덧셈형으로 분해된 시스템들 중 음의 이득을 갖는 요소에 의해 발생하며 그 영향이 클수록 상향초과나 하향초과가 커지게 된다.

보조정리 1에서 제시한 영점의 위치에 따라 응답특성이 어떻게 달라지는가에 대한 결과는 [1]에서 제시한 기준의 결과와 일치한다. 그러나 영점이 부시스템의 덧셈형 등가모델로부터 발생된다는 관점으로 바라보면 좀더 적관적인 결과를 얻을 수 있다. 예를 들어 식 (1)로 표현되는 전달함수의  $p_1$ (주극점)이  $z$ (영점)와 매우 근접하도록 되먹임 제어기를 설계한다는 것은  $G_1(s)$ 의 영향력(이득)을 거의 0으로 만들고  $G_2(s)$ 의 영향력을 주로 사용하겠다는 설계자의 의도로서 반영된다. 이 관점을 3차 시스템으로 확장하면 공액 복소영점에 의한 계단응답특성 등 기준에 다루기 어려웠던 문제들에 대한 접근이 가능해진다.

### III. 3차 시스템의 영점과 계단응답

안정한 실극점을 갖는 3차 시스템의 덧셈형 등가모델은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) \\ &= \frac{a_1}{p_1 - \frac{1}{s+1}} + \frac{a_2}{p_2 - \frac{1}{s+1}} + \frac{a_3}{p_3 - \frac{1}{s+1}} \end{aligned} \quad (9)$$

이때  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ 는 각각  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$ 의 직류이득이고,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ 는 각각의 시정수이다. 안정한 1차형 부시스템이라는 가정에 의해  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ 는 모두 음의 실수이다. 이것을 상대차수가 1인 3차 전달함수 모델로 표현하면 다음과 같이 구해진다.

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{\Delta} \quad (10)$$

이때,

$$a = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3}{p_1p_2p_3} \quad (11a)$$

$$b = -\frac{a_1p_1(p_2 + p_3) + a_2p_2(p_1 + p_3) + a_3p_3(p_1 + p_2)}{p_1p_2p_3} \quad (11b)$$

$$c = a_1 + a_2 + a_3 \quad (11c)$$

$$\Delta = -\frac{1}{p_1p_2p_3}s^3 + \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p_1p_2p_3}s^2 - \frac{p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3}{p_1p_2p_3}s + 1 \quad (12)$$

이고 편의상 전체 시스템의 직류이득은 1이라고 가정하기 위해  $c = 1$ 로 놓는다. 그리고 이 시스템의 영점은 근의 공식에 의해 다음과 같다.

## 표 3. 부 시스템 이득의 경우의 수.

Table 3. Cases of the DC gain of the subsystems.

Case #	$a_1$ 부호	$a_2$ 부호	$a_3$ 부호
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	+
4	+	-	-
5	-	+	+
6	-	+	-
7	-	-	+
8	-	-	-

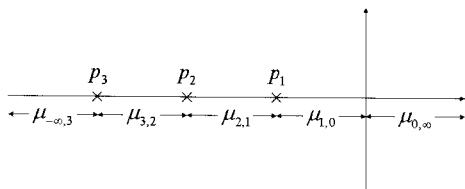


그림 3. 극점과 원점으로 구분한 실수영역.

Fig. 3. Line segments of the real axis by poles and origin.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (13)$$

그리고,  $p_1$ 을 주극점,  $p_2$ 를 중간극점,  $p_3$ 를 빠른 극점이라고 놓으면  $p_1 > p_2 > p_3$ 이며, 부시스템들의 이득의 부호에 따라 시스템을 다음과 같이 분류할 수 있다.

두 시스템의 합성시스템은 각각의 이득 부호에 따라 영점이 존재하는 구간이 달라지며 그에 따른 계단응답 특성도 달라지는데 이 특성은 그림 4와 같이 세 개의 극점과 원점으로 구분되는 영역으로 나누어 생각할 수 있다.

그림 3에서 각각의 영역은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \mu_{0,\infty} &= \{z : G(z) = 0, 0 < z < \infty\} \\ \mu_{1,0} &= \{z : G(z) = 0, p_1 < z < 0\} \\ \mu_{2,1} &= \{z : G(z) = 0, p_2 < z < p_1\} \\ \mu_{3,2} &= \{z : G(z) = 0, p_3 < z < p_2\} \\ \mu_{-\infty,3} &= \{z : G(z) = 0, -\infty < z < p_3\} \end{aligned} \quad (14)$$

그리고  $\mu_{0,\infty}$ ,  $\mu_{1,0}$ ,  $\mu_{2,1}$ ,  $\mu_{3,2}$ ,  $\mu_{-\infty,3}$ 의 영역에 있는 영점의 개수라고 하면 [8]에 의해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$m_{1,0} + m_{0,\infty} \leq \eta \leq m_{1,0} + m_{0,\infty} + m_{2,1} + m_{3,2} - p_1 - p_2 \quad (15)$$

이때  $\eta$ 는 시스템의 계단응답에 존재하는 극대·극소점(local extrema)의 개수이며  $p_1$ 과  $p_2$ 는 각각  $m_{2,1}$ 과  $m_{3,2}$ 가 홀수일 경우 1이고 짝수일 경우 0이다. 그림 3은 실영점을 갖는 경우를 위한 분류이고 3차형 시스템의 경우에는 공액복소(complex conjugate)영점을 갖는 경우도 존재하는데 이 경우는 모두 Case 3에 속한다. 이에 대한 계단응답 특성은 IV 장에서 자세히 다룬다.

정리 1: 식 (9)와 같이 세 개 부시스템의 덧셈형 등가모

델로 표현한 3차 시스템에 대해서 다음의 관계가 성립한다.

- 1)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_2 \in \mu_{3,2}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 2)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_3 p_3| < |a_1 p_1 + a_2 p_2|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 3)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_3 p_3| > |a_1 p_1 + a_2 p_2|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ 이며 A형 하향초과를 갖는다.
- 4)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_2 p_2 + a_3 p_3| < |a_1 p_1|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{3,2}$ ,  $z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 5)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_2 p_2 + a_3 p_3| > |a_1 p_1|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{3,2}$ ,  $z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 이며 A형 하향초과를 갖는다.
- 6)  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{3,2}$ ,  $z_2 \in \mu_{1,0}$ 이며 상향초과를 갖는다.
- 7)  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 이고  $|a_1 p_1 + a_2 p_2| < |a_3 p_3|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ 이며 단조증가 계단응답을 갖는다.
- 8)  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 이고  $|a_1 p_1 + a_2 p_2| > |a_3 p_3|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 이며 A형 하향초과를 갖는다.
- 9)  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_1 p_1 + a_2 p_3| < |a_2 p_2|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{1,0}$ ,  $z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ 이며 상향초과를 갖는다.
- 10)  $a_1 < 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 < 0$ 이고  $|a_1 p_1 + a_2 p_3| > |a_2 p_2|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{1,0}$ ,  $z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 이며 상향초과와 A형 하향초과를 함께 갖는다.
- 11)  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 이고  $|a_2 p_2| > |a_1 p_1 + a_3 p_3|$ 인 경우  $z_1 \in \mu_{-\infty,3}$ ,  $z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 이며 A형 하향초과를 갖는다.
- 12) 시스템이 공액복소영점을 갖는 경우  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 이다.
- 13) 나머지의 경우 즉,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 이고  $|a_2 p_2| < |a_1 p_1 + a_3 p_3|$ 이며 두 개의 실영점을 갖는 경우  $z_1, z_2 \in \mu_{-\infty,3}$ ,  $z_1, z_2 \in \mu_{3,2}$ ,  $z_1, z_2 \in \mu_{2,1}$ ,  $z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$  또는  $z_1, z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 이다.

증명: 시스템의 두 영점을  $z_1$ ,  $z_2$ 라고 하면 시스템 전달 함수의 분자다항식은 다음과 같다.

$$\left( -\frac{1}{z_1} s + 1 \right) \left( -\frac{1}{z_2} s + 1 \right) = \frac{1}{z_1 z_2} s^2 - \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} s + 1 \quad (16)$$

이 식과 식 (10)과의 계수비교법에 의해 각각의  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{p_2 p_3 \{(p_1 - z_1)(p_1 - z_2)\}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) z_1 z_2} \quad (17a)$$

$$a_2 = -\frac{p_1 p_3 \{(p_2 - z_1)(p_2 - z_2)\}}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3) z_1 z_2} \quad (17b)$$

$$a_3 = \frac{p_1 p_2 \{(p_3 - z_1)(p_3 - z_2)\}}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_3) z_1 z_2} \quad (17c)$$

이 관계에서 만약 두 영점의 부호가 다르다면  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ 의 부호관계에 의해 (17)로부터 다음을 만족해야 한다.

$$(p_1 - z_1)(p_1 - z_2) < 0 \quad (18a)$$

$$(p_2 - z_1)(p_2 - z_2) > 0 \quad (18b)$$

$$(p_3 - z_1)(p_3 - z_2) < 0 \quad (18c)$$

만약  $z_2$ 가 0보다 크다면 식 (18)의 좌변의 첫항들은 모두 0보다 작으므로 다음을 만족해야 한다.

$$p_1 > z_1 \quad (19a)$$

$$p_2 < z_1 \quad (19b)$$

$$p_3 > z_1 \quad (19c)$$

그런데  $p_2 < p_1$ 이기 때문에 (19a) 와 (19b)를 동시에 만족하는  $z_1$ 은 존재할 수 없으므로  $z_1$ 과  $z_2$ 의 부호는 같다. 따라서 이 시스템의 극영점은 다음의 부등식을 만족한다.

$$(p_1 - z_1)(p_1 - z_2) > 0 \quad (20a)$$

$$(p_2 - z_1)(p_2 - z_2) < 0 \quad (20b)$$

$$(p_3 - z_1)(p_3 - z_2) > 0 \quad (20c)$$

이 부등식으로부터 두 영점은  $p_1$ 과  $p_3$  사이에 있고, 하나의 영점은  $p_2$ 보다 크고 나머지 하나는  $p_2$ 보다 작음을 알 수 있다. 또한 식 (15)의 관계에 적용하면  $\eta = 0$ 이 되어 이 시스템은 극대 · 극소점을 갖지 않는 단조증가계단응답을 가진다. 2)~11)의 경우도 같은 방법으로 증명된다. 단 9)와 10)에 대해 좀더 살펴보면 9)의 경우  $|a_1p_1 + a_3p_3| < |a_2p_2|$ 의 관계로부터 두 영점의 부호가 같음을 알 수 있다. 따라서 식 (20)의 부등식은 다음의 관계를 갖는다.

$$(p_1 - z_1)(p_1 - z_2) < 0 \quad (21a)$$

$$(p_2 - z_1)(p_2 - z_2) < 0 \quad (21b)$$

$$(p_3 - z_1)(p_3 - z_2) < 0 \quad (21c)$$

이 부등식으로부터 한 개의 영점은  $p_1$ 과 원점 사이에 있고 나머지 한 개는  $p_3$ 보다 작음을 알 수 있다. 이 관계를 식

(15)에 적용하면 극대 · 극소점을 한 개 가짐을 알 수 있는데 한 개의 극대 · 극소점을 갖기 위해서는 A형 하향초과 또는 상향초과의 경우의 수 밖에 없다. 그런데 [5]에 의해 흘수개의 우반영점을 갖지 않기 때문에 하향초과가 아닌 상향초과를 갖는 계단응답을 갖는다.

10)의 경우에는  $|a_1p_1 + a_3p_3| > |a_2p_2|$ 인 관계로부터 두 영점의 부호가 다름을 알 수 있다. 따라서 영점과 극점의 관계부등식은 다음과 같다.

$$(p_1 - z_1)(p_1 - z_2) > 0 \quad (22a)$$

$$(p_2 - z_1)(p_2 - z_2) > 0 \quad (22b)$$

$$(p_3 - z_1)(p_3 - z_2) > 0 \quad (22c)$$

이 부등식으로부터 한 개의 영점은 우반면에 있고 다른 한 개는  $p_1$ 과 원점 사이에 있음을 알 수 있다. 이 관계를 식 (15)에 적용하면 두 개의 극대 · 극소점을 갖는데 흘수개의 우반영점을 갖기 때문에 한 개의 극대 · 극소점은 A형 하향초과이고 나머지 극대 · 극소점은 상향초과의 형태가 된다.

12)의 경우를 살펴보기 위해 두 영점을  $z_1 = \alpha + j\beta$ ,  $z_2 = \alpha - j\beta$ 라고 놓으면 식 (17)은 다음과 같이 정리된다.

$$a_1 = \frac{p_2p_3\{(p_1 - \alpha)^2 + \beta^2\}}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(\alpha^2 + \beta^2)} > 0 \quad (23a)$$

$$a_2 = -\frac{p_1p_3\{(p_2 - \alpha)^2 + \beta^2\}}{(p_1 - p_2)(p_2 - p_3)(\alpha^2 + \beta^2)} < 0 \quad (23b)$$

$$a_3 = \frac{p_1p_2\{(p_3 - \alpha)^2 + \beta^2\}}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)(\alpha^2 + \beta^2)} > 0 \quad (23c)$$

어떤  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 대해서도 부등식이 성립하므로 12)의 관계가 증명된다. 단 이 경우에 발생할 수 있는 극대 · 극소점의 개수와 성질에 대해서는 4장에서 다룬다.

13)은 3차형 시스템이 가질 수 있는 1)~12)를 제외한 나

표 4. 계단응답과 부시스템의 이득의 부호와의 관계.

Table 4. Relationship between step response and DC gain of the subsystems.

Case #	$a_1$ 부호	$a_2$ 부호	$a_3$ 부호	응답특성	
				단조증가	
1	+	+	+		
2	+	+	-	$a_1 + a_2 > (a_1p_1 + a_2p_2)/p_3 > -a_3$ : 단조증가 $a_1 + a_2 > -a_3 > (a_1p_1 + a_2p_2)/p_3$ : A형 하향초과 발생	
3	+	-	+	$a_1 + a_3 > -a_2 > (a_1p_1 + a_3p_3)/p_2$ : A형 하향초과 발생 $a_1 + a_3 > (a_1p_1 + a_3p_3)/p_2 > -a_2$ : 4장에서 다름	
4	-	+	+	상향초과 발생	
5	+	-	-	$a_1 > -(a_2p_2 + a_3p_3)/p_1 > -(a_2 + a_3)$ : 단조증가 $-(a_2p_2 + a_3p_3)/p_1 > a_1 > -(a_2 + a_3)$ : A형 하향초과 발생	
6	-	+	-	$a_2 > -(a_1p_1 + a_3p_3)/p_2 > -(a_1 + a_3)$ : 상향초과 발생 $-(a_1p_1 + a_3p_3)/p_2 > a_2 > -(a_1 + a_3)$ : A형 하향초과, 상향초과	
7	-	-	+	상향초과 발생	
8	-	-	-	$a_1 + a_2 + a_3 > 0$ 을 만족하지 않음 (case 1과 반대의 이득을 가지며 동특성은 같음)	

며지 경우이며 극대·극소점의 개수와 성질에 대해서는 IV 장에서 다룬다. ■

이 결과들을 요약하면 표 4와 같다. 알려진 바와 같이 단조증가하는 부시스템들의 단순합으로 표현되는 시스템의 경우에는 단조증가하는 응답을 얻게 된다. 그러나 응답이 단조증가하지 못하고 하향초과 또는 상향초과를 갖는 경우는 더해지는 부시스템들의 이득 부호가 서로 다른 경우에 속하고 그중에서도 음의 방향에 해당하는 이득의 영향이 표 4에 명시된 값 이상으로 커질 경우에 발생함을 알 수 있다. 한 개의 극대·극소점을 갖는 경우인 A형 하향초과 또는 상향초과를 갖는 경우, 그리고 두 개의 극대·극소점을 갖되 한 개는 A형 하향초과 그리고 다른 한 개는 상향초과인 경우는 쉽게 정리가 가능하다. 그러나 두 개의 극대·극소점을 갖는 경우는 조금 더 복잡한 양상을 갖는다. 이에 대한 관계는 다음 장에서 다룬다.

#### IV. 극대·극소점(local extrema)

한 개의 극대·극소점을 갖는 경우 또는 두 개의 극대·극소점을 갖되 A형 하향초과와 상향초과의 형태로 나타나는 경우는 보조정리 1을 통해 확인할 수 있다. 이 장에서는 표 4의 Case 3에 해당하는 경우에 대해 좀 더 자세히 살펴보며 영점의 배치가 두 개의 극대·극소점을 유발하는 경우에 대해 다룬다. 편의상 복소영점을 갖는 경우와 실영점을 갖는 경우로 나누어 살펴보기로 한다.

보조정리 2: 식 (9)의 3차 시스템에서  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_3 > 0$ 인 경우에 대해서 두 개의 극대·극소점(local extrema)을 갖는 필요충분조건은 다음과 같다.

$$-a_2 > \frac{p_3 - p_1}{p_2} \left( \frac{a_1 p_1}{p_3 - p_2} \right)^{\frac{p_3 - p_2}{p_3 - p_1}} \left( \frac{a_3 p_3}{p_2 - p_1} \right)^{\frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1}} \quad (24)$$

증명: 식 (9) 시스템에서 단위계단응답을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(t) &= a_1(1 - e^{p_1 t}) + a_2(1 - e^{p_2 t}) + a_3(1 - e^{p_3 t}) \\ &= 1 - a_1 e^{p_1 t} - a_2 e^{p_2 t} - a_3 e^{p_3 t} \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 둘째 등식은 직류이득  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ 인 가정에서 유도된 것이다. 식 (25)에서  $y(t)$ 를 미분하면 다음과 같으므로

$$y'(t) = -a_1 p_1 e^{p_1 t} - a_2 p_2 e^{p_2 t} - a_3 p_3 e^{p_3 t} = 0 \quad (26)$$

이 식을 만족하는 점이  $y(t)$ 가 극대·극소점을 갖는 점이 된다. 편의상  $\tilde{a}_1 = a_1 p_1$ ,  $\tilde{a}_2 = -a_2 p_2$ ,  $\tilde{a}_3 = a_3 p_3$ 로 놓고 정렬한 다음

$$\tilde{a}_2 e^{p_2 t} = \tilde{a}_1 e^{p_1 t} + \tilde{a}_3 e^{p_3 t} = \left\{ \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} e^{(p_3 - p_1)t} + 1 \right\} \tilde{a}_1 e^{p_1 t}$$

양변에 자연로그를 취하여 정리하면 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{y}(t) = (p_2 - p_1)t - \ln \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} - \ln \left\{ \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} e^{(p_3 - p_1)t} + 1 \right\} = 0$$

여기서  $\tilde{y}(t)$ 는 항상 위로 볼록한 함수임을 보일 수 있으며 따라서  $\tilde{y}'(t_e) = 0$ 을 만족하는  $t_e$ 에 대해  $\tilde{y}(t_e) > 0$ 가 되는 조건을 찾으면 두 개의 극대·극소점 존재에 대한 필요충분조건이 된다. 이를 위해  $\tilde{y}'(t_e) = 0$ 을 만족하는  $t_e$ 를 구하면 다음과 같고

$$t_e = \frac{1}{p_3 - p_1} \ln \left\{ \frac{\tilde{a}_1(p_2 - p_1)}{\tilde{a}_3(p_3 - p_2)} \right\}$$

이것을  $\tilde{y}(t)$ 에 대입하면

$$\tilde{y}(t_e) = (p_2 - p_1)t_e - \ln \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} - \ln \left\{ \frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_1} e^{(p_3 - p_1)t_e} + 1 \right\}$$

두 개의 극대·극소점 존재조건을 구할 수 있다.

$$\tilde{y}(t_e) = \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1} \ln \left\{ \frac{\tilde{a}_1(p_2 - p_1)}{\tilde{a}_3(p_3 - p_2)} \right\} - \ln \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} - \ln \left\{ \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_2} + 1 \right\} > 0$$

위의 부등식을  $a_2$ 에 대해 정리하면 (24)의 부등식이 유도된다. ■

##### 1. 공액복소영점의 경우

우반 영점은 하향초과를 유발하고 주극점보다 느린 좌반 영점은 상향초과를 유발하며, 우반 짹수개의 영점은 B형 하향초과를 유발한다는 것이 일반적으로 알려져 있다. 그러나 공액복소영점을 갖는 경우에는 이 조건이 성립하지 않는 경우가 존재하는데 다음의 정리를 통해 확인할 수 있다.

정리 2: 3차 시스템의 영점이 공액복소영점( $z = \alpha \pm j\beta$ )인 경우 주극점이  $a - \beta$ 보다 좌측에 위치하면 계단응답은 단조증가하지 않는다.

증명: 보조정리 2의 식 (24)에서  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ 에 (23)을 대입해 시스템의 응답이 단조증가하기 위한 조건으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\{(p_2 - \alpha)^2 + \beta^2\}^{p_1 - p_3} \\ &< \{(p_1 - \alpha)^2 + \beta^2\}^{p_2 - p_3} \{(p_3 - \alpha)^2 + \beta^2\}^{p_1 - p_2} \end{aligned}$$

만약 0보다 큰 임의의  $\epsilon$ 에 대해  $p_1 = \alpha - \beta - \epsilon$ 라고 가정하자.  $p_3 < p_2 < p_1$ 을 만족하기 위해  $p_2 = p_1 - \epsilon$ ,  $p_3 = p_2 - \epsilon$ 이라고 놓으면 위식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2\beta^2 + 4\epsilon\beta + 4\epsilon^2}{2\beta^2 + 6\epsilon\beta + 9\epsilon^2} \right\}^{\alpha - \beta - \epsilon} < \left\{ \frac{2\beta^2 + 4\epsilon\beta + 4\epsilon^2}{2\beta^2 + 2\epsilon\beta + \epsilon^2} \right\}^{\alpha - \beta - 3\epsilon} \\ &\cdot \left\{ \frac{2\beta^2 + 2\epsilon\beta + \epsilon^2}{2\beta^2 + 6\epsilon\beta + 9\epsilon^2} \right\}^{\alpha - \beta - 2\epsilon} \end{aligned}$$

이것을 다시 정리하면 다음과 같고

$$(2\beta^2 + 4\epsilon\beta + 4\epsilon^2)^2 < (2\beta^2 + 2\epsilon\beta + \epsilon^2)(2\beta^2 + 6\epsilon\beta + 9\epsilon^2)$$

이것을 다시 전개해서 공통항을 소거하면 다음과 같이 되어

$$32\epsilon^3\beta + 16\epsilon^4 < 24\epsilon^3\beta + 9\epsilon^4$$

부등식이 성립하지 않음을 알 수 있다. 그러므로 이 시스템

은 단조증가하지 않는다.

예제 1: 시스템의 영점이  $z = -0.1 \pm j1$ 이라면 주극점을  $-1.1$ 보다 빠르게 설계하면 극대 · 극소점이 두 개 존재한다. 아래의 그림 4는 세 개의 극점을 각각  $-1.2, -1.3, -1.4$ 에 놓은 극영점도와 계단응답이다.

예제 1에서 극점을 더욱 빠르게, 즉 원점으로부터 멀리 설계하면 아래로 향하는 극대 · 극소점이 0보다 작아질 만큼 내려오며 B형 하향초과의 형태를 갖는다. 만약 주극점을  $-1.1$ 에 놓는다면 중간극점 또는 빠른 극점을  $-1.1$ 보다 빠르게(좌측에) 놓을 경우 극대 · 극소점이 발생한다. 그리고 주극점을  $-1.1$ 보다 느리게 설계한다면 중간극점 또는 빠른극점은  $-1.1$ 보다 약간 빠르게 놓아도 단조증가하는 조건을 만족할 수 있다. 그러나 주극점과 중간극점을  $-1.1$ 보다 느리게 설계했더라도 빠른극점이 많이 멀어지면 극대 · 극소점을 갖게된다.

예제 2: 시스템의 공액복소영점이 불안정한 영역에 있어도 단조증가 계단응답을 가질 수 있다. 아래의 그림 5(a)은 우반면인  $0.5 \pm j3$ 에 영점이 위치하고 세 개의 극점은 각각  $-1, -2, -3$ 에 위치하는 경우의 계단응답이다. 반면에, 영점이  $3 \pm j0.5$ 인 경우에는 그림 5(b)에서 보는 바와 같이 계단응답이 단조증가하지 않는다.

따름정리 1:  $z = \alpha \pm j\beta$ 의 공액복소영점을 갖는 3차 시스템에 대해  $\alpha > \beta$ 이고 시스템이 안정하다면 계단응답은 단조증가하지 않는다.

증명: 정리 2의 단조증가조건을 만족하기 위해  $\alpha - \beta$ 보다 우측에 주극점이 존재해야 한다. 그런데  $\alpha - \beta$ 가 0보다 크기 때문에 주극점은 정리 3을 만족할 수 없으므로 이 시스템의 계단응답은 단조증가하지 않는다.

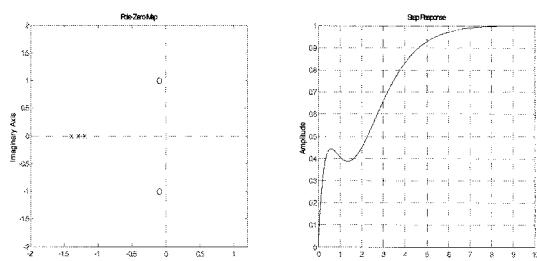


그림 4. 극영점도와 두 극대 · 극소점을 갖는 계단응답.

Fig. 4. Pole-zero map and step response with two local extrema.

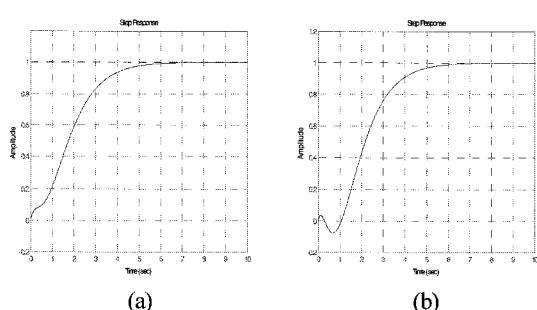


그림 5. 복소영점과 계단응답.

Fig. 5. Step response with complex conjugate zeros.

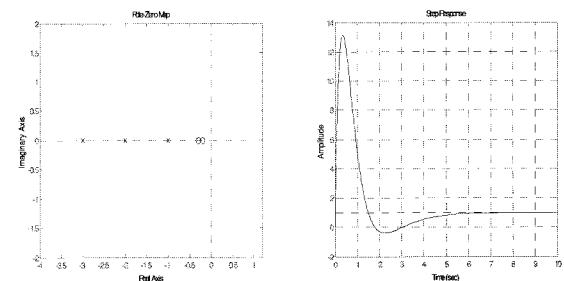


그림 6. B형 하향초과를 갖는 예제( $z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$ ).

Fig. 6. An example with B type undershoot( $z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$ ).

#### 4.2 실영점의 경우

이제 남은 것은  $z_1, z_2 \in \mu_{-\infty, 3}, z_1, z_2 \in \mu_{3,2}, z_1, z_2 \in \mu_{2,1}, z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$  또는  $z_1, z_2 \in \mu_{0,\infty}$  인 경우이다.

익숙한 결과로서  $z_1, z_2 \in \mu_{0,\infty}$ 인 경우에는 계단응답에 B형 하향초과가 발생한다. 그리고  $z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$ 의 경우 극대 · 극소점의 하한이 2이고 상한이 2이므로 2개의 극대 · 극소점을 갖는다. 이때 한 개의 영점이  $p_1$ 에 가까우면  $z_1, z_2 \in \mu_{2,1}$ 인 경우 극대 · 극소점의 상한이 0이다. 그러나  $z_1, z_2 \in \mu_{2,1}$  또는  $z_1, z_2 \in \mu_{1,0}$ 의 경우는 극대 · 극소점의 하한은 0이고 상한은 2가 된다.

예제 3: 위의 그림과 같이  $p_1 = -1, p_2 = -2, p_3 = -3, z_1 = -0.2, z_2 = -0.3$ 인 시스템에 대해 고려해보자. 이 극 · 영점의 관계를 식 (15)에 적용하면  $n = 2$ 이 되어 그림 6과 같이 계단응답에 두 개의 극대 · 극소점이 존재함을 알 수 있다. B형 하향초과의 경우는 이 예제에서와 같이 영점이 안정한 영역에 있어도 발생가능하다.

$z_1, z_2 \in \mu_{2,1}$ 의 경우는  $0 \leq \eta \leq 2$ 이 되어 극대 · 극소점이 없을 수도 있고 2개가 존재할 수도 있다. 한 개 또는 두 개의 영점이  $p_2$ 에 가까우면 극대 · 극소점이 발생하지 않고 두 개의 영점이 모두  $p_2$ 에 가까우면 두 개의 극대 · 극소점이 발생한다. 이것은 식(24)에 의해 판별할 수 있는데 이 경우 발생하는 두 개의 극값은 위로불록한 영역은 상향초과의 형태이고 아래로 불록한 영역의 영향은 매우 작다.

$z_1, z_2 \in \mu_{3,2}$ 의 경우는  $0 \leq \eta \leq 2$ 이 되어 극대 · 극소점이 없을 수도 있고 2개가 존재할 수도 있다. 그러나  $z_1 < p_2, z_2 < p_2$ 라는 관계를 식 (17)을 거쳐 식(24)에 대입해보면 극대 · 극소점을 유발하지 않는다는 결과를 얻을 수 있다. 마지막으로  $z_1, z_2 \in \mu_{-\infty, 3}$ 의 경우는  $\eta = 0$ 이 되어 단조증가하는 계단응답을 갖는다.

#### V. 결론

제어시스템의 성능지표로써 계단응답이 어떤 특성을 갖는지에 대한 고찰은 매우 중요하다. 극점은 되먹임을 통해 그 위치를 변화시킬 수 있지만 영점은 추가하거나 상쇄시키는 방법 말고는 어떤 되먹임 제어방식을 통해서도 위치를 변화시킬 수 없다. 이 논문에서는 2차와 3차 시스템을 1차 부시스템(subsystem)의 덧셈형 등가모델로 표현하여 각

부시스템 이득 부호의 경우에 따라 영점이 존재하는 영역이 달라짐을 보이고 그 영역에 따른 계단응답 특성을 제시하였다. 실영점의 경우 하향초과는 영점이 불안정한 영역에 있을 때에만 발생하지만, 예제 3에서 보인 바와 같이 B형 하향초과의 경우에는 영점이 안정한 영역에 있을 때에도 발생할 수 있다. 또한 기존의 결과에서는 계단응답의 단조증가 여부를 명확히 판단하기 어려운 영역인  $z_1, z_2 \in \mu_{3,2}$  와  $z_1, z_2 \in \mu_{2,1}$ 의 경우에 대해서 전자는 항상 단조증가응답을 가지며, 후자의 경우는 식 (24)를 사용해 단조증가 여부를 판별할 수 있다.

시스템의 영점에 대해 다른 기존의 연구결과들은 실영점에 한정되어 있었다. 원점에 가까운 허수영점을 갖는 경우에 대해서는 주파수영역에서의 제약조건을 다룬 문헌은 있지만 시간영역에서의 응답특성을 다룬 것은 그다지 많지 않다. 이 논문에서는 공액복소영점을 갖는 경우에 대해서 일반적으로 알려져있는 바와 달리, 안정한 영점이어도 하향초과가 발생할 수 있고, 불안정한 영점이어도 단조증가할 수 있다는 것을 보였으며 주어진 공액복소영점에 대해 각각의 실수, 허수값과 실극점들로 구성된 단조증가 계단응답을 갖기 위한 판별식을 제시하였다.

고차 시스템의 계단응답특성을 직접 분석하는 것은 쉽지 않다. 이 논문에서는 비록 실극점을 갖는 2차와 3차 시스템에 한정하여 이론이 전개되어 있지만 4차 이상의 고차시스템들은 2차나 3차 부시스템들로 분할할 수 있으므로 이 논문의 결과와 개념을 확장하여 적용할 수 있으며, 고차시스템의 영점과 응답에 대한 관계를 보다 직관적으로 이해하는데 도움이 될 것으로 기대된다. 다만, 복소극점을 갖는 경우에 대응하는 결과를 유도하는 것은 향후 풀어야 할 과제이다.

### 참고문헌

- [1] B. M. Kwon, M. E. Lee, and O. K. Kwon, "On nonovershooting or Monotone nondecreasing step response of second-order systems," *Transaction on Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 4, no. 4, pp. 283-288, Dec. 2002.
- [2] B. Kouvaritakis and A. G. J. Macfarlane, "Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros: Part 1. Square systems," *International Journal of Control*, vol. 23, no. 2, pp. 149-166, 1976.
- [3] B. C. Kuo, *Automatic Control Systems* 7th Ed., Prentice Hall, 1995.
- [4] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.
- [5] M. Vidyasagar, "On undershooting and nonminimum phase zeros," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, no. 5, p. 440, May 1986.
- [6] K. Iino and R. J. Altpeter, "Inverse response in process control," *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 54, no. 7, pp. 39-43, July 1962.
- [7] T. Mita and H. Yoshida, "Undershooting phenomenon and its control in linear multivariable servomechanisms," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 2, pp. 402-407, Apr. 1981.
- [8] M. El-khoury, O. D. Crisalle, and R. Longchamp, "Influence of zero locations on the number of step-response extrema," *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1571-1574, 1993.



### 이상용

1998년 인하대학교 전기공학과 졸업.  
2000년 동 대학원 졸업(공학석사). 2000  
년~2003년 동 대학원 박사과정 수료.  
2004년~2007년 퓨얼셀파워 부설연구소  
선임연구원. 2007년~현재 인하대학교  
전기공학과 대학원 박사과정 재학중.  
관심분야는 공정제어, 선형제어시스템.