

축소 의사역행렬을 이용한 영역분할 기반 축소모델 구축기법 연구

Reduction Method based on Sub-domain Structure using Reduced Pseudo Inverse Method

김 현 기†

조 맹 효*

Kim, Hyungi

Cho, Maenghyo

(논문접수일 : 2009년 2월 9일 ; 심사종료일 : 2009년 4월 21일)

요 지

축소시스템은 반복적인 계산이 요구되는 문제에서 매우 유용하게 적용될 수 있는 해석 기법이다. 최근에는 영역분할 기법과의 연동을 통해 축소시스템의 효율성이 향상되었다. 그러나, 전체 도메인이 몇 개의 영역으로 분할될 때 구속조건이 부과되지 않는 영역이 만들어지게 된다. 각 부영역에서 축소시스템을 구축하기 위해서는 주자유도가 선정되어야 하고, 이를 위해서는 리츠벡터를 추출해야 한다. 리츠벡터 계산은 구속조건이 부과된 부영역에서는 일반적인 정적해석을 통해 가능하나, 경계조건이 부과되지 않은 부영역에서는 의사역행렬을 이용해야 한다. 일반적으로, 의사역행렬의 사용은 상당한 계산 시간과 전산자원을 필요로 하는 문제점이 있다. 본 연구에서는 이 문제점을 개선하기 위해 축소 의사역행렬 도입을 제안한다. 이 방법은 정적 축소방법을 기초로 축소 의사역행렬을 구축하여 축소된 리츠벡터 정보를 추출하고, 변환관계를 통해 전체 리츠벡터 정보를 구한다. 수치예제에서는 일반적인 의사역행렬 계산시간 및 고유치 해석 결과의 비교를 통해 제안방법의 효율성과 신뢰성을 검증한다.

핵심용어 : 영역분할 기법, 축소시스템, 의사 역행렬, 주자유도, 부자유도

Abstract

Reduction scheme is remarkably useful in the case requiring the repeated calculation procedure. Recently, the efficiency of the reduction scheme has been improved by combining scheme of sub-domain method. But, when the global domain is partitioned into a few sub-domains, sub-domains without constraints can be produced. it is needed to extract the ritz vector from each sub-domain to construct the reduced system of each sub-domain. it is easy to extract the ritz vector from sub-domain with constraint. on the other hand, pseudo inverse method should be employed to extract the ritz vector from sub-domain without constraint. generally, the pseudo inverse takes a large number of computing time to obtain a reduced system of a sub-domain without boundary condition. This trouble can be overcome by the reduced pseudo inverse scheme which proposed in this study. This scheme is based on the static condensation that is not related with selection of the primary degrees of freedom. Numerical examples demonstrate that present method saves computational cost effectively. In addition, it is shown that the reduced system based on the proposed scheme predicts the accurate eigenvalues of global system.

Keywords : sub-domain method, reduced system, pseudo inverse method, Primary DOF, Secondary DOF

1. 서 론

최근 해석이 필요한 구조물의 규모가 대형화되거나 형상이 복

잡해지고 있으며 설계를 위한 설계변수 등도 증가됨에 따라 최적화 문제 또는 동적 해석 등에서 충분한 전산자원과 많은 연산시간을 요구하고 있으며, 이는 해석을 수행하는 과정에서

† 책임저자, 한국항공우주연구원 선임연구원

E-mail: shotgun1@kari.re.kr

* 교신저자, 서울대학교 기계항공공학부 교수

Tel: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1693

E-mail: mhcho@snu.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시
면 2009년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

많은 제약의 원인이 되고 있다. 이런 문제 때문에 구조물의 신뢰성을 유지하면서 시간과 전산자원 등의 효율성 문제를 개선하고자 하는 연구들이 진행되어 왔다. 이런 기법 중에서 가장 널리 제안 되어온 것이 축소모델을 구성하는 방법이다 (Guyan, 1965; Kidder, 1973; Hensell 등, 1975; Shah 등, 1982; Matta, 1987; O'Callahan, 1989; Zhang 등, 1995; Kim 등, 2000; Cho 등, 2004; Kim 등, 2006).

축소모델 연구는 두 가지 방향에서 진행되어 왔다. 하나는 구조물의 거동에 중요한 역할을 하는 몇 개의 모드를 기초로 하여 시스템을 구축하는 축소모델(Reduce-Order Model, ROM) 방법이며, 다른 하나는 추출된 중요자유도를 기반으로 축소시스템(Reduced System Method, RSM)을 구성하는 방법이다.

자유도 기반 축소시스템은 고유치 문제 또는 동적해석 등에 있어서 ROM 보다 상당히 정확한 해석결과를 제공할 수 있다. 그러나, 축소시스템은 시간비용의 비효율성과 부적절한 자유도 선정 문제 때문에 상대적으로 구축이 간편한 ROM이 널리 쓰이고 있다(Kim, 1998; Gaitonde 등, 2003; Roger Ohayon, 2004).

최근에는 축소시스템 구축시 문제가 되었던 중요 자유도 선정방법이 개선되었고, 영역분할기법과의 연동을 통해 계산의 효율성도 매우 높아졌다(Kim 등, 2007).

그러나, 전체시스템을 몇 개의 부영역으로 분리하게 되면 경계조건이 부과되지 않은 부영역이 발생하게 된다. 이것은 축소시스템 구축시 중요 자유도 선정을 위해 필요한 정보인 리츠벡터를 추출할 때 상당한 계산시간이 소요되는 원인이 된다.

본 연구에서는 경계조건 free 상태의 singular 시스템에서 근사 리츠벡터를 얻기 위해 효율적으로 적용할 수 있는 축소 의사역행렬 방법(Reduced Pseudo Inverse Method, RPIM) 을 제안한다. 제안방법은 중요자유도 선정위치와 무관한 정적축소법(Static Condensation Method)에 기초한 것으로 강성행렬과 질량행렬의 비가 가장 큰 자유도들을 주 자유도(Primary DOF, PDOF)로 한번에 선정하며, RPIM 으로부터 얻어진 리츠벡터는 각 부영역의 PDOF 선정을 위해 중요한 정보를 제공하게 된다.

2장에서는 기존 연구에서 수행되어 왔던 축소시스템과 영역분할 방법의 연동 정식화 과정을 소개한다. 3장에서는 RPIM 을 이용한 축소모델 구축 schematic을 보여주고, 4 장에서는 수치예제를 통해 RPIM 과 일반적인 의사역행렬에 의한 계산시간 및 고유치 해석 결과를 비교하여 제안방법의 신뢰성을 검증한다.

2. 영역분할 기반 축소시스템

2.1 다중영역에서의 축소시스템 정식화

그림 1은 전체시스템을 두 개의 부영역으로 나눈 것이다. 각 부영역에서 PDOF는 u_p , SDOF(Secondary DOF)는 u_s , 인터페이스 자유도(Interface DOF, IDOF)는 u_b 로 표현한다. 식 (1)은 두 영역을 인터페이스 자유도를 매개로 하여 결합한 고유치 식을 보여주고 있다.

$$\begin{pmatrix} K_{pp}^{(1)} & K_{ps}^{(1)} & K_{pb}^{(1)} \\ K_{sp}^{(1)} & K_{ss}^{(1)} & K_{sb}^{(1)} \\ K_{tp}^{(1)} & K_{ts}^{(1)} & K_{tb}^{(1)} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} M_{pp}^{(1)} & M_{ps}^{(1)} & M_{pb}^{(1)} \\ M_{sp}^{(1)} & M_{ss}^{(1)} & M_{sb}^{(1)} \\ M_{tp}^{(1)} & M_{ts}^{(1)} & M_{tb}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_b \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

여기서, $K_{bb} = K_{bb}^{(1)} + K_{bb}^{(2)}$, $M_{bb} = M_{bb}^{(1)} + M_{bb}^{(2)}$, 위 첨자 (1)과 (2)는 부영역 1과 2를 의미한다.

축소시스템을 구축하기 위해서 각 부영역의 SDOF가 제거 되어야 한다. 이를 위해 식 (1)의 두 번째와 네 번째 열로부터 부영역 1과 부영역 2의 SDOF는 식 (2)와 식 (3)과 같이 PDOF와 IDOF로 표현할 수 있다.

$$u_s^{(1)} = - \left(K_{ss}^{(1)} - \lambda M_{ss}^{(1)} \right)^{-1} \left\{ \left(K_{sp}^{(1)} - \lambda M_{sp}^{(1)} \right) u_p^{(1)} - \left(K_{sb}^{(1)} - \lambda M_{sb}^{(1)} \right) u_b \right\} \quad (2)$$

$$u_s^{(2)} = - \left(K_{ss}^{(2)} - \lambda M_{ss}^{(2)} \right)^{-1} \left\{ \left(K_{sp}^{(2)} - \lambda M_{sp}^{(2)} \right) u_p^{(2)} - \left(K_{sb}^{(2)} - \lambda M_{sb}^{(2)} \right) u_b \right\} \quad (3)$$

식 (2)를 고유치 1차항을 포함한 식으로 근사화시키면, 부영역 1의 SDOF는 식 (4)와 같이 주어진다.

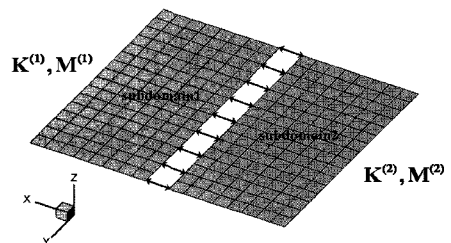


그림 1 평판구조물에서의 영역분할

$$u_s^{(1)} = - [K_{ss}^{(1)}]^{-1} \left\{ \begin{aligned} & [K_{sp}^{(1)} - (M_{sp}^{(1)} - M_{ss}^{(1)} [K_{ss}^{(1)}]^{-1} K_{sp}^{(1)}) \lambda] u_p^{(1)} \\ & + [K_{sb}^{(1)} - (M_{sb}^{(1)} - M_{ss}^{(1)} [K_{ss}^{(1)}]^{-1} K_{sb}^{(1)}) \lambda] u_b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

식 (4)로 부터, 부영역 1의 PDOF, SDOF, IDOF는 식 (5)과 같이 PDOF 및 IDOF로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{sp}^{(1)} & T_{sb}^{(1)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_b \end{bmatrix} \\ &+ [K_{ss}^{(1)}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (M_{sp}^{(1)} + M_{ss}^{(1)} T_{sp}^{(1)}) \lambda & (M_{sb}^{(1)} + M_{ss}^{(1)} T_{sb}^{(1)}) \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $T_{sp}^{(1)} = - [K_{ss}^{(1)}]^{-1} K_{sp}^{(1)}$, $T_{sb}^{(1)} = - [K_{ss}^{(1)}]^{-1} K_{sb}^{(1)}$

식 (5)에 주어진 부영역 1의 변환관계 구축과정과 유사하게, 부영역 2의 PDOF, SDOF, IDOF간의 변환관계는 식 (6)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_b \\ u_s^{(2)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{sb}^{(2)} & T_{sp}^{(2)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} + [K_{ss}^{(2)}]^{-1} \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (M_{sb}^{(2)} + M_{ss}^{(2)} T_{sb}^{(2)}) \lambda & (M_{sp}^{(2)} + M_{ss}^{(2)} T_{sp}^{(2)}) \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5)과 식 (6)을 결합하면, 식 (7)로 주어진 전체시스템에서의 변환관계를 구축할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_b \\ u_s^{(2)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ T_{IRS}^{sp(1)} & T_{IRS}^{sb(1)} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(2)} & T_{IRS}^{sp(2)} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_b \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} = T_G \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_b \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$\begin{aligned} T_{IRS}^{sp(1)} &= T_{sp}^{(1)} + [K_{ss}^{(1)}]^{-1} (M_{sp}^{(1)} + M_{ss}^{(1)} T_{sp}^{(1)}) \lambda \\ T_{IRS}^{sb(1)} &= T_{sb}^{(1)} + [K_{ss}^{(1)}]^{-1} (M_{sb}^{(1)} + M_{ss}^{(1)} T_{sb}^{(1)}) \lambda \\ T_{IRS}^{sb(2)} &= T_{sb}^{(2)} + [K_{ss}^{(2)}]^{-1} (M_{sb}^{(2)} + M_{ss}^{(2)} T_{sb}^{(2)}) \lambda \\ T_{IRS}^{sp(2)} &= T_{sp}^{(2)} + [K_{ss}^{(2)}]^{-1} (M_{sp}^{(2)} + M_{ss}^{(2)} T_{sp}^{(2)}) \lambda \end{aligned}$$

최종적으로, 각 부영역의 축소시스템은 및 전체 축소시스템은 식 (8)~식 (10)으로 구축된다.

부영역 1의 축소시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{pp}^{(11)} & K_{pb}^{(11)} \\ K_{bp}^{(11)} & K_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & T_{IRS}^{sp(1)} & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(1)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{pp}^{(11)} & K_{ps}^{(11)} & K_{pb}^{(11)} \\ K_{sp}^{(11)} & K_{ss}^{(11)} & K_{sb}^{(11)} \\ K_{bp}^{(11)} & K_{bs}^{(11)} & K_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{IRS}^{sp(1)} & T_{IRS}^{sb(1)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{pp}^{(11)} & M_{pb}^{(11)} \\ M_{bp}^{(11)} & M_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & T_{IRS}^{sp(1)} & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(1)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{pp}^{(11)} & M_{ps}^{(11)} & M_{pb}^{(11)} \\ M_{sp}^{(11)} & M_{ss}^{(11)} & M_{sb}^{(11)} \\ M_{bp}^{(11)} & M_{bs}^{(11)} & M_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{IRS}^{sp(1)} & T_{IRS}^{sb(1)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

부영역 2의 축소시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{pp}^{(22)} & K_{pb}^{(22)} \\ K_{bp}^{(22)} & K_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & T_{IRS}^{sp(2)} & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(2)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{pp}^{(22)} & K_{ps}^{(22)} & K_{pb}^{(22)} \\ K_{sp}^{(22)} & K_{ss}^{(22)} & K_{sb}^{(22)} \\ K_{bp}^{(22)} & K_{bs}^{(22)} & K_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{IRS}^{sp(2)} & T_{IRS}^{sb(2)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{pp}^{(22)} & M_{pb}^{(22)} \\ M_{bp}^{(22)} & M_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & T_{IRS}^{sp(2)} & 0 \\ 0 & T_{IRS}^{sb(2)} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{pp}^{(22)} & M_{ps}^{(22)} & M_{pb}^{(22)} \\ M_{sp}^{(22)} & M_{ss}^{(22)} & M_{sb}^{(22)} \\ M_{bp}^{(22)} & M_{bs}^{(22)} & M_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix} I & 0 \\ T_{IRS}^{sp(2)} & T_{IRS}^{sb(2)} \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

전체 축소시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{pp}^{(11)} & K_{pb}^{(11)} \\ K_{bp}^{(11)} & K_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp}^{(22)} & K_{pb}^{(22)} \\ K_{bp}^{(22)} & K_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{pp}^{(11)} & K_{pb}^{(11)} & 0 \\ K_{bp}^{(11)} & K_{bb}^{(11)} & K_{bp}^{(12)} \\ 0 & K_{pb}^{(21)} & K_{pp}^{(22)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_{pp}^{(11)} & M_{pb}^{(11)} \\ M_{bp}^{(11)} & M_{bb}^{(11)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{pp}^{(22)} & M_{pb}^{(22)} \\ M_{bp}^{(22)} & M_{bb}^{(22)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{pp}^{(11)} & M_{pb}^{(11)} & 0 \\ M_{bp}^{(11)} & M_{bb}^{(11)} & M_{bp}^{(12)} \\ 0 & M_{pb}^{(21)} & M_{pp}^{(22)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $K_{bb}^{(ii)} = K_{bb}^{(ii)1} + K_{bb}^{(ii)2}$, $M_{bb}^{(ii)} = M_{bb}^{(ii)1} + M_{bb}^{(ii)2}$

2.2 영역분할기법에 의한 축소시스템의 개선

식 (10)은 모든 인터페이스를 포함하기 때문에 최종 시스템 구축을 위해서는 많은 시간이 요구되며, 해석결과를 얻기 위한 계산비용 측면에서도 상당히 불리하다. 따라서, IDOF에서도 중요하지 않은 성분은 제거되는 것이 적절하다. 이를 위해 강성 및 질량행렬의 IDOF를 인터페이스 주자유도(Interface Primary DOF, IPDOF)와 인터페이스 부자유도(Interface Secondary DOF, ISDOF)로 분리할 수 있으며, 이를 이용하여 고유치 문제를 재구성하면 식 (11)과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{pp}^{(11)} & K_{ps}^{(1i)} & K_{pp}^{(1i)} & 0 \\ K_{sp}^{(i1)} & K_{ss}^{(ii)} & K_{sp}^{(ii)} & K_{ss}^{(i2)} \\ K_{pp}^{(i1)} & K_{ps}^{(ii)} & K_{pp}^{(ii)} & K_{ps}^{(i2)} \\ 0 & K_{ps}^{(2i)} & K_{pp}^{(2i)} & K_{pp}^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(i)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} M_{pp}^{(11)} & M_{ps}^{(1i)} & M_{pp}^{(1i)} & 0 \\ M_{sp}^{(i1)} & M_{ss}^{(ii)} & M_{sp}^{(ii)} & M_{ss}^{(i2)} \\ M_{pp}^{(i1)} & M_{ps}^{(ii)} & M_{pp}^{(ii)} & M_{ps}^{(i2)} \\ 0 & M_{ps}^{(2i)} & M_{pp}^{(2i)} & M_{pp}^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(i)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)의 두 번째 행으로부터 식 (12)와 같이 PDOF, IPDOF, ISDOF 사이의 관계식을 얻을 수 있으며, 이를 통해 ISDOF를 제거할 수 있다.

$$u_s^{(i)} = -(A - \lambda B)^{-1}(C - \lambda D) \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,

$$A = K_{ss}^{(ii)}, B = M_{ss}^{(ii)}, C = [K_{sp}^{(i1)} \ K_{sp}^{(ii)} \ K_{sp}^{(i2)}], D = [M_{sp}^{(i1)} \ M_{sp}^{(ii)} \ M_{sp}^{(i2)}]$$

급수전개를 통해 식 (12)로 부터 IRS 변환행렬은 식 (13)과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} {}^R T_{sp}^{(i1)} & {}^R T_{sp}^{(ii)} & {}^R T_{sp}^{(i2)} \end{bmatrix} = [G T_{sp}^{(i1)} \ G T_{sp}^{(ii)} \ G T_{sp}^{(i2)}] + A^{-1}(D - B A^{-1} C) \lambda \quad (13)$$

여기서, $[G T_{sp}^{(i1)} \ G T_{sp}^{(ii)} \ G T_{sp}^{(i2)}] = -A^{-1}C$ 으로 정적축소법에 의한 변환행렬을 의미하며, λ 는 $(M_G)^{-1}K_G$ 으로 대체될 수 있다.

따라서, 최종적인 변환행렬은 식 (14)와 같이 ISDOF가 제거된 PDF, IPDOF 만으로 구축된다.

$$\begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_s^{(i)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ {}^R T_{sp}^{(i1)} & {}^R T_{sp}^{(ii)} & {}^R T_{sp}^{(i2)} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} = T_R \begin{bmatrix} u_p^{(1)} \\ u_p^{(i)} \\ u_p^{(2)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

3. 축소모델 기반 의사 역행렬

3.1 축소 의사 역행렬

영역분할 기법은 전체구조물을 몇 개의 영역으로 분할한 후, 분할된 영역 단위로 축소시스템을 구축하는 방법으로 각

영역마다 추출된 리츠벡터 정보를 기초로 하여 주자유도를 선정하여 최종시스템을 구축하게 된다. 그러나, 분할되는 모든 영역마다 경계조건이 부과되는 것은 아니기 때문에, 이에 해당하는 부영역에 대해 일반적인 정적해석을 적용하여 리츠벡터를 계산하면 singular가 발생하게 된다. 따라서, 식 (15) 및 식 (16)과 같은 가상역행렬(Pseudo Inverse Method, PIM)을 이용해야 하는데, 이것은 상당한 계산시간과 전산 메모리를 필요로 하게 된다. 여기서, U, V 는 비대칭 행렬이다.

$$Z = U \begin{bmatrix} \Sigma_N \\ 0 \end{bmatrix} V^T \quad (15)$$

$$Z_L^+ = V [\Sigma_N^{-1} \ 0] U^T \quad (16)$$

이를 개선하기 위해 본 연구에서는 축소 의사역행렬(Reduced Pseudo Inverse Method, RPIM)을 도입하여 리츠벡터를 추출하는 방법을 제안한다. 이 방법은 정적축소 방법을 기초로 하기 때문에 계산결과와 정확도가 주자유도 선정 위치 또는 갯수와 무관하다. 임의로 선정된 주자유도를 기초로 해서 각 부영역이 축소되면, 경계조건이 없는 부영역의 축소 의사역행렬은 쉽게 구해지며, 이를 통해 축소시스템 수준의 리츠벡터가 계산된다. 축소시스템 구축에 사용되지 않은 부자유도는 주자유도와 부자유도 사이의 역변환 관계를 통해 환원된다.

정적축소를 위해 식 (17)과 같이 부영역의 변위장은 주자유도와 부자유도로 분리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_p \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p \\ F_s \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서, 하첨자 p, s 는 PDOF와 SDOF를 의미한다. 식 (17)의 두 번째 행을 통해 PDOF와 SDOF 사이의 변환관계가 식 (18)과 같이 구해진다.

$$u_s = (K_{ss})^{-1}(F_s - K_{sp}u_p) \quad (18)$$

식 (18)의 변환관계식을 통해 정적축소식이 식 (19)로 주어진다.

$$\begin{aligned} K_R u_p &= F_R \\ K_R &= (K_{pp} - K_{ps} K_{ss}^{-1} K_{sp}) \\ F_R &= (F_p - K_{ps} K_{ss}^{-1} F_s) \end{aligned} \quad (19)$$

그러나, 경계조건이 부과되지 않은 부영역에서는, K_R^{-1} 은 singular이므로 범용 유한요소 솔버를 통해 계산될 수 없다. 따라서, 경계영역의 자유도를 PDOF로 선정하여 K_R 을 구축

한 후, PIM에 의해 식 (20)와 같이 K_R 의 의사역행렬을 계산한다.

$$K_R = U_R \begin{bmatrix} R \Sigma_N \\ 0 \end{bmatrix} V_R^T$$

$$K_R^+ = V_R \begin{bmatrix} R \Sigma_N^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} U_R^T \quad (20)$$

식 (19)의 정적축소식과 식 (20) 축소 의사역행렬로부터 주자유도 변위장 u_p 가 계산되며, 식 (18)로부터 부자유도가 환원된다.

3.2 축소 의사역행렬 Schematic

그림 2는 RPIM을 이용하여 축소시스템을 구축하는 과정을 보여준다. 각 단계에 대한 설명은 다음과 같다.

첫 번째 단계에서는 전체모델을 몇 개의 부영역으로 분할한다. 분할된 부영역은 구속조건이 있는 영역과 구속조건이 없는 영역으로 나뉘어 지게 된다.

두 번째 단계에서는 주자유도를 선정하기 위한 리츠벡터를 추출한다. 구속조건이 부과된 부영역은 일반적인 정적해석을 통해 리츠벡터를 구하고, 구속조건이 없는 부영역에서는 RPIM을 이용하여 리츠벡터를 추출한다.

세 번째 단계는 추출된 리츠벡터를 이용하여 각 부영역의 주자유도를 선정하게 된다.

네 번째 단계에서는 구해진 주자유도를 기초로 해서 부영역 단위의 축소시스템을 구축하고, 마지막 단계에서는 각 축소시스템을 결합하여 최종시스템을 구축한다.

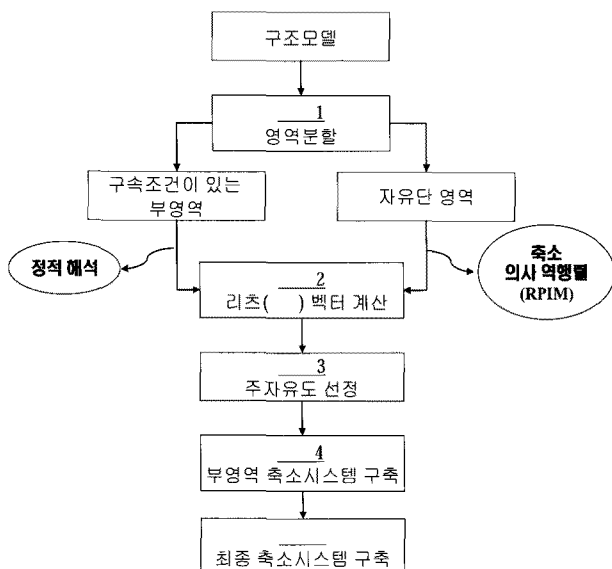


그림 2 축소 의사역행렬(RPIM)을 이용한 축소시스템 구축과정

4. 수치 예제

본 장에서는 고유치해석을 통해 제안된 방법의 효율성과 정확성을 검증하고자 한다.

첫 번째 예제는 구속조건이 부과되지 않은 부영역의 리츠벡터를 추출할 때 일반적인 의사역행렬(Traditional Pseudo Inverse Method, TPIM)과 RPIM의 시간소요를 비교하여 제안방법의 효율성을 보여준다. 두 번째 예제는 장갑차 상판구조물로써, 몇 개의 영역으로 분할한 후에 RPIM을 이용하여 고유치 해석을 수행한 예제이다. 세 번째 예제는 세 영역으로 분리된 평판구조물로 각 부영역은 댐퍼와 스프링으로 연결된 경계조건 free상태이다.

4.1 고정경계 평판

그림 3은 고정경계가 부과된 평판 구조물을 여섯 개의 부영역으로 분리한 것이다. 그림 3에서 부영역 1과 2는 구속조건이 부과되어 있으므로 일반적인 정적해석을 통해 리츠벡터를 계산할 수 있다. 반면에, 부영역 3~6은 경계조건 free 상태이므로 의사역행렬을 이용하여 리츠벡터를 계산해야 하는데, TPIM을 이용하게 되면 과도한 계산시간이 소요된다. 그러나, RPIM은 시스템의 크기를 초기 시스템 크기 대비 5%이하로 줄이기 때문에 시간측면에서 상당히 효율적이라 할 수 있다.

표 1은 RPIM과 TPIM 사이의 리츠벡터 계산시간 비교 결과이다. 결과에서 TPIM의 소요시간은 1,200초이며, RPIM을 사용하는 경우 70%이상의 계산시간 감소 효과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 표 2는 RPIM과 일반적인 전체 시스템 해석에 의한 고유치 결과를 비교한 것으로 20차 모드까지의 오차 비교로부터 RPIM을 통해 매우 정확한 시스템 구축이 가능함을 알 수 있다.

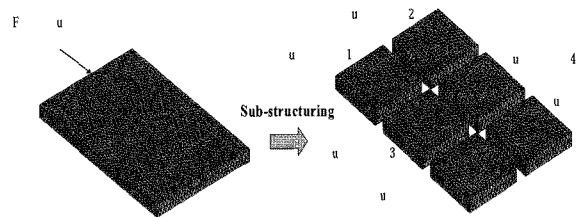


그림 3 평판 구조물의 영역분할

표 1 TPIM과 RPIM의 계산시간 비교

No. of sub-domain	TPIM	RPIM
1,2	282sec.	
3, 4, 5, 6	1,200sec.	360sec.
Total time	1,482sec.	642sec.

표 2 전체시스템과 RPIM 에 의한 고유치 결과 비교

Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)	Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)
1	143.09	143.09	0	11	4570.50	4570.52	0.0004
2	502.45	502.45	0	12	4836.35	4836.38	0.0006
3	875.22	875.22	0	13	5339.09	5339.09	0
4	1375.83	1375.83	0	14	5573.73	5573.75	0.0003
5	1649.98	1649.98	0	15	5882.65	5882.69	0.0006
6	2177.66	2177.66	0	16	6937.85	6937.91	0.0008
7	2379.98	2379.98	0	17	7642.80	7643.03	0.0030
8	3237.02	3237.02	0	18	7745.87	7745.96	0.0011
9	3453.98	3453.99	0.0002	19	8434.49	8434.59	0.0011
10	4066.03	4066.05	0.0004	20	8766.16	8766.38	0.0025

표 3 전체시스템과 RPIM 에 의한 고유치 결과 비교

Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)	Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)
1	25.47	25.47	0	11	477.68	477.68	0
2	39.08	39.08	0	12	621.35	621.36	0.001
3	131.42	131.42	0	13	705.97	705.97	0
4	145.04	145.04	0	14	796.55	796.47	0.010
5	162.67	162.67	0	15	804.18	804.18	0
6	269.06	269.06	0	16	967.96	967.97	0.001
7	315.38	315.38	0	17	1100.04	1100.03	0.001
8	348.59	348.59	0	18	1174.35	1174.33	0.002
9	388.78	388.78	0	19	1237.28	1237.29	0.001
10	455.77	455.76	0.002	20	1749.90	1749.23	0.038

4.2 보병 장갑차 구조물

그림 4는 보병전투차량의 상판구조물로 5개의 부영역으로 분리되었고, 하단부에 고정경계가 부과되었다.

그림 4에서 부영역 1~3은 경계조건이 부과되었기 때문에 일반적인 정적해석을 통해 리즈벡터를 추출할 수 있다. 그러나, 부영역 4~6은 경계조건 free 상태이므로 RPIM을 사용하여 리즈벡터 계산을 수행하였다.

추출된 리즈벡터를 기초로 해서 그림 5와 같이 각 부영역의 주자유도를 선정하였다. 주자유도는 각 부영역의 크기에서 5%정도의 비율로 선정하였다.

표 3은 전체시스템과 축소시스템간의 고유치 해석 결과를 비교한 것이다. RPIM에 의한 축소시스템은 최대 오차가

0.038%에 불과하며, 이는 제안된 시스템의 정확성을 보여주는 결과이다.

4.3 댐퍼/스프링 구조물

그림 6은 댐퍼 및 스프링 구조물로서, 스프링과 댐퍼계수는 하부가 1000N/m, 10N·s/m이고, 상부는 2000N/m, 150N·s/m이다. 각 부영역들은 부과된 경계조건이 없는 상

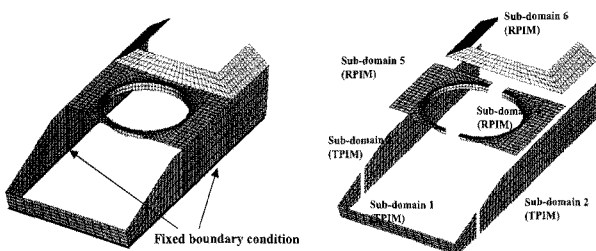


그림 4 보병장갑차 구조물의 영역분할

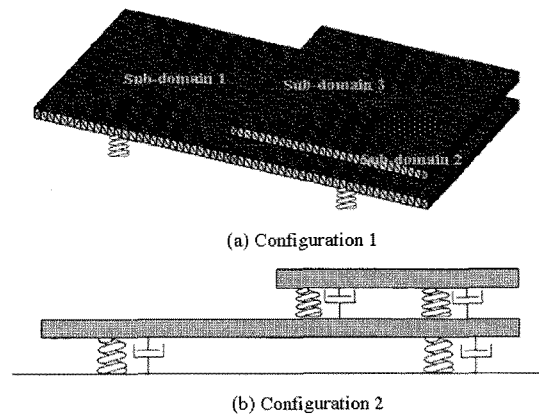


그림 6 스프링 및 댐퍼 시스템 (E=60Mpa, 포아송비=0.23, 밀도=2541.024kg/m³)

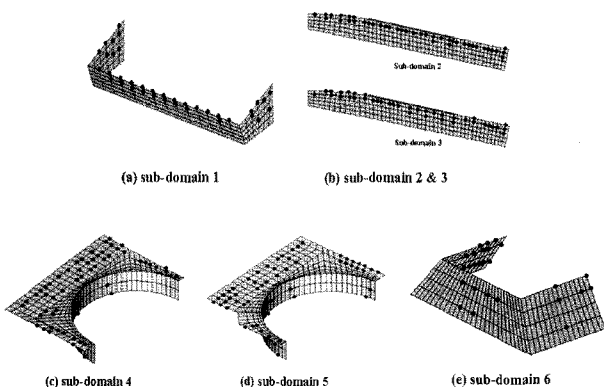


그림 5 각 부영역에서의 주자유도 선정 결과

표 4 전체시스템과 RPIM 에 의한 고유치 결과 비교

Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)	Mode No.	전체 시스템	RPIM	Error (%)
1	16.3936	16.3936	0.0000	11	380.2513	380.2513	0.0000
2	29.1664	29.1666	0.0007	12	604.2297	604.2297	0.0000
3	33.5776	33.5778	0.0006	13	736.2250	736.2556	0.0042
4	40.5205	40.5206	0.0002	14	795.0325	795.0326	0.0000
5	50.6383	50.6383	0.0000	15	824.3645	824.3652	0.0001
6	62.9305	62.9306	0.0002	16	854.1253	854.1253	0.0000
7	82.6464	82.6471	0.0008	17	1073.0217	1073.0222	0.0000
8	95.7012	95.7020	0.0008	18	1296.4894	1296.4922	0.0002
9	117.1182	117.1187	0.0004	19	1326.1384	1326.1408	0.0002
10	207.2582	207.2611	0.0014	20	1410.4068	1410.4104	0.0003

태이므로 축소 의사역행렬을 이용하여 리츠벡터를 계산하였다.

표 4는 전체시스템과 RPIM을 사용하여 구축된 축소시스템 계산 고유치 결과를 비교한 것으로, 최대 오차는 0.0042% 정도로 제안된 방법이 매우 신뢰성이 높음을 알 수 있다.

5. 결 론

영역분할기법 기반으로 축소시스템을 구축하는 과정에서, 주자유도 선정을 위해 중요 정보를 제공하는 리츠벡터의 추출은 필수적이다. 분할된 부영역에 경계조건이 부과되었다면 리츠벡터는 일반적인 정적해석을 통해 쉽게 계산될 수 있다. 그러나, 경계조건 free 상태의 부영역에서는 리츠벡터 추출을 위해 의사역행렬을 사용해야 하는데, 이는 과도한 계산시간과 전산자원 소모의 원인이 될 수 있다.

본 연구에서는 이런 문제를 개선하기 위해 축소 의사역행렬(RPIM) 방법을 도입하여 축소시스템 구축을 위한 효율성을 제고하였다.

이 과정에서 사용되는 정적 축소방법의 정확성은 주자유도 선정위치와 무관하며, 사용되는 개수에도 영향을 받지 않기 때문에 사용이 매우 간편하다.

추출된 리츠벡터는 부영역의 주자유도 선정시 중요한 정보를 제공하게 되며, 이를 기초로 최종 축소시스템을 구축하게 된다.

수치예제에서는 리츠벡터 계산시 일반적인 의사역행렬과 RPIM사이의 계산시간을 비교하여 제안방법의 효율성을 확인하였다. 또한, 전체시스템에서 계산된 고유치 결과와 비교하여 RPIM의 정확성을 검증하였다.

참 고 문 헌

- Ann L. Gaitonde, D. P. Jones** (2003) Reduced order state-space models from the pulse response of a linearized CFD scheme, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, pp.581~606.
- Cho, M., Kim, H.** (2004) Element-based node selection method for reduction of eigenvalue problems, *AIAA Journal*, 42(8), pp.1677~1684.
- Guyan, R. J.** (1965) Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*, 3(2), p.380.
- Henshell, R. D., Ong, J. H.** (1975) Automatic masters from eigenvalues economization, *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3, pp.375~383.
- Kim, H., Cho, M.** (2006) Two-Level Scheme for Selection of Primary Degrees of Freedom and Semi-Analytic Sensitivity based on the Reduced System, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36), pp.4244~4268.
- Kim, H., Cho, M.** (2007) Improvement of Reduction Method Combined with Sub-domain Scheme in Large Scale Problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(2), pp.206~251.
- Kim, K. O., Choi, Y. J.** (2000) Energy method for selection of degrees of freedom in condensation, *AIAA Journal*, 38(7), pp.1253~1259.
- Kim, T.** (1998) Frequency-domain Karhunen-Loeve method and its application to linear dynamic systems, *AIAA Journal*, 36(11), pp.2117~2123.
- Matta, K. W.** (1987) Selection of degrees of freedom for dynamic analysis. *Journal of pressure vessel technology*, 109(1), pp.65~69.
- O'Callahan, J.** (1989) A procedure for an improved reduced system(IRS) model. Proceedings of the 7th international modal analysis conference, Union college, Schenectady, NY, pp.17~21.
- Roger Ohayon** (2004) Reduced models for fluid-structure interaction problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, pp.139~152.
- Shah, V. N., Raymund, M.** (1982) Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(1), pp.89~98.
- Zhang, D., W., Li, S.** (1995) Succession-level approximate reduction(SAR) technique for structural dynamic model. Analysis conference (Nashville, TN), Union college press, Schenectady, NY, pp.435~441.