

신용등급전이행렬의 경험적 베이저안 추정과 비교

김성철¹ · 박지연²

¹ 숭실대학교 정보통계·보험수리학과, ² 숭실대학교 정보통계·보험수리학과

(2009년 2월 접수, 2009년 3월 채택)

요약

신용전이행렬을 추정함에 있어서 국내의 등급전이자료의 축적이 부족한 점을 극복하기 위하여 외국의 신용평가기관(무디스)의 전이행렬자료와 국내의 신용등급 부여자료를 이용하여 경험적 베이저안 추정방법에 의한 전이행렬을 도출하고, 이 전이행렬을 다른 전이행렬과 비교해보기 위하여 전이행렬의 동적인 요소를 평균전이확률의 개념으로 표시할 수 있는 특성척도를 개발하여 신용전이행렬의 시계열 특성과 통계적 특성을 비교한다. 시계열자료의 척도는 베이저안 추정행렬이 안정적임을 보여주는 반면 국내 행렬은 시간적으로 변화의 폭이 크고 무디스나 베이저안 행렬보다 상대적으로 인접전이의 비율이 높게 나타났다. 붓스트랩 검정을 통하여 세 가지 추정방법이 통계적으로 유의한 차이가 있음을 보이고 베이저안 행렬이 무디스 자료보다는 국내자료에 더 많은 영향을 받았음을 유추할 수 있다. 신용등급 전이에 따른 포트폴리오의 가치변화를 고려하는 몬테칼로 시뮬레이션을 통하여 신용 VaR를 구하여 비교하였다. 국내 전이행렬의 경우에 평균은 가장 크고 신용위험도 가장 큰 값을 보였다. 시뮬레이션에서도 베이저안 추정에 의한 결과가 국내자료에 의한 결과와 더 가깝다는 것을 알 수 있다.

주요용어: 신용전이행렬, 경험적 베이저안 추정, 평균전이확률, 붓스트랩, 신용 VaR.

1. 서론

신용위험관리에 있어서 신용상태에 대한 등급부여와 등급전이는 매우 중요한 역할을 갖는다. 어느 기업의 신용등급은 그 기업의 내재가치 또는 자산가치를 나타낸다. 따라서 기업의 자산가치가 변하면 신용등급이 변하게 되고 특히 기업의 파산 가능성이 커지면 해당기업의 신용등급은 급격히 하락하거나 채무불이행 등급으로까지 변하게 된다. 신용전이확률은 현재 주어진 신용등급에서 1기간 후에 각 신용등급으로 전이하게 될 가능성을 나타내는 확률이며 이것을 마코프체인의 전이행렬의 형태로 표시한 것이 신용전이행렬이다. 신용전이행렬은 기본적인 마코프 성질을 가지며 한 개의 흡수상태(채무불이행 등급)를 갖는다. 현재 등급에 그대로 머무는 확률이 가장 크고 다른 등급으로 이동할 확률은 현재 등급과 멀수록 작아진다. 또한 높은 등급일수록 채무불이행확률이 작아지는 성질을 가진다.

신용등급 전이확률의 대상기간은 리스크측정의 목표기간과 일치해야 한다. 일반적으로 신용위험의 시간범위는 다른 척도와외의 상호비교 등을 위하여 1년을 기준으로 한다. 시장리스크의 경우는 포트폴리오의 구성변경이 단기간에 이루어지므로 일별 측정이 의미가 있지만 신용리스크의 경우는 단기적인 포트폴리오 구성이 어렵기 때문에 시장리스크보다 장기인 1년을 기준으로 삼고 있다.

신용전이행렬은 동일한 행태를 보이는 여러 기업에 대한 신용등급자료를 이용하여 추정할 수 있다. 이러한 역사적 자료를 이용하여 구해진 신용전이행렬은 발표하는 신용평가기관마다 약간씩 다른 특징을

¹ 교신저자: (156-743) 서울 동작구 상도동 511, 숭실대학교 정보통계·보험수리학과, 교수.

E-mail: sckim@ssu.ac.kr.

갖고 있다. S&P는 채권발행자가 의무를 이행할 수 있는지에 대한 전반적인 능력, 즉 채무불이행확률의 추정에 중점을 두어 평가하고, Moody's는 파산시에 얼마나 회수할 수 있는가를 바탕으로 평가해서 전이행렬을 발표한다. KMV는 채무불이행빈도를 이용하여 계산한 신용전이행렬을 발표한다.

김규형 (2000)에 나온 바와 같이 역사적 등급전이자료를 이용하여 추정하는 경우에는 자료부족에 의한 표본오차의 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 신용등급이 낮을수록 채무불이행확률이 커지는 순서의 일관성이 있어야 하나 실제로 그렇지 않은 경우가 있다. 또한 추정값의 조악성 또는 불연속성도 자료의 부족에 의한 문제로 볼 수 있다. 김규형 (2000)은 위와 같은 자료부족에 의한 문제를 지적하고, 누적 채무불이행률 자료로부터 내재적 전이행렬을 구하고 이를 역사적 등급전이 자료로부터 구한 전이행렬과 비교하여 그 타당성을 검토하여 결정하는 과정을 설명하였다.

Jarrow 등 (JLT, 1997)은 이산시간과 연속시간 마코프 모형을 사용하여 신용등급 전이 및 파산과정을 분석하고 모수를 추정하였다. 이산시간 모형의 경우, 안정적인(time-homogeneous) 신용전이행렬을 가정하여 Moody's 또는 S&P 자료를 이용하여 추정하고, 채권가치평가에는 위험대가(risk premium) 조정을 고려한 불안정적인(time-inhomogeneous) 신용전이확률을 사용하였다. 연속시간 모형에서는 등급 i 에서 j 로의 전이율 λ_{ij} 의 행렬 Λ 를 이용하여 t -기간 신용전이행렬

$$P(t) = \exp(t\Lambda)$$

를 정의하고 여기에 위험대가행렬 $U(t)$ 의 조정을 통한 Equivalent Martingale Measure

$$\tilde{\Lambda}(t) = U(t)\Lambda$$

를 이용하여 가치평가를 하도록 하였다.

Jafry와 Schuermann (J&S, 2004)은 전이행렬의 세 가지 추정방법을 비교하였다. 1년간 등급전이한 업체수에 대한 역사적 자료를 이용한 고전적 방법은 업계에서 일반적으로 많이 쓰이고 있는 방법으로서 JLT (1997)의 이산시간 모형에 대한 추정방법과 같은 맥락이다. 연속시간 모형에 대해서 J&S (2004)는 생존분석에서 쓰이는 전이율 모형을 고려한 추정방법을 사용하였으며 안정적인 마코프체인 모형과 불안정한 마코프체인 모형을 구분하여 전이율(hazard rate)을 추정하고 전이행렬을 비교하였다. J&S (2004)는 또한 신용전이행렬을 비교할 수 있는 여러 가지 척도를 고려하고 전이행렬의 비대각성분이 의미하는 동적인(dynamic) 요소 또는 이동성(mobility)에 초점을 맞춰 Singular Value Decomposition을 이용한 척도인 M_{SVD} 를 고안하여 각 방법에 의하여 추정된 전이행렬을 비교하였다. Shorrocks (1978)와 Geweke 등 (1986)은 마코프체인의 전이확률의 이동성(mobility)을 나타내는 척도에 관한 연구를 하였다.

신용등급 전이자료는 구조적으로 대각성분에 많은 자료가 있고 대각에서 멀어질수록 자료가 부족한 성질을 갖는다. Israel 등 (2001)은 이러한 자료의 희소성으로 인하여 대부분의 1년 전이확률행렬이 마코프 성질에 위배됨을 보이고 경험적 전이행렬에 대하여 전이율행렬 Λ 가 존재할 수 있는 조건을 제시하였다. 또한 Bangia 등 (2002)은 전이행렬의 모수에 대한 변동계수를 추정하면서 대각성분은 정확히 추정할 수 있지만 대각에서 많이 벗어난 성분의 추정은 비효율적이라는 결과를 보여 주었다. 그들은 또한 서로 다른 전이행렬에 대한 t -검정에서 대각으로부터 많이 벗어난 성분에 대한 t -검정은 자료 희소성으로 인하여 통계적으로 유의한 결과를 얻지 못함을 밝혀내었다.

이와 같이 대각 이외의 성분에 대한 자료부족은 여러 가지 문제를 야기할 수 있는데 국내자료의 경우에는 대각성분에 대한 자료도 충분하지 못한 실정이다. 국내 기업의 신용평가에 Moody's 등의 해외 신용평가기관의 자료를 그대로 사용할 수도 없고, 국내자료만으로 평가하기에는 자료의 희소성이 심각한 오류를 가져올 수도 있는 것이다. 국내에서는 한국기업평가, 한국신용평가, 한국신용정보평가 등의 신용

평가회사에서 신용등급을 부여하고 있으며, 일반적으로 부여된 등급을 이용하여 전이행렬을 구할 수 있지만 국내에서 등급을 받은 회사수가 충분하지 않아서 과거 자료로부터 정확한 전이행렬을 추정하기 어렵다.

이 논문에서는 국내에서 적용할 신용전이행렬을 추정함에 있어서 국내의 신용등급 부여자료와 외국의 신용평가기관(Moody's)의 전이확률자료를 함께 고려하는 경험적 베이지안 추정방법을 제시하고, 이 방법에 의한 전이행렬과 다른 전이행렬을 비교하고자 한다. 다음 절에서는 다항분포와 Dirichlet 분포의 공액모형에 의한 경험적 베이지안 추정방법을 유도하고 2005년부터 2008년까지의 국내의 자료를 이용하여 두 가지의 베이지안 전이행렬을 추정한다. 3절에서는 추정된 신용전이행렬의 비교를 위한 특성척도들을 개발하고 이 척도를 이용하여 두 가지 베이지안 전이행렬과 기존 방법에 의한 두 가지 전이행렬을 비교하고 통계적으로 검정한다. 4절에서는 추정된 전이행렬을 몬테카를로 시뮬레이션에 직접 적용하여 가상의 포트폴리오의 가치를 구하여 평균, 표준편차 및 신용 VaR 등을 비교한다.

2. 신용전이행렬의 경험적 베이지안 추정

2.1. Dirichlet-Multinomial 모형에 의한 경험적 베이지안 추정

국내기업의 신용등급은 국내 3개 신용평가기관에서 부여하는데 자료의 규모나 누적된 기간의 측면에서 신용전이행렬을 추정하기에 충분하다고 하기는 어려운 상황이다. 따라서 이 절에서는 국내 신용등급 자료와 해외 신용평가기관(Moody's)의 전이확률자료를 이용하여 국내 신용전이행렬을 추정하는 경험적 베이지안 추정을 고려한다.

베이지안 추정에 필요한 두 가지 요소는 자료로부터의 우도함수와 사전지식에 해당하는 사전분포이다. 국내 기업의 신용전이행렬은 기본적으로 국내 신용등급 자료를 바탕으로 추정되어야 하지만 국내자료의 불충분성을 보완하고 해외기업들의 신용등급 변화를 반영하기 위하여 해외 신용평가기관이 발표하는 전이행렬을 사전지식의 형태로 사용할 수 있다. 구체적으로 국내 신용등급 전이횟수 자료로부터 얻어지는 우도함수와 무디스가 발표하는 전이행렬로부터 구한 사전분포로 구성되는 베이지안 추정의 골격을 갖춘다. 여기서 사전분포의 모수는 분석자의 지식을 바탕으로 주관적으로 부여되어야 하지만 사전지식에 해당하는 무디스의 자료가 전이확률의 형태이므로 이 전이확률 자료로부터 사전분포의 모수를 추정해야 하는 경험적 베이지안 추정이 필요하다.

신용등급이 K 개인 등급시스템의 신용전이행렬을 $P(K \times K)$ 라 하자. 첫 번째 등급은 최고 신용등급에 해당하고 K 번째 등급은 최하위 또는 부도 상태에 해당한다. 행은 연초 신용등급, 열은 연말 신용등급을 나타낸다. 예를 들어, 연초 신용등급이 A 인 기업이 연말에 어느 등급으로 전이할 확률은 A -행에 표시되며 이 행은 K 차원 벡터이다. 일반적으로 P 행렬의 i 번째 행은 연초 신용등급이 i 번째 등급인 기업이 연말에 다른 신용등급으로 전이하거나 연초 등급에 머물러 있을 확률을 나타내는 확률벡터이며 이 확률벡터를 w_i 라 하자. w_i 의 베이즈 추정량을 구하기 위해서 다음과 같은 다항분포 모형을 고려한다. 신용등급 i 인 기업이 n_i 개일 때, K 차원 확률변수 벡터 $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{iK})$ 를 연초 신용등급 i 로부터 연말에 k 번째 신용등급으로 전이하는 개체수 ($k = 1, 2, \dots, K$)라고 정의하면 X_i 는 (n_i, w_i) 를 모수로 갖는 다항분포를 따른다고 볼 수 있다. 이 다항분포의 모수인 w_i 의 사전분포는 공액사전분포(Conjugate Prior)인 Dirichlet 분포를 가정한다. 즉,

$$X_i \sim \text{Multinomial}(n_i, w_i) \text{ 이고}$$

$$w_i \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$$

를 가정한다. 여기서 Dirichlet 분포의 모수 $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ 는 w_i 에 대한 사전지식을 의미하며 이 사

전지식은 해외기업들의 신용등급 변화자료를 반영해야 한다. 신용등급 변화의 기본자료는 전이개체수이며 Moody's에서는 개체수자료로부터 산출된 전이확률을 발표하고 있으므로 사전분포의 모수 $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ 는 Moody's에서 발표하는 전이확률행렬을 이용하여 추정하도록 한다. 김성철 (2000)이 제시한 Dirichlet 모수의 최대우도추정량(MLE)을 구하는 방법을 여기에 적용하면

$$\psi(\alpha_j) - \psi(\alpha_1 + \dots + \alpha_K) = \sum_{t=1}^T \frac{\log w_{ij}^t}{T}, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (2.1)$$

의 연립방정식의 해로 $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ 를 구할 수 있다. 여기서 w_{ij}^t 는 벡터 w_i^t 의 j 번째 성분이며 w_i^t 는 시점 t 에 Moody's에서 발표한 전이행렬의 연초등급 i 에 해당하는 행벡터이다. $t = 1, 2, \dots, T$ 이며 T 가 MLE를 구하기 위한 표본크기에 해당한다. 또한 digamma 함수 ψ 는 gamma 함수의 로그의 도함수로 $\psi(\alpha) = d/d\alpha \log \Gamma(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ 로 주어진다.

위의 다항분포 모형에 공액(conjugate) 분포인 Dirichlet 분포를 w_i 의 사전분포로 사용하면 사후분포도 Dirichlet 분포를 따르게 되는데 이 때 연립방정식 (2.1)의 해로 구한 $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ 를 사전분포의 모수로 사용하면 w_i 의 사후분포는

$$w_i | x_i \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1 + x_{i1}, \dots, \alpha_K + x_{iK})$$

가 되어 제곱오차손실함수에 의한 w_i 의 경험적 베이즈 추정량으로 사후평균

$$E[w_{ij} | x_i] = \frac{\alpha_j + x_{ij}}{\sum \alpha_k + n_i}, \quad j = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

를 사용할 수 있다. 다른 연초 신용등급에 대해서도 같은 방법을 적용하여 신용전이행렬 P 의 각 행을 추정할 수 있다.

2.2. 전이행렬 추정의 실증분석

앞 절에서 제시한 경험적 베이즈 방법에 의한 전이확률행렬의 추정을 적용하기 위하여 다음과 같은 자료를 사용하였다. 무디스가 매월 발표하는 직전 12개월간의 등급전이에 의한 전이확률행렬의 2005년 12월부터 2008년 6월까지의 자료가 사전분포의 모수추정 등에 사용되었고, 국내 신용평가회사인 한국신용정보평가에서 매월 평가하여 발표한 월별등급자료가 사후분포를 구하기 위한 likelihood로 사용되었다. 이 국내자료는 2004년 7월부터 48개월간의 신용등급자료이며 발표된 자료의 유효등급 기업수는 240개 내지 300개 수준이다. 앞 절의 경험적 베이즈 추정량을 두 가지 방법으로 구하고 무디스에서 발표하는 전이행렬 및 국내 신용등급자료만으로 추정한 전이행렬과 비교해본다. 박경균 (2003)은 1999년 11월부터 2001년 12월까지의 국내외 자료를 이용하여 동일한 Dirichlet-Multinomial 모형에 의한 베이즈 추정량을 구하였다.

[베이즈 방법1]

무디스에서 2005년 12월부터 2008년 6월까지 발표한 30개의 전이행렬을 이용하여 사전분포의 모수 $(\alpha_1, \dots, \alpha_K)$ 의 최대우도추정량(MLE)을 구한다. 국내의 신용등급 자료 중 2007년 6월 1일과 2008년 6월 1일을 비교한 전이빈도를 Likelihood로 사용한다. 그림 2.1 같이 사전분포의 모수와 Likelihood를 이용하여 사후분포를 구한 후 사후평균으로 전이행렬을 추정하면 표 2.1과 같다.

[베이즈 방법2]

방법2는 방법1보다 국내자료의 기간을 길게 함으로써 국내의 비중을 확대한다. 그림 2.2와 같이 국내의 신용등급 자료 중 2006년 6월 1일과 2007년 6월 1일을 비교한 전이빈도와 2007년 6월 1일과 2008년

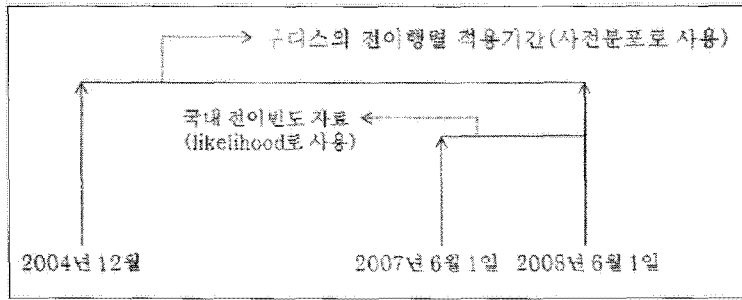


그림 2.1. 베이지안 방법의 기간구조

표 2.1. 베이지안 방법의 전이행렬

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	WR	D	
Aaa	0.9519	0.0039	0.0029	0.0015	0.0015	0.0014	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0263	0.0010	
Aa1	0.0317	0.9829	0.0098	0.0037	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0021	0.0422	0.0021	
Aa2	0.0052	0.0929	0.7752	0.0150	0.0093	0.0027	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0225	0.0450	0.0025
Aa3	0.0018	0.0090	0.0517	0.8319	0.0163	0.0091	0.0140	0.0018	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0596	0.0010	
A1	0.0009	0.0008	0.0073	0.0475	0.8714	0.0189	0.0059	0.0015	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0397	0.0008	
A2	0.0022	0.0007	0.0021	0.0178	0.0673	0.7925	0.0497	0.0124	0.0022	0.0008	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0466	0.0008	
A3	0.0010	0.0018	0.0008	0.0013	0.0075	0.1285	0.7330	0.0525	0.0143	0.0031	0.0033	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0400	0.0009	
Baa1	0.0010	0.0015	0.0010	0.0015	0.0102	0.0423	0.1182	0.5964	0.0444	0.0142	0.0098	0.0011	0.0038	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0439	0.0010	
Baa2	0.0007	0.0007	0.0011	0.0007	0.0013	0.0074	0.0126	0.1033	0.7572	0.0498	0.0036	0.0026	0.0015	0.0010	0.0011	0.0008	0.0008	0.0515	0.0008	
Baa3	0.0013	0.0009	0.0009	0.0011	0.0009	0.0011	0.0024	0.0231	0.1079	0.7530	0.0216	0.0187	0.0035	0.0020	0.0020	0.0013	0.0012	0.0560	0.0012	
Ba1	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0017	0.0023	0.0021	0.0026	0.0111	0.1605	0.6739	0.0713	0.0091	0.0098	0.0042	0.0026	0.0025	0.0843	0.0017	
Ba2	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0017	0.0014	0.0017	0.0044	0.0468	0.1072	0.6020	0.0765	0.0347	0.1058	0.0028	0.0048	0.1005	0.0023	
Ba3	0.0009	0.0009	0.0014	0.0003	0.0009	0.0010	0.0014	0.0012	0.0015	0.0141	0.0329	0.1180	0.5609	0.0045	0.0365	0.0028	0.0033	0.1371	0.0009	
B1	0.0014	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0014	0.0010	0.0010	0.0012	0.0049	0.0359	0.1037	0.5849	0.1037	0.0276	0.0114	0.1153	0.0013		
B2	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0009	0.0005	0.0006	0.0006	0.0007	0.0011	0.0094	0.0331	0.0931	0.5839	0.1060	0.0335	0.1243	0.0044		
B3	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0011	0.0008	0.0105	0.0295	0.0900	0.5854	0.1317	0.1320	0.0102		
Caa-C	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0015	0.0155	0.0015	0.0015	0.0015	0.0020	0.0016	0.0017	0.0018	0.0048	0.0236	0.0734	0.6012	0.1518	0.0015	
WR	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	

6월 1일을 비교한 전이빈도를 합하여 Likelihood로 사용한다. 이 Likelihood와 방법 1에서 구한 사전분포의 모수를 이용하여 사후분포를 구한 후 사후평균으로 전이행렬을 추정하면 표 2.2와 같다.

베이지안 방법에서 사전분포의 모수를 추정하는데 사용되는 무디스의 30개 전이행렬은 모두 같은 차원을 가지는 전이행렬이어야 한다. 하지만 무디스는 2007년 8월에 발표하는 전이행렬부터 Caa~C 등급을 Caa1, Caa2, Caa3, Ca~C로 분할하여 19 × 19 전이행렬을 22 × 22 전이행렬로 그 형식을 바꾸었다. 이에 베이지안 추정을 위해서 2007년 8월부터 2008년 6월까지 발표한 전이행렬의 Caa1~Ca~C 등급을 하나로 합치는 작업을 하여 19 × 19 전이행렬로 통일하여 그 모수를 추정하였다. 국내 신용등급 체계는 기본적으로 무디스와 대응되는 22개 등급으로 구성되어 있다. 7개의 A 등급과 9개의 B 등급에 대해서는 두 등급체계가 일치하며, 단지 무디스가 4개의 C 등급과 한 개의 WR(Withdrawal Rating) 등급을 갖는 대신에 국내 등급체계는 5개의 C 등급으로 되어 있어서 WR 등급을 제외하고 C 등급을 통합하면 무디스 체계와 국내 체계는 각 등급의 성격이 일치한다고 볼 수 있다. 이에 따라 국내자료도 CCC+~C등급까지의 5개 등급을 Caa~C로 그 전이빈도를 합치는 작업을 하였다. WR 등급은 국내 데이터에는 포함되어 있지 않기 때문에 사전분포의 모수를 추정할 때만 이용되었다. 모수를 추정하기 위한 연립방정식은 매스메트리카를 사용하여 해를 얻었다.

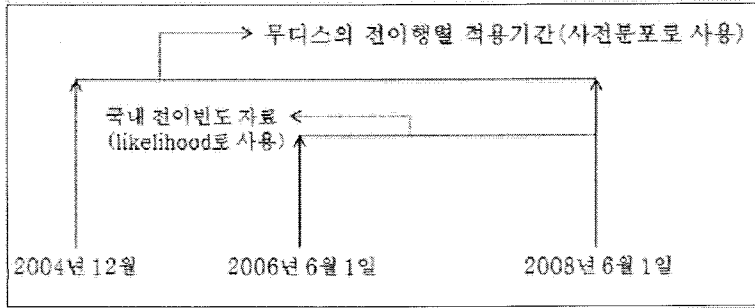


그림 2.2. 베이지안 방법2의 기간 구조

표 2.2. 베이지안 방법2의 전이행렬

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	WR	D	
Aaa	0.9619	0.0030	0.0015	0.0011	0.0012	0.0011	0.0008	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0204	0.0008	
Aa1	0.0271	0.8956	0.0094	0.0032	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0352	0.0018
Aa2	0.0041	0.1140	0.7801	0.0120	0.0074	0.0022	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	0.0361	0.0020
Aa3	0.0015	0.0028	0.0472	0.8968	0.0234	0.0063	0.0127	0.0016	0.0009	0.0010	0.0009	0.0009	0.0011	0.0009	0.0011	0.0009	0.0009	0.0009	0.0544	0.0009
A1	0.0008	0.0007	0.0069	0.0770	0.8473	0.0175	0.0055	0.0014	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0371	0.0006
A2	0.0020	0.0007	0.0019	0.0208	0.0953	0.7747	0.0497	0.0112	0.0020	0.0008	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0423	0.0006
A3	0.0009	0.0015	0.0007	0.0016	0.0177	0.1471	0.7251	0.0495	0.0125	0.0026	0.0027	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0394	0.0007
Baa1	0.0006	0.0013	0.0008	0.0013	0.0087	0.0434	0.1586	0.6682	0.0452	0.0122	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	0.0427	0.0008
Baa2	0.0006	0.0006	0.0010	0.0006	0.0011	0.0063	0.0109	0.1097	0.7455	0.0636	0.0086	0.0022	0.0014	0.0008	0.0010	0.0007	0.0007	0.0007	0.0430	0.0007
Baa3	0.0011	0.0007	0.0007	0.0009	0.0007	0.0003	0.0005	0.0250	0.1099	0.7542	0.0246	0.0157	0.0029	0.0017	0.0017	0.0011	0.0010	0.0010	0.0469	0.0010
Ba1	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0016	0.0022	0.0020	0.0024	0.0104	0.1082	0.6536	0.0671	0.0086	0.0082	0.0039	0.0019	0.0029	0.0029	0.0794	0.0007
Ba2	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0016	0.0014	0.0016	0.0042	0.0451	0.1031	0.5172	0.0736	0.0389	0.0056	0.0027	0.0046	0.0046	0.0368	0.0022
Ba3	0.0009	0.0009	0.0013	0.0009	0.0009	0.0010	0.0013	0.0011	0.0015	0.0137	0.0321	0.1152	0.5639	0.0904	0.0346	0.0027	0.0032	0.0032	0.1339	0.0009
B1	0.0013	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0013	0.0035	0.0010	0.0010	0.0011	0.0047	0.0346	0.0975	0.5841	0.1145	0.0258	0.0100	0.0100	0.1085	0.0012
B2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0008	0.0005	0.0008	0.0005	0.0005	0.0007	0.0010	0.0083	0.0327	0.0978	0.5806	0.1134	0.0331	0.0331	0.1227	0.0043
B3	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0011	0.0008	0.0104	0.0291	0.0699	0.5917	0.1300	0.1300	0.1303	0.0101
Caa-C	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0014	0.0145	0.0014	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0017	0.0044	0.0221	0.0686	0.1441	0.1512	0.1070	
WR	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

[무디스사 - 2008년 6월 발표 전이행렬]

미국 신용평가회사인 무디스에서는 매월 발행하는 Default Report에 직전 월의 1년차 전이행렬을 싣는다. 표 2.3은 2008년 6월에 발표한 신용등급전이행렬로 2007년 6월부터 2008년 5월말의 신용등급 전이확률을 나타낸 행렬이다. 무디스의 경우 22개의 등급으로 이루어진 22 × 22 전이행렬을 발표한다. 이 행렬을 Caa1부터 Ca-C까지의 4개 등급을 Caa-C로 통합하여 19 × 19 행렬로 나타내었다.

[국내]

국내 신용등급전이행렬은 한 시점 후의 등급변화만을 고려한 전이빈도를 가지고 산출한다. 기준년도 연초등급이 비교년도 연말에 유지되는 빈도와 다른 등급으로 변경되는 빈도를 이용하는 것이다. 한국신용정보평가의 3년간의 신용등급 자료를 사용하여 구한 전이행렬은 표 2.4와 같다. 이 전이행렬은 2005년부터 2008년까지의 매년 6월 1일의 신용등급자료로부터 1년차 전이빈도를 구하고 그 빈도를 더하여 확률로 표시한 전이행렬로 만든 것이다. CCC+부터 C까지 5개 등급은 Caa-C로 전이빈도를 합하여 전이확률을 구하였다.

표 2.3. C 등급을 포함한 무디스의 전이행렬

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa-C	WR	D
Aaa	0.8516	0.0890	0.0060	0.0110	0.0090	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0440	0.0000
Aa1	0.0760	0.8700	0.0540	0.0460	0.0030	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0310	0.0000
Aa2	0.0360	0.0200	0.8760	0.0400	0.0360	0.0090	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0120	0.0000
Aa3	0.0100	0.0000	0.0130	0.7420	0.0260	0.0190	0.0090	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1890	0.0000
A1	0.0000	0.0000	0.0010	0.0050	0.8650	0.0170	0.0100	0.0040	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0920	0.0000
A2	0.0000	0.0000	0.0020	0.0070	0.0420	0.8830	0.0310	0.0190	0.0020	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0420	0.0000
A3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0050	0.0390	0.0240	0.0070	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0580	0.0000
Baa1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0090	0.0750	0.7360	0.0400	0.0050	0.0160	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0720	0.0000
Baa2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0030	0.0090	0.0360	0.8570	0.0430	0.0050	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0490	0.0000
Baa3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0750	0.0000
Ba1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0160	0.0530	0.7540	0.0160	0.0110	0.0110	0.0430	0.0000	0.0000	0.0910	0.0000
Ba2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0250	0.0310	0.7590	0.0510	0.0210	0.0100	0.0000	0.0000	0.0000	0.0970	0.0000
Ba3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0210	0.1080	0.6470	0.0590	0.0250	0.0000	0.0000	0.1330	0.0000
B1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0180	0.0700	0.8370	0.0790	0.0430	0.0150	0.1430	0.0000
B2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0050	0.0160	0.0730	0.6240	0.0690	0.0300	0.1430	0.0120
B3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0100	0.0290	0.6740	0.1290	0.1360	0.0160	0.0000
Caa-C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
WR	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

표 2.4. 국내자료에 의한 전이행렬

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	D
Aaa	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa1	0.0833	0.9167	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa2	0.0000	0.2414	0.7241	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa3	0.0000	0.0244	0.1453	0.7905	0.0244	0.0000	0.0244	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A1	0.0000	0.0030	0.0000	0.2355	0.6818	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0175	0.2456	0.6642	0.0526	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Baa1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0172	0.0862	0.2753	0.5517	0.0517	0.0000	0.0000	0.0000	0.0172	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Baa2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1522	0.7432	0.0611	0.0135	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Baa3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0135	0.0270	0.1292	0.7297	0.0270	0.0135	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Ba1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0525	0.0000	0.0525	0.6250	0.0525	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Ba2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Ba3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
B1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
B2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
B3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Caa-C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

표 2.1과 2.2의 두 베이지안 방법의 결과를 보면, D 등급으로의 전이확률인 부도확률이 단조성을 갖지 않음을 볼 수 있다. 특히 Aa1 등급과 Aa2 등급으로부터의 부도확률과 Ba1 등급으로부터의 부도확률이 예상보다 큰 값을 보인다. 우선 Ba1 등급의 경우는 국내자료의 부도확률(0.1250)이 비정상적으로 크기 때문에 생긴 값으로서 likelihood를 반영한 결과이다. Aa1 등급과 Aa2 등급의 경우는 이들 등급에서 D 등급으로 전이하는 것이 드문 경우이기 때문에 30개의 무디스 자료 중 몇 가지 경우가 영향을 미친 결과라고 추측할 수 있다.

3. 신용전이행렬의 특성척도를 이용한 비교

3.1. 신용전이행렬의 비교를 위한 특성척도

추정된 전이행렬을 비교하기 위하여 행렬 자체를 다루는 것보다 그 특성을 잘 나타낼 수 있는 척도(Metric)를 이용하는 것이 더 효과적일 것이다. 이 척도가 의미를 갖는다면 그 크기를 비교해서 전이행렬의 특성을 파악할 수 있고 또한 전이행렬이 차이가 있는지를 통계적으로 검정할 수도 있을 것이다. 행렬 간의 거리 척도, 대각성분을 이용한 척도, 행렬의 특성값을 이용한 척도 등이 있으며 이들 척도에 대한 연구는 Jafry와 Schuermann (2004)에 정리되어 있다.

J&S (2004)은 차별화된 척도를 제시하여 행렬을 비교하는 연구를 하였다. 먼저 주어진 행렬에서 신용등급의 변화가 없다는 가정 하에 생각할 수 있는 대각원소가 모두 1인 단위행렬을 뺀다. 그 결과로 생기는 이동성행렬 (mobility matrix) $\tilde{P} \equiv P - I$ 는 전이행렬의 정적인 부분을 없애고 동적인 부분만을 나타낸다.

M_{SVD} 척도는 이동성행렬의 singular value들의 평균값으로 다음과 같이 정의된다.

$$M_{SVD}(P) \equiv \frac{\sum_{i=1}^K \sqrt{\lambda_i(\tilde{P}'\tilde{P})}}{K} \quad (3.1)$$

단, $\lambda_i(\tilde{P}'\tilde{P})$ 는 $\tilde{P}'\tilde{P}$ 행렬의 i 번째 고유값이다. M_{SVD} 의 특징은 SVD(Singular Value Decomposition)를 사용하여 비대각원소의 제곱값을 척도 계산에 이용한다는 것이다. 따라서 단순히 비대각원소의 평균을 구하는 척도와 비교했을 때 전이행렬을 차별적으로 비교할 수 있게 된다.

J&S (2004)는 척도의 의미를 살펴보기 위해 다음과 같은 전이행렬 P_{avg} 를 이용하여 M_{SVD} 를 유도하였다. 제시된 전이행렬 P_{avg} 의 대각원소는 $1-p$ 로 모두 같으며 이전 시점의 등급에서 한 시점 후에 다른 등급으로 전이를 겪게 될 확률은 p 이다. 즉, 모든 등급에서 전이가 발생하지 않을 확률이 $1-p$ 이고 다른 등급으로 전이가 발생할 확률은 모두 동일하며 그 합은 p 이다.

$$P_{avg} = \begin{pmatrix} 1-p & \frac{p}{K-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{K-1} & 1-p & \frac{p}{K-1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{p}{K-1} & 1-p & \frac{p}{K-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{p}{K-1} & 1-p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

이 전이행렬에 대한 M_{SVD} 를 구하면 다음과 같다.

$$M_{SVD}(P_{avg}) = \frac{\sum_{i=1}^K \sqrt{\lambda_i(\tilde{P}'_{avg}\tilde{P}_{avg})}}{K} = p \quad (3.3)$$

즉 다른 등급으로의 전이확률이 p 인 전이행렬의 M_{SVD} 척도값은 행렬의 차원과 무관하게 p 로 계산되며, 일반적인 신용전이행렬에 대하여 M_{SVD} 척도가 평균전이확률의 의미를 가질 수 있다는 것이다.

주어진 전이행렬 P 와 단위행렬 I 간의 거리측도인 L_1 -norm과 L_2 -norm은 각각 다음과 같다.

$$M_{L_1}(P, I) \equiv \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |P_{ij} - I_{ij}|}{K^2},$$

$$M_{L_2}(P, I) \equiv \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (P_{ij} - I_{ij})^2}}{K^2} \quad (3.4)$$

이것은 역시 전이행렬의 동적인 부분에 대한 척도이다. 이것을 M_{SVD} 와 비교하기 위해 식 (3.2)의 P_{avg} 행렬을 적용하면 다음과 같은 결과가 나온다.

$$M_{L_1}(P_{avg}, I) = \frac{2p}{K}, \quad M_{L_2}(P_{avg}, I) = \frac{p}{K\sqrt{K-1}}. \quad (3.5)$$

위의 두 식의 계수를 조정하면 P_{avg} 행렬에 대하여 M_{SVD} 와 같은 값을 갖는 척도를 얻게 된다. J&S (2004)는 다음과 같이 M_{dev} (absolute deviation)와 M_{euc} (euclidean distance)를 제안하였다.

$$M_{dev}(P) \equiv \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |P_{ij} - I_{ij}|}{2K}$$

$$M_{euc}(P) \equiv \frac{\sqrt{K-1}}{K} \sqrt{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K (P_{ij} - I_{ij})^2}$$

$$M_{dev}(P_{avg}) = p, \quad M_{euc}(P_{avg}) = p \quad (3.6)$$

이와 같이 M_{dev} 와 M_{euc} 척도도 일정기간 후 전이가 발생할 평균적인 확률의 의미를 갖는다.

3.2. 새로운 특성척도

J&S (2004)의 M_{SVD} 와 M_{dev} , M_{euc} 척도는 이동성행렬의 고유값이나 단위행렬과의 거리를 나타내는 norm의 개념을 이용하면서 모두 전이행렬의 비대각성분의 크기를 동적인 요소로서 함축적으로 표시하고 확률적으로는 평균전이확률을 의미한다. 여기서는 이 평균전이확률에 초점을 맞추어 좀더 간단하고 직관적인 척도를 유도하고 그 특성을 파악해 본다.

3.2.1. 단순평균전이확률, $M_{prob}(P)$ 가장 간단하고 직관적인 척도는 전이행렬의 각 행의 비대각성분의 합의 평균으로서 평균전이확률의 단어적 의미를 그대로 갖는다.

$$M_{prob}(P) = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j \neq i}^K p_{ij}}{K}. \quad (3.7)$$

이 식은

$$M_{prob}(P) = \frac{1}{K} \sum_i (1 - p_{ii}) \quad (3.8)$$

로 쓸 수 있으며 앞 절의 M_{dev} 또한 식 (3.6)의 (i, j) 합을 $i = j$ 와 $i \neq j$ 인 부분으로 구분하여 정리하면

$$\begin{aligned} M_{dev}(P) &= \frac{1}{2K} \left[\sum_i (1 - p_{ii}) + \sum_{i \neq j} p_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{K} \sum_i (1 - p_{ii}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

가 되어 임의의 전이행렬에 대하여

$$M_{prob}(P) = M_{dev}(P) \quad (3.10)$$

임을 알 수 있다.

3.2.2. 가중평균전이확률, $M_{pw}(P)$ 전이행렬의 확률은 조건부확률임을 감안하면 M_{prob} 에서 사용된 단순평균은 평균전이확률을 정확하게 나타낸다고 보기 어렵다. 행렬의 성분 p_{ij} 는 i 등급에서 j 등급으로 전이하는 조건부 확률이므로 i 등급에서 나가는 전이확률은 이전 시점에 i 등급으로 들어온 전이량에 영향을 받게 된다. 이러한 특징을 고려해 볼 때 열의 합이 크다는 것은 이전 등급에서 해당 등급으로 전이될 확률이 크다는 것이며 따라서 이것을 가중치(weights)로 사용하는 것이다. 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$M_{pw}(P) = \sum_{i=1}^K v_i \sum_{j \neq i} p_{ij}, \quad v_i = \frac{\sum_{k=1}^K p_{ki}}{K}. \quad (3.11)$$

이 표현식을 구체적으로 살펴보기 위해 앞 절에서 제시되었던 P_{avg} 의 경우를 보면 행렬의 각 열의 합이 1이므로 가중치는 $1/K$ 로 똑같이 주어지고 따라서 $M_{pw}(P_{avg}) = p$ 가 된다.

3.2.3. 인접전이확률, $M_{pa}(P)$ 앞에서 제시된 두 척도는 비대각원소 전부를 사용하여 구하였다. 신용등급의 전이는 주로 인접등급으로 발생하며 그 중에서도 한 단계(adjacent) 전이가 대부분이다. 따라서 한 단계의 전이만을 고려한 전이확률을 다음과 같은 척도로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{pa}(P) &= \frac{p_{12} + p_{K, K-1} + \sum_{i=2}^{K-1} (p_{i, i-1} + p_{i, i+1})}{K} \\ M_{pa}(P_{avg}) &= \frac{2p}{K} \leq p, \quad K \geq 2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

이 척도는 다른 환경에서 구한 전이행렬을 비교할 때 유용하다. 예를 들어 무디스에서 발표하는 전이행렬과 국내 신용등급자료를 이용하여 구한 전이행렬을 비교할 경우, 각 나라의 신용등급이 한 단계 상승하거나 하락하는 변동성을 얼마나 갖고 있는지를 비교해 볼 수 있기 때문이다. 또한 전이행렬의 모든 비대각원소를 이용하여 구한 척도(M_{prob})의 크기에 인접전이확률(M_{pa})이 차지하는 비율로써 두 전이행렬을 비교할 수 있다. P_{avg} 행렬에 대한 척도값은 $2p/K$ 로서 $K > 2$ 에 대하여 p 보다 작다.

3.2.4. 가중평균인접전이확률, $M_{paw}(P)$ 인접전이확률 M_{pa} 에 열합가중치를 부여한 척도이다.

표 3.1. 추정된 전이행렬의 척도비교

	M_{SVD}	M_{euc}	M_{prob}	M_{pw}	M_{pa}	M_{paw}
무디스	0.2445	0.2770	0.2197	0.1917	0.1050	0.0914
베이저안	10.2843	0.3222	0.2643	0.2349	0.1423	0.1260
베이저안	20.2868	0.3253	0.2661	0.2372	0.1503	0.1338
국내	0.2677	0.3153	0.2287	0.2181	0.1868	0.1818

$$M_{paw}(P) = v_1 p_{12} + v_K p_{K,K-1} + \sum_{i=2}^{K-1} v_i (p_{i,i-1} + p_{i,i+1}), \quad v_i = \frac{\sum_{k=1}^K p_{ki}}{K},$$

$$M_{paw}(P_{avg}) = \frac{2p}{K} \leq p, \quad K \geq 2. \tag{3.13}$$

이 척도는 $M_{pw}(P)$ 와 함께 이용하여 인접전이비율을 구하여 전이행렬을 비교하는데 사용할 수 있으며, $M_{pa}(P)$ 와 비교하여 전이행렬을 더 잘 표현하는 척도인지를 판단할 수 있을 것이다.

3.3. 척도를 이용한 신용전이행렬의 비교 - 실증분석

3.3.1. 척도를 이용한 탐색적 비교 2.2절에서 추정한 4개의 전이행렬을 이용하여 위에서 제시한 척도들을 구하면 표 3.1과 같다. 4개의 전이행렬의 형식을 맞추기 위해 무디스 전이행렬과 베이저안 방법의 전이행렬은 WR과 D등급을 통합하여 18×18 행렬로 만들었다.

M_{dco} 와 M_{prob} 척도는 식 (3.10)에서 보였듯이 수식적으로 동일하므로 M_{prob} 만 보이기로 한다. M_{pa} 와 M_{paw} 만 [무디스 < 베이저안 1 < 베이저안 2 < 국내]의 크기순으로 나오고 다른 척도는 모두 [무디스 < 국내 < 베이저안 1 < 베이저안 2]의 크기순으로 나왔다. 이는 베이저안 추정량의 특성에 부합하지 않는 결과이다. 단조성을 가진 척도라면 베이저안 추정에 의한 척도가 무디스 행렬로부터의 척도와 국내자료로부터의 척도의 사이값을 가질 것을 기대하기 때문이다.

이와 같이 한 시점(2008년 6월)을 기준으로 추정된 전이행렬로부터 일반적인 특성을 추론하는 것은 한계가 있다. 우리가 다루는 자료가 시계열자료이므로 전이행렬도 여러 시점을 기준으로 추정하여 그 특성을 알아볼 필요가 있다. 추정대상이 1년 전이확률이므로 1년 중 어느 달을 기준으로 추정하느냐에 따라 12개의 시점에서 추정된 각각 12개의 전이행렬을 고려할 수 있다. 모든 전이행렬은 18×18 전이행렬로 그 형식을 통일한다.

[무디스]

2007년 7월부터 2008년 6월까지 발표한 12개의 전이행렬을 사용한다.

[베이저안1]

2.2절의 베이저안 1 방법을 적용한다. 사전분포의 모수는 앞에서 추정된 값을 공통적으로 사용하고 국내의 1년차 신용등급 전이빈도 자료를 Likelihood로 사용하는데 그 기간은 다음의 12개이다.

(2006년 7월 1일, 2007년 7월 1일)

(2006년 8월 1일, 2007년 8월 1일)

⋮

(2007년 6월 1일, 2008년 6월 1일)

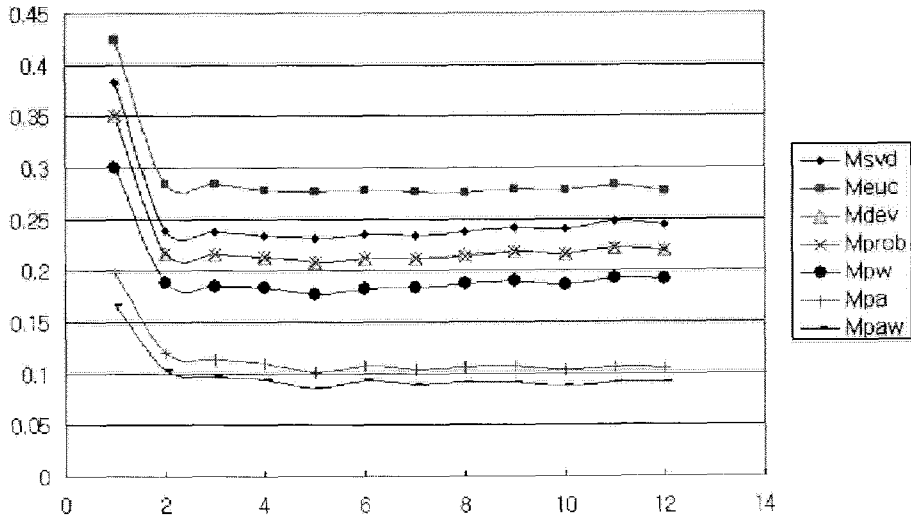


그림 3.1. 무디스의 12시점 전이행렬의 척도 비교

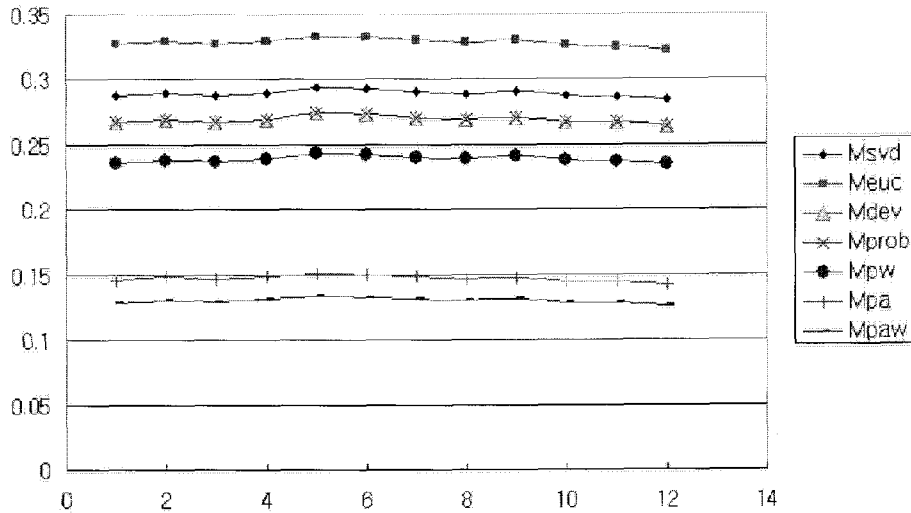


그림 3.2. 베이저안 방법의 12시점 전이행렬의 척도 비교

[국내]

국내의 3년간의 신용등급 변동자료로부터 구한 12개의 전이행렬이다. 기간은 다음과 같다.

(2004년 7월 1일, 2005년 7월 1일, 2006년 7월 1일, 2007년 7월 1일)

(2004년 8월 1일, 2005년 8월 1일, 2006년 8월 1일, 2007년 8월 1일)

⋮

(2005년 6월 1일, 2006년 6월 1일, 2007년 6월 1일, 2008년 6월 1일)

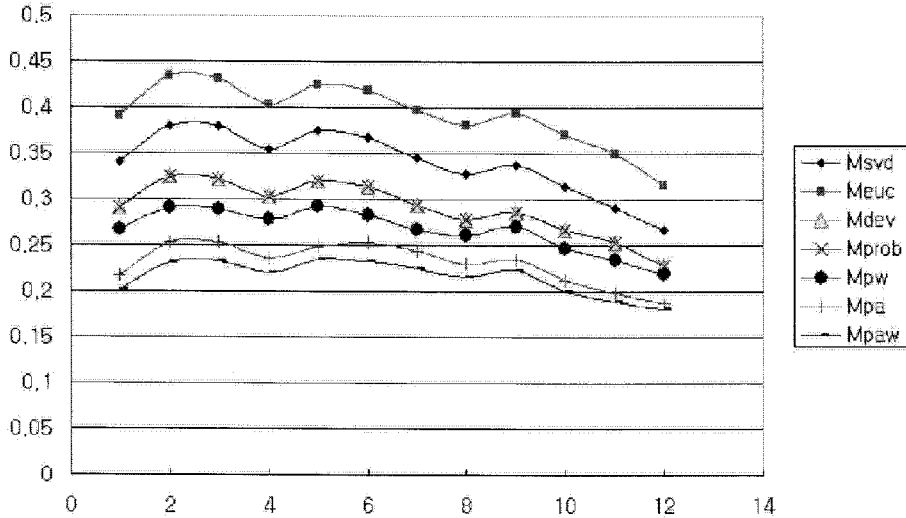


그림 3.3. 국내자료의 12시점 전이행렬의 척도 비교

3가지 방법으로 추정된 각 12개씩의 신용전이행렬의 척도를 구하여 그림 3.1, 3.2, 3.3에 추정방법별로 12시점 전이행렬 척도를 비교하였고, 그림 3.4에서 척도별 12시점 전이행렬 척도를 표시하였다.

(1) 모든 방법에서 ($M_{euc} > M_{SVD} > M_{dev} = M_{prob} > M_{pw} > M_{pa} > M_{paw}$)의 크기순으로 나타났으며, 모든 척도에서 대체로 (무디스 < 베이지안 < 국내)의 순으로 그 크기가 나타났다. 특히 그림 3.4에서 보면 표 3.1의 결과와 달리 대부분의 시점에서 베이지안 추정의 척도가 나머지 두 척도의 사이값을 가지는 것을 볼 수 있다.

(2) 무디스의 경우 2007년 5월부터 연체(grace period defaults)를 D 등급에 포함시키지 않도록 하면서 D 등급으로의 전이가 급격히 감소한 결과 척도의 크기가 급격히 작아졌다. 여기서 연체는 이자의 단기간 연체를 의미한다.

(3) 무디스와 베이지안 방법에 비해 국내의 전이행렬은 척도변화의 폭이 큰 것을 알 수 있다. 국내 신용등급 자료로 구한 전이행렬은 불안정하다고 볼 수 있다. 반대로 베이지안 방법에 의한 전이행렬은 변화가 거의 없이 안정적이다.

(4) 열합가중의 효과를 나타내는 M_{pw}/M_{prob} 와 M_{paw}/M_{pa} 값은 모든 경우에서 1보다 작게 나왔다. 전이행렬의 비대각성분의 단순평균에 의한 척도는 전이가 일어날 확률을 과대평가했다고 볼 수 있다.

(5) M_{pa}/M_{prob} 와 M_{paw}/M_{pw} 는 신용등급의 한 단계 전이의 비를 나타낸다. 그림 3.5는 두 비율의 크기와 변화를 전이행렬별로 비교하였다. 국내 척도가 0.8 정도로 가장 크게 나와서 국내의 등급전이는 주로 한 단계 상승 또는 하락으로 발생함을 보여준다. 역시 베이지안 척도는 거의 일정한 값을 보인다.

3.3.2. 척도를 이용한 붓스트랩 검정 앞 절에서 비교한 세 개의 추정방법의 차이를 통계적으로 검정하기 위하여 추정된 행렬을 직접 검정하기보다는 특성척도를 이용한 붓스트랩 검정을 수행한다. 3.3.1절에서 구한 12시점 시계열 전이행렬을 이용하여 두 전이행렬(추정방법)의 척도차이에 대한 표본으로부터 붓스트랩 표본을 만들어서 붓스트랩 표본의 평균에 대한 신뢰구간을 구한다. 즉, A 방법과 B 방법을 비교한다면 $M(P_{A,200707}) - M(P_{B,200707}), \dots, M(P_{A,200806}) - M(P_{B,200806})$ 의 12개 표본으로부터

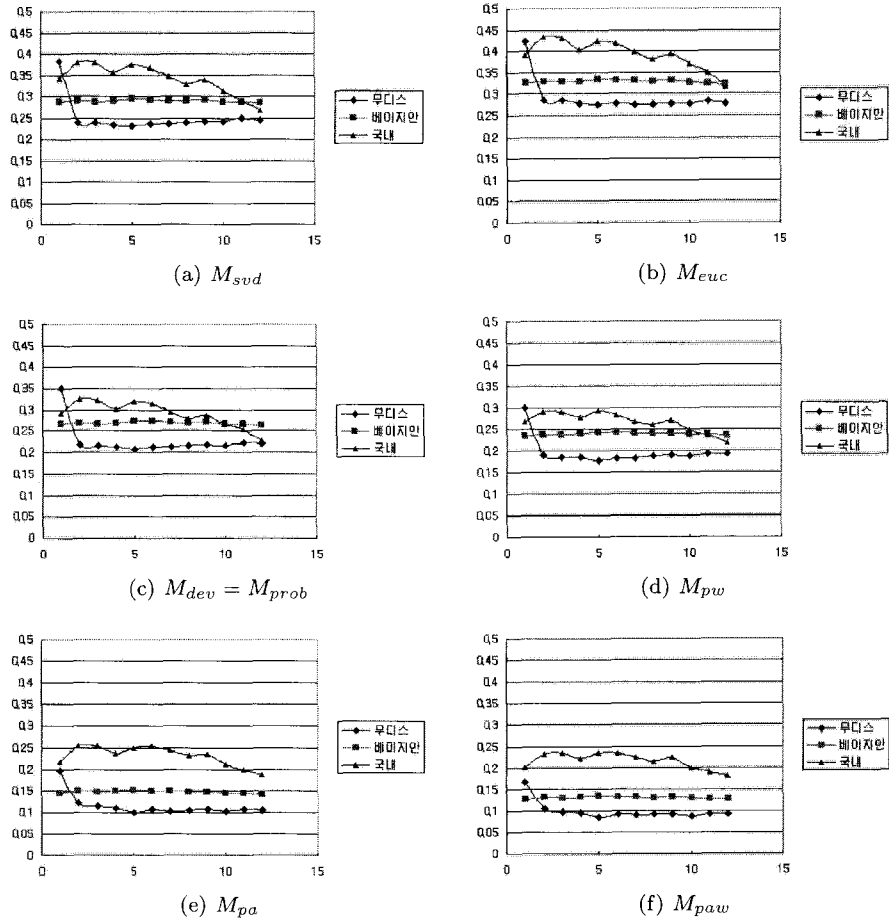


그림 3.4. 척도별 12시점의 전이행렬 비교

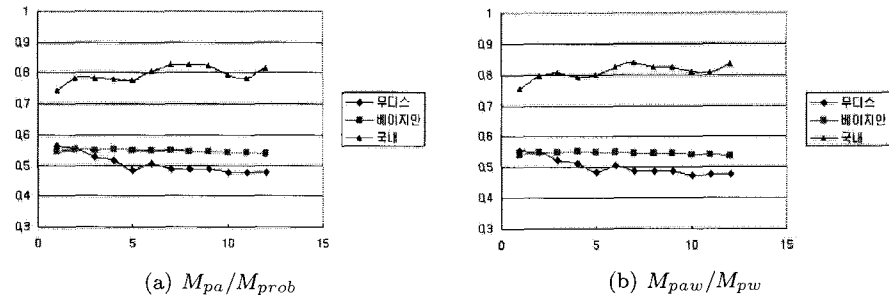


그림 3.5. 전이행렬별 인접전이확률의 비율

1,000개의 붓스트랩 표본을 생성한다. 표 3.2는 붓스트랩에 의한 척도차이의 평균의 99% 신뢰구간이다. 18개의 신뢰구간 중 [베이지안 - 국내]의 비교에서 M_{prob} 척도의 한 개의 신뢰구간이 0을 포함하는 것을 알 수 있다. 그 외의 경우에는 99%신뢰수준 하에서 척도의 차이가 유의하게 나왔다. 두 가지 측

표 3.2. 붓스트랩에 의한 척도차이의 평균의 99% 신뢰구간

	M_{SVD}	M_{euc}	M_{prob}
무디스 - 베이저안	-0.0390 (-0.0553, -0.0012)	-0.0375 (-0.0526, -0.0013)	-0.0425 (-0.0577, -0.0082)
무디스 - 국내	-0.0906 (-0.1255, -0.0413)	-0.1016 (-0.1331, -0.0602)	-0.0632 (-0.0916, -0.0254)
베이저안 - 국내	-0.0508 (-0.0728, -0.0269)	-0.0633 (-0.0858, -0.0407)	-0.0210 (-0.0387, 0.0002)
	M_{pw}	M_{pa}	M_{paw}
무디스 - 베이저안	-0.0428 (-0.0565, -0.0140)	-0.0319 (-0.0432, -0.0070)	-0.0314 (-0.0415, -0.0116)
무디스 - 국내	-0.0705 (-0.0952, -0.0353)	-0.1155 (-0.1356, -0.0871)	-0.1170 (-0.1325, -0.0929)
베이저안 - 국내	-0.0277 (-0.0419, -0.0120)	-0.0835 (-0.0964, -0.0695)	-0.0855 (-0.0961, -0.0735)

면에서 해석할 수 있다. 먼저 M_{prob} 척도를 사용하면 추정방법 간의 차이를 구분하지 못 할 수도 있다는 것이고 두 번째로 베이저안과 국내의 차이는 다른 차이보다 상대적으로 작으므로 베이저안 추정이 국내 자료의 영향을 더 많이 받았다고 볼 수 있다. 95%신뢰구간은 모든 척도에 대해서 0을 포함하지 않는다. 3가지 전이행렬은 각각 다른 구조를 가지고 있어 그 차이를 구분할 수 있다고 할 수 있다.

4. 모의실험에 의한 비교분석

앞 절에서 제시한 두 가지 신용전이행렬의 특성을 비교하기 위하여 여러 가지 전이행렬을 이용하여 포트폴리오의 가치와 위험을 모의실험을 통하여 구해 본다. 포트폴리오의 평가는 기본적으로 J. P. Morgan (1997)의 CreditMetricsTM에서 신용리스크 측정에 사용하는 신용 VaR를 계산하는 방법을 적용한다. 신용 VaR(Value at Risk)는 신용위험을 계량화 하는 수단으로서 주어진 신뢰수준 하에서 포트폴리오 보유기간동안 발생할 수 있는 최대손실금액이다. CreditMetrics 방법론은 김규형 (2000)과 Nelken (1999)에서 설명한 바와 같이 다음과 같은 절차를 따른다.

- (1) 포트폴리오 설정.
- (2) 전이행렬로부터 해당 신용등급별로 표준화된 수익률에 의한 신용등급 변화점을 산출.
- (3) 시나리오 생성 - 상관계수 ρ 를 갖는 표준화된 수익률 벡터 생성.
- (4) 생성된 수익률과 신용등급 변화점을 비교하여 1년 후의 신용등급 결정.
- (5) 위험노출 재평가하여 개별 채권의 가치 계산.
- (6) 개별 채권과 포트폴리오의 가치 분포로부터 신용VaR 산출.

포트폴리오는 두 개의 채권으로 구성되어 있다고 가정하자. 신용등급이 A1인 채권은 만기가 3년이고 이표가 5%이며 액면가는 100으로 설정하였고, 신용등급이 Baa1인 채권은 만기가 5년이고 이표가 6%이며 액면가는 역시 100으로 설정하였다. 두 채권 수익률의 상관계수는 0.3으로 가정한다.

비교를 위해서 2.2절에서 구한 4개의 전이행렬을 사용한다. 다만 국내자료에 WR 등급이 포함되어 있지 않으므로 무디스와 베이저안 1, 베이저안 2 행렬은 WR 등급을 제외하고 추정하여 모든 전이행렬의

표 4.1. 각 전이행렬에 의한 1년 후 가치의 평균, 표준편차, 신용 VaR

		평균	표준편차	5%수준	1%수준
무디스	A1	101.7714	0.1666	-0.0156	0.3006
	Baa1	99.5512	2.2921	3.1586	14.7748
	포트폴리오	201.3226	2.3122	3.1430	14.7592
베이지안 1	A1	101.6560	2.7087	-0.1310	0.1852
	Baa1	99.5403	4.4590	3.1477	19.9531
	포트폴리오	201.1963	5.4407	3.0167	19.8221
베이지안 2	A1	101.6303	3.1182	-0.1567	0.1595
	Baa1	99.6970	4.4168	3.3044	20.1098
	포트폴리오	201.3272	5.5847	3.1476	19.9530
국내	A1	101.8330	0.0826	0.0460	0.2047
	Baa1	100.3825	3.2268	3.9899	20.7953
	포트폴리오	202.2155	3.2424	4.0359	20.8413

크기를 18×18 로 통일하여 비교한다. 자산가치모형에 의해서 각 전이행렬에 대하여 포트폴리오에서 다루는 A1 등급과 Baa1 등급의 전이확률분포를 표준정규분포에 대응시켜서 채권의 등급을 결정하는 등급변화점을 구한다 (Kealhofer, 1995). 각 전이행렬과 시작 등급 별로 신용등급 변화점표를 구한다.

Cheolesky Factorization을 이용해서 포트폴리오를 구성하는 두 채권의 1년간의 수익률을 생성한다. 두 수익률은 평균이 0, 표준편차가 1이고 상관계수가 0.3인 이변량정규분포를 따른다고 가정한다. 여기서 생성된 수익률은 채권의 수익률 자체라기보다는 표준화된 수익률의 개념으로서 앞의 등급변화점에 적용하여 전이확률에 따른 신용등급의 변화를 나타낼 수 있는 변량이다. 몬테칼로 시뮬레이션에 의하여 20000건의 시나리오를 생성하고 생성된 수익률과 신용등급 변화점을 비교하여 1년 후 신용등급을 결정한다.

신용등급에 변화가 생겼을 때는 위험노출(Risk Exposure)을 재평가해야 한다. 여기서는 한국채권평가에서 발표한 2008년 6월 2일의 무보증 공모회사채의 현물이자율을 이용하여 선도이자율을 구하고 현금흐름을 재평가하였다. 채권의 회수율은 베타분포를 따르는 난수를 사용하였으며 베타분포의 모수는 무디스에서 2008년 6월에 작성한 May Default Report에서 발표하는 우선순위가 Sr.Unsecured인 채권의 5년 평균과 5년 표준편차를 사용하여 구하였다. \$100당 회수율의 평균은 \$53.0이고 표준편차는 \$8.1으로 베타분포의 모수 (α, β)는 (19.5918, 17.3739)으로 계산되었다. 재평가된 채권의 가치로부터 포트폴리오의 가치를 계산하고 해당 시나리오의 포트폴리오 가치의 확률분포와 신용 VaR를 구할 수 있다. 표 4.1은 4가지 전이행렬로부터 구한 포트폴리오 가치의 신용 VaR를 정리한 결과를 보여준다.

각 신용전이행렬의 각 채권과 포트폴리오의 가치의 분포로부터 평균, 표준편차 및 5%와 1% 신용VaR를 구하였다. %수준을 이용한 신용VaR를 살펴보면 A1등급의 5% 수준 신용VaR에서 국내를 제외하고 모두 음수가 나왔다. 무디스 전이행렬과 베이지안 방법에 의한 전이행렬의 경우 A1등급의 채권의 1년 후 새로운 등급이 A1에 집중됨으로써 5% 수준이 A1에 포함되고 이에 비해 평균이 낮아 음수가 나오게 된다. 반면 국내 전이행렬의 경우 5% 수준이 A1에 포함되지만 평균값이 A1의 가치보다 커 신용위험을 표현할 수 있다. 따라서 신용VaR를 이용하여 전이행렬을 비교하기 위해서 5% 수준 신용VaR는 의미없는 값이므로 모든 전이행렬에서 양수의 값을 갖는 1% 수준 신용VaR를 사용해야 한다.

- A1등급 채권의 1%수준 신용VaR

무디스(0.3006) > 국내(0.2047) > 베이지안 방법1(0.1852) > 베이지안 방법2(0.1595)

무디스의 경우가 가장 신용위험이 크게 나타났으며 이것은 1년 후 해당채권이 채권의 평균가치로

부터 0.3006이상의 손해가 발생할 확률이 1%라는 의미를 가진다. A1등급 채권의 경우 장기적인 신용도가 높고 원리금의 지급능력이 우수하여 신용위험이 작다.

- Baa1등급 채권의 1%수준 신용VaR

국내(20.7953) > 베이저안 방법 2(20.1098) > 베이저안 방법 1(19.9531) > 무디스(14.7748)

국내의 경우가 20.7953으로 가장 크게 나와 해당채권이 채권의 평균가치로부터 그 이상의 손해가 발생할 확률이 1%임을 뜻한다. Baa1의 경우 1년 후 가치의 평균이 원금(100)보다 작거나 비슷하다. 특히 국내 전이행렬의 경우가 평균은 100.38로 가장 크지만 신용 VaR도 가장 크다. Baa1 채권은 가치가 저하될 가능성을 내포하고 있기 때문에 A1에 비해 신용위험이 크다는 것을 알 수 있다.

- 포트폴리오의 1%수준 신용 VaR

국내(20.8413) > 베이저안 방법 2(19.9530) > 베이저안 방법 1(19.8221) > 무디스(14.7592)

포트폴리오의 가치는 Baa1과 같은 순서로 나타났다. Baa1과 마찬가지로 국내 전이행렬의 경우가 평균도 가장 크고 신용위험도 가장 큰 값을 보인다. 포트폴리오의 신용위험은 각 채권의 신용위험을 더한 값보다 작게 나온다. 특히 무디스와 베이저안 방법의 경우 Baa1채권만을 보유했을 때보다 포트폴리오의 신용위험이 더 작게 나왔다. 상관계수가 0.3인 두 채권으로 포트폴리오를 구성함으로써 얻게 되는 분산효과로 보인다.

전체적으로 베이저안에 의한 결과는 무디스보다는 국내자료에 의한 결과와 유사하다. 3.3절의 척도를 이용한 비교에서도 이와 비슷한 결과가 나왔다. 베이저안 방법을 기준으로 보았을 때는 무디스보다 국내자료가 더 정확한 추정값을 준다고 볼 수 있다.

5. 맺는 글

1997년의 외환위기와 현재 우리가 겪고 있는 금융위기는 신용위험의 측정과 관리가 얼마나 중요한지를 새삼 보여주고 있다. 이 논문에서는 국내 기업(채권)의 신용등급 전이를 반영하는 신용전이행렬을 추정함에 있어서 국내의 등급전이자료의 축적이 부족한 점을 극복하기 위하여 외국의 신용평가기관(무디스)의 전이행렬자료와 국내의 신용등급 부여자료를 이용하여 경험적 베이저안 추정방법에 의한 두 개의 전이행렬을 도출하였고, 이 전이행렬을 다른 전이행렬과 비교해보기 위하여 전이행렬의 동적인 요소를 평균전이확률의 개념으로 표시할 수 있는 네 가지의 특성척도를 개발하여 신용전이행렬의 시계열 특성과 통계적 특성을 비교하였다.

모든 척도에서 대체로 (무디스 < 베이저안 < 국내)의 순으로 나타났다. 12시점 시계열자료의 척도는 베이저안 추정행렬이 안정적임을 보여준다. 즉, 추정시점에 따라 자료의 영향을 직접 받는 무디스 행렬이나 국내 행렬과 달리 간접적 영향을 받는 베이저안 행렬이 시간적으로 안정적임을 보여준 것이다. 반면 국내 행렬은 시간적으로 변화의 폭이 크고 무디스나 베이저안 행렬보다 인접전이의 비율이 높게 나타났다. 또한 세 종류의 전이행렬 추정방법은 통계적으로 유의한 차이가 있는 것으로 나타나지만 베이저안 행렬과 국내행렬의 척도가 1% 수준에서 유의한 차이를 보이지 않을 수 있다는 붓스트랩 검정결과는 베이저안 행렬이 무디스 자료보다는 국내자료에 더 많은 영향을 받는다는 것을 의미한다. 이 결과는 경험적 베이저안 추정의 특성에 대한 직관적인 예상과 부합한다.

신용등급 전이에 따른 포트폴리오의 가치변화를 고려하는 몬테카를로 시뮬레이션을 통하여 신용VaR를 구하여 비교하였다. 채권과 포트폴리오의 가치분포가 어느 한 등급에 집중되어 있는 이산분포이기 때문에 5% 수준의 신용 VaR 값이 음수가 나오는 경우가 생겼고, 1% 신용 VaR를 비교하면 [국내(20.84) > 베

이지안 2(19.95) > 베이지안 1(19.82) > 무디스(14.76)]의 순서로 계산되며 국내 전이행렬의 경우가 평균도 가장 크고 신용위험도 가장 큰 값을 보였다. 시뮬레이션에서도 베이지안에 의한 결과가 무디스보다는 국내자료에 의한 결과와 유사하다는 것을 보여주었다.

참고문헌

- 김규형 (2000). <신용위험의 측정과 관리>, 한국금융공학컨설팅.
- 김성철 (2000). Dirichlet 확률모형을 이용한 AHP 중요도 결합방법, <대한산업공학회지>, **26**, 213-219.
- 박경균 (2003). <신용위험관리를 위한 신용전이행렬의 베이지안 추정>, 석사학위 논문, 숭실대학교 대학원.
- Bangia, A., Diebold, F. X., Kronimus, A., Schagen, C. and Schuermann, T. (2002). Ratings migration and the business cycle, with application to credit portfolio stress testing, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 445-474.
- Geweke, J., Marshall, R. C. and Zarkin, G. A. (1986). Mobility indices in continuous time Markov chains, *Econometrica*, **54**, 1407-1423.
- Israel, R. B., Rosenthal, J. S. and Wei, J. Z. (2001). Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices, with application to credit ratings, *Mathematical Finance*, **11**, 245-265.
- Jafry, Y and Schuermann, T. (2004). Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices, *Journal of Banking and Finance*, **28**, 2603-2639.
- Jarrow, R. A., Lando, D. and Turnbull, S. M. (1997). A Markov model for the term structure of credit risk spreads, *The Review of Financial Studies*, **10**, 481-523.
- J. P. Morgan, (1997). *CreditMetricsTM - Technical Document*, J.P. Morgan, New York.
- Kealhofer, S. (1995). *Managing Default Risk in Portfolios of Derivatives*, Derivative Credit Risk Ch. 4, Renaissance Risk Publication.
- Nelken, I. (1999). *Implementing Credit Derivatives*, McGraw-Hill, New York.
- Shorrocks, A. F. (1978). The measurement of mobility, *Econometrica*, **46**, 1013-1024.

Empirical Bayes Estimation and Comparison of Credit Migration Matrices

Sung-Chul Kim¹ · Ji-Yeon Park²

¹Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University;

²Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University

(Received February 2009; accepted March 2009)

Abstract

In order to overcome the lack of Korean credit rating migration data, we consider an empirical Bayes procedure to estimate credit rating migration matrices. We derive the posterior probabilities of Korean credit rating transitions by utilizing the Moody's rating migration data and the credit rating assignments from Korean rating agency as prior information and likelihood, respectively. Metrics based upon the average transition probability are developed to characterize the migration matrices and compare our Bayesian migration matrices with some given matrices. Time series data for the metrics show that our Bayesian matrices are stable, while the matrices based on Korean data have large variation in time. The bootstrap tests demonstrate that the results from the three estimation methods are significantly different and the Bayesian matrices are more affected by Korean data than the Moody's data. Finally, Monte Carlo simulations for computing the values of a portfolio and its credit VaRs are performed to compare these migration matrices.

Keywords: Credit migration matrices, empirical Bayes estimation, average transition probability, bootstrap, credit VaR.

¹Corresponding Author: Professor, Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University, Sangdo-dong, Dongjak-gu, Seoul 156-743, Korea. Email: sckim@ssu.ac.kr.