

# 부품의 고장자료를 이용하여 직병렬 시스템의 신뢰도를 추정하는 방법

김경미<sup>\*</sup>

건국대학교 산업공학과

## Reliability Estimation of Series-Parallel Systems Using Component Failure Data

Kyungmee O. Kim

Department of Industrial Engineering, Konkuk University

In the early design stage, system reliability must be estimated from life testing data at the component level. Previously, a point estimate of system reliability was obtained from the unbiased estimate of the component reliability after assuming that the number of failed components for a given time followed a binomial distribution. For deriving the confidence interval of system reliability, either the lognormal distribution or the normal approximation of the binomial distribution was assumed for the estimator of system reliability. In this paper, a new estimator is used for the component level reliability, which is biased but has a smaller mean square error than the previous one. We propose to use the beta distribution rather than the lognormal or approximated normal distribution for developing the confidence interval of the system reliability. A numerical example based on Monte Carlo simulation illustrates advantages of the proposed approach over the previous approach.

**Keyword:** unbiased estimator, mean square error, confidence interval

### 1. 서론

시스템의 신뢰도는 시스템이 주어진 운용환경에서 의도한 시간 동안 성공적으로 작동하는 확률로 정의된다. 새로운 시스템을 설계하거나 기존 시스템을 개선하고자 할 때 시스템의 신뢰도를 중요한 성능 측도로 사용하고 있으며 따라서 시스템 신뢰도에 대한 연구는 오랫동안 산학 연구자들의 관심을 끌어 왔다. 일반적으로 설계단계에서는 시스템의 신뢰도를 알 수 없고 시스템을 구성하는 부품들의 신뢰도와 그 연결 구조를 바탕으로 추정하여야 한다. 이때 부품의 신뢰도 또한 부품의 수명검사등을 통한 고장자료에 기초하여 추정한 것을 사용한다.

시스템을 설계하는 초기 단계에 서로 다른 시스템을 비교한다면 시스템의 신뢰도에 대한 점 추정치(point estimate)를 단순히 비교하는 것은 위험이 따른다. 부품의 신뢰도를 고장자료에 기초하여 추정하였으므로 부품 신뢰도의 추정치에 존재하는 불확실성은 시스템 신뢰도의 추정치에 그대로 전달되기 때문이다. 예를 들어 부품수준에서 집중적인 수명검사자료를 이용하여 신뢰도를 추정한 시스템은 적은 수명검사자료를 이용하여 신뢰도를 추정한 시스템보다 신뢰도 추정치의 값이 다소 작더라도 선호될 수 있다. 시스템 신뢰도의 점 추정치를 단순히 비교한다면 이러한 차이를 반영할 수 없다. 점 추정치 뿐만 아니라 신뢰구간을 고려하여 판단하여야 함은 자명하다. 따라

본 연구는 한국과학재단의 연구비지원(특정기초연구, 과제번호 R01-2006-000-10744-0)으로 수행되었으며 연구비를 지원해주신 한국과학재단에 감사드립니다.

\*연락처 : 김경미 교수, 143-701 서울시 광진구 화양동 1번지 건국대학교 산업공학과, Fax : 02-450-3525, E-mail : kyungmee@konkuk.ac.kr  
투고일(2009년 02월 17일), 심사일(1차 : 2009년 05월 26일, 2차 : 2009년 07월 25일), 게재확정일(2009년 07월 27일).

서 부품의 신뢰도 추정치에 기초하여 시스템 신뢰도와 그 신뢰구간을 추정하는 문제는 시스템 설계에서 대안평가를 위해 반드시 수행되어야 하는 중요한 문제이다.

부품 고장자료에 기초하여 시스템의 신뢰도를 추정하는 문제를 다루는 기존의 연구들은 주어진 시간동안 부품을 검사하였을 때 고장나는 부품의 수가 이항분포를 따른다고 가정하고 이항분포의 모비율에 대한 불편추정치를 이용하여 부품 신뢰도를 추정하고 있다. 이렇게 추정된 부품의 신뢰도를 사용하여 시스템의 신뢰도를 추정하고 시스템 신뢰도의 추정치가 대수정규분포나 이항분포를 따른다고 가정하여 시스템 신뢰도에 대한 신뢰구간을 추정하고 있다.

본 연구의 목적은 크게 두 가지이다. 첫째, 기존의 부품 신뢰도 추정치는 불편추정치이지만 부품의 신뢰도를 과소 추정하는 경향이 있다고 알려져 있다. 따라서 본 연구에서는 부품 신뢰도를 추정하기 위해 기존 문헌들에서 경험적으로 사용하고 있는 새로운 추정치를 사용한다. 이 추정치는 편의(bias)를 가지지만 기존의 추정치에 비해 분산이 작기 때문에 전체적으로 평균제곱오차(mean square error)가 작다. 둘째, 기존연구에서처럼 시스템 신뢰도의 추정치가 대수정규분포나 이항분포의 정규근사를 따른다고 가정하면 추정된 신뢰구간이 0과 1사이의 값을 벗어날 수 있음을 보인다. 따라서 본 연구에서는 이러한 분포 대신 베타분포를 사용할 것을 제안한다. 이론적으로나 시뮬레이션의 결과를 보면 시스템 신뢰도 추정치는 대수정규분포나 정규분포보다는 베타분포를 따른다고 가정하는 것이 타당하다고 보여진다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 제 2장에서는 부품의 수명 검사 자료를 이용하여 신뢰도를 추정하는 방법을 설명하고 제 3장에서는 추정된 부품 신뢰도를 이용하여 직병렬 시스템의 신뢰도를 추정하는 방법을 설명한다. 제 4장에서는 시스템 신뢰도에 대한 구간추정방법을 기술하고 제 5장에서는 시뮬레이션을 통한 수치 예제를 이용하여 기존 방법과 새로운 방법의 신뢰구간을 비교한다. 마지막으로 제 6장에서는 결론을 내린다.

## 2. 부품 신뢰도의 추정

부품  $i$ 가 고정된 시간  $t > 0$  동안 작동할 확률을  $r_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$  라고 하고 이들  $k$ 개의 부품의 수명은 서로 독립이라고 하자.  $k$ 개의 부품이 구조  $\phi$ 로 연결 조립된 시스템이 시간  $t > 0$  동안 작동할 확률은 식 (1)과 같이 표현 된다(Barlow and Proschan, 1975).

$$r_\phi(t) = h_\phi[r_1(t), r_2(t), \dots, r_k(t)] \quad (1)$$

식 (1)에서  $h_\phi[r_1(t), r_2(t), \dots, r_k(t)]$ 은 시스템 신뢰도를 나타내며 시스템 신뢰도가 부품 신뢰도와 시스템 구조의 함수임을 나타낸다. 시스템 신뢰도를 추정하기 위해서는 부품 신뢰도

$r_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ 를 먼저 추정하여야 함을 알 수 있다.

많은 연구들은 부품 신뢰도를 추정하기 위해 부품의 고장자료가 지수 분포나 와이블 분포등을 따른다고 가정하고 그 모수를 추정하여 사용하고 있다(Gertsbakh, 1982, 1989; Mawaziny and Buehler, 1967; Lieberman and Ross, 1971; Grubbs, 1971). 그런데 Coit(1997), Ramirez-Marquez (2006) 그리고 Jin and Coit(2008)은 부품의 고장자료에 특정한 수명분포를 가정하는 대신 고장난 부품의 수가 이항분포를 따른다고 가정하여 경험적으로 부품 신뢰도를 추정하고 있다. 즉, 확률변수  $X_i(t)$ 는  $n_i$ 개의 부품유형  $i$ 의 수명을 검사하였을 때 시간  $t$ 까지 살아남은 부품의 수를 나타낸다고 하고  $x_i(t)$ 는  $X_i(t)$ 의 실현값이라고 하자. Coit (1997), Ramirez-Marquez (2006) 그리고 Jin and Coit (2008)은 부품  $i$ 의 신뢰도  $r_i(t)$ 를 추정하기 위해 식 (2)를 사용한다.

$$\hat{r}_{i,old}(t) = \frac{x_i(t)}{n_i} \quad (2)$$

$X_i(t)$ 가 모수  $n_i$ 와  $r_i(t)$ 를 따르는 이항분포를 따르는 확률변수라고 가정하면  $E[\hat{r}_{i,old}(t)] = r_i(t)$ 이므로  $\hat{r}_{i,old}(t)$ 은  $r_i(t)$ 의 불편추정치(unbiased estimate)이며 그 분산은 다음과 같다 (Casella and Berger, 1990).

$$Var[\hat{r}_{i,old}(t)] = \frac{r_i(t)[1-r_i(t)]}{n_i}$$

일반적으로 식 (2)는 부품 신뢰도를 경험적으로 추정하는데 있어 과소추정하는 것으로 알려져 있다 (Wasserman, 2003). 예를 들어 수명자료에서  $t$ 까지 살아남은 부품이 없는 경우 식 (2)를 이용하여 부품 신뢰도를 추정하면 0이다. 부품 신뢰도를 경험적으로 추정하는 기존의 연구들에서는 식 (3)을 사용하고 있다(Wasserman, 2003).

$$\hat{r}_{i,new}(t) = \frac{x_i(t) + 1}{n_i + 1} \quad i = 1, \dots, k \quad (3)$$

본 연구에서는 식 (1) 대신 식 (3)을 사용하여 부품 신뢰도를 추정하고 시스템 신뢰도 추정치를 유도한 다음 기존의 신뢰도 추정치와 비교한다. 먼저  $x_i(t)$ 가 이항분포 확률변수의 실현값이라면 식 (3)의 추정량의 평균은 식 (4)와 같다.

$$E[\hat{r}_{i,new}(t)] = \frac{n_i r_i(t) + 1}{n_i + 1} \quad (4)$$

따라서 식 (3)의 추정량은 식 (5)과 같은 편의를 가진다.

$$bias[\hat{r}_{i,new}(t)] = E[\hat{r}_{i,new}(t)] - r_i(t) = \frac{1 - r_i(t)}{n_i + 1} \quad (5)$$

식 (5)에서 부품의 신뢰도가 커짐에 따라 또는 검사한 부품의 수가 증가함에 따라 그 편의가 작아짐을 알 수 있다. 새로운 추정량의 분산은 식 (6)과 같다.

$$\text{Var}[\hat{r}_{i,\text{new}}(t)] = \frac{n_i r_i(t) [1 - r_i(t)]}{(n_i + 1)^2} \quad (6)$$

새로운 추정량의 분산은 기존 추정량의 분산보다 작다는 것을 알 수 있다. 두 추정량의 평균제곱오차를 계산하면 각각 식 (7)와 식 (8)과 같다.

$$\text{MSE}[\hat{r}_{i,\text{old}}(t)] = \frac{r_i(t) [1 - r_i(t)]}{n_i} \quad (7)$$

$$\text{MSE}[\hat{r}_{i,\text{new}}(t)] = \frac{n_i r_i(t) [1 - r_i(t)]}{(n_i + 1)^2} + \left[ \frac{1 - r_i(t)}{n_i + 1} \right]^2 \quad (8)$$

만약  $r_i(t) \geq 0.5$ 이면  $\text{MSE}[\hat{r}_{i,\text{old}}(t)] > \text{MSE}[\hat{r}_{i,\text{new}}(t)]$  임을 보일 수 있다. 즉, 부품의 신뢰도가 0.5이상이라면 새로운 추정량은 편의(bias)를 가지지만 기존의 추정량보다 분산이 작기 때문에 그 편의를 상쇄하여 평균제곱오차가 작아지는 것을 볼 수 있다.

### 3. 시스템 신뢰도의 추정

$k$ 개의 서로 독립인 부품이 구조  $\phi$ 로 구성된 시스템의 신뢰도를 점 추정하면 식 (9)와 같다.

$$\hat{r}_\phi(t) = h_\phi[\hat{r}_1(t), \hat{r}_2(t), \dots, \hat{r}_k(t)] \quad (9)$$

여기서  $\hat{r}_i(t)$ 은 부품 신뢰도의 추정치로 식 (2)의  $\hat{r}_{i,\text{old}}(t)$  또는 식 (3)의  $\hat{r}_{i,\text{new}}(t)$ 를 나타낸다.

$k$ 개의 서로 독립인 부품이 직렬로 연결된 시스템의 경우 식 (9)은 식 (10)과 같다.

$$\hat{r}_s(t) = \prod_{i=1}^k \hat{r}_i(t) \quad (10)$$

또한 시스템 신뢰도 추정량의 평균과 분산은 식 (11)과 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{r}_s(t)] &= \prod_{i=1}^k E[\hat{r}_i(t)] \\ \text{Var}[\hat{r}_s(t)] &= E\left\{ \left[ \prod_{i=1}^k \hat{r}_i(t) \right]^2 \right\} - \left[ E\left( \prod_{i=1}^k \hat{r}_i(t) \right) \right]^2 \\ &= \prod_{i=1}^k E\{[\hat{r}_i(t)]^2\} - \prod_{i=1}^k \{E[\hat{r}_i(t)]\}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

새로운 추정량  $\hat{r}_{i,\text{new}}(t)$ 을 사용하여 직렬 시스템의 신뢰도 추정량, 평균 그리고 분산을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{r}_s(t) &= \prod_{i=1}^k \hat{r}_i(t) = \prod_{i=1}^k \left( \frac{x_i(t) + 1}{n_i + 1} \right) \\ E[\hat{r}_s(t)] &= \prod_{i=1}^k E[\hat{r}_i(t)] = \prod_{i=1}^k \left( \frac{E[x_i(t) + 1]}{n_i + 1} \right) \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{n_i r_i(t) + 1}{n_i + 1} \\ \text{Var}[\hat{r}_s(t)] &= \prod_{i=1}^k E\left[ \left( \frac{x_i(t) + 1}{n_i + 1} \right)^2 \right] - \prod_{i=1}^k \left[ E\left( \frac{x_i(t) + 1}{n_i + 1} \right) \right]^2 \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{n_i r_i(t) [1 - r_i(t)] + [n_i r_i(t) + 1]^2}{(n_i + 1)^2} \\ &\quad - \prod_{i=1}^k \frac{[n_i r_i(t) + 1]^2}{(n_i + 1)^2} \end{aligned}$$

시스템이 병렬인 경우 식 (9)은 식 (12)과 같다.

$$\hat{r}_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - \hat{r}_i(t)] \quad (12)$$

즉,

$$1 - \hat{r}_p(t) = \prod_{i=1}^k [1 - \hat{r}_i(t)]$$

이므로 직렬 시스템의 결과를 이용하면 병렬 시스템의 신뢰도 추정량의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[\hat{r}_p(t)] &= 1 - \prod_{i=1}^k \{1 - E[\hat{r}_i(t)]\} \\ \text{Var}[\hat{r}_p(t)] &= E\left\{ \left[ \prod_{i=1}^k [1 - \hat{r}_i(t)] \right]^2 \right\} - \left\{ E\left[ \prod_{i=1}^k [1 - \hat{r}_i(t)] \right] \right\}^2 \\ &= \prod_{i=1}^k E\{[1 - \hat{r}_i(t)]^2\} - \prod_{i=1}^k \{E[1 - \hat{r}_i(t)]\}^2 \end{aligned}$$

이제 시스템이  $a$ 개의 서브 시스템이 직렬로 연결되고 각 서브 시스템은  $a_i$ 개의 부품이 병렬로 연결되어 있다고 하자.  $\hat{r}_{ij}(t)$ 를  $i$ 번째 서브 시스템의  $j$ 번째 부품의 신뢰도 추정치라고 하면 직병렬 시스템의 신뢰도를 추정하면 다음과 같다.

$$\hat{r}_{sp}(t) = \prod_{i=1}^a \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{a_i} [1 - \hat{r}_{ij}(t)] \right\}$$

직병렬 시스템의 신뢰도 추정량의 평균과 분산은 식 (13)과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E[\widehat{r}_{sp}(t)] &= \prod_{i=1}^a \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{a_i} \{1 - E[\widehat{r}_{ij}(t)]\} \right\} \\
 \text{Var}[\widehat{r}_{sp}(t)] &= \prod_{i=1}^a \left( 1 - 2 \prod_{j=1}^{a_i} [1 - E(\widehat{r}_{ij}(t))] \right. \\
 &\quad \left. + \prod_{j=1}^{a_i} \{ [1 - E(\widehat{r}_{ij}(t))]^2 + \text{Var}(\widehat{r}_{ij}(t)) \} \right) \\
 &\quad - \prod_{i=1}^a \left( 1 - \prod_{j=1}^{a_i} [1 - E(\widehat{r}_{ij}(t))] \right)^2 \quad (13)
 \end{aligned}$$

그런데 식 (13)의  $E[\widehat{r}_{ij}(t)]$ 과  $\text{Var}[\widehat{r}_{ij}(t)]$ 은 미지의  $r_{ij}(t)$ 를 포함하고 있다. Coit(1997)은 식 (13)을 추정하기 위해  $r_{ij}(t)$  대신 식 (2)를 대입하였다. 한편 Jin and Coit(2008)은 Coit(1997)의 분산 추정량이 불편추정량이 아님을 보이고

$$\widehat{\text{Var}}[r_{i,old}(t)] = \frac{r_{i,old}(t) [1 - r_{i,old}(t)]}{n_i - 1}$$

을 사용하여 시스템 신뢰도 추정량의 분산에 대한 불편추정량을 유도하였다.

#### 4. 시스템 신뢰도의 구간추정

Coit(1997)은 시스템의 신뢰도 추정량  $\widehat{r}_\phi(t)$ 을 이용하여  $r_\phi(t)$ 의 신뢰구간을 추정하기 위해  $\widehat{r}_\phi(t)$ 가 평균과 분산이 각각 식 (14)와 식 (15)와 같은 대수정규분포(lognormal distribution)를 따른다고 가정한다.

$$E[\widehat{r}_\phi(t)] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (14)$$

$$\text{Var}[\widehat{r}_\phi(t)] = \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1] \quad (15)$$

식 (14)와 식 (15)를 제 3장에서 구한 시스템 신뢰도의 평균과 분산의 추정치와 동일하다고 두면  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 를 추정할 수 있으며 그 결과  $r_\phi(t)$ 에 대한  $100(1-C)\%$  근사 신뢰구간을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Pr \left[ \widehat{r}_\phi(t) \exp\left(\frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2 - z_{C/2}\widehat{\sigma}\right) \leq r_\phi(t) \right. \\
 \left. \leq \widehat{r}_\phi(t) \exp\left(\frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2 + z_{C/2}\widehat{\sigma}\right) \right] = 1 - C
 \end{aligned}$$

Ramirez-Marquez and Jiang (2006)은 시스템의 수명자료는 모수가  $N$ 과  $r_\phi(t)$ 인 이항분포를 따른다고 가정하고 이항분포의 정규근사를 이용하여  $r_\phi(t)$ 에 대한  $100(1-C)\%$  근사 신뢰구간을 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned}
 \Pr \left[ \widehat{r}_\phi(t) - z_{C/2} \sqrt{\frac{\widehat{r}_\phi(t)[1 - \widehat{r}_\phi(t)]}{N}} - \frac{1}{2N} \leq r_\phi(t) \right. \\
 \left. \leq \widehat{r}_\phi(t) + z_{C/2} \sqrt{\frac{\widehat{r}_\phi(t)[1 - \widehat{r}_\phi(t)]}{N}} + \frac{1}{2N} \right] = 1 - C
 \end{aligned}$$

여기서  $N$ 은 시스템 신뢰도가 이항분포를 따른다는 사실에 기초하여 식 (16)과 같이 추정되었다.

$$\widehat{N} = \frac{\widehat{r}_\phi(t) [1 - \widehat{r}_\phi(t)]}{\widehat{\text{Var}}[\widehat{r}_\phi(t)]} \quad (16)$$

기존의 방법에서처럼 대수정규분포나 이항분포의 정규분포근사를 이용하여 신뢰구간을 추정하면 시스템 신뢰도의 값이 0과 1사이의 값을 가진다는 사실에 위배되는 신뢰구간을 생성할 수 있다. 왜냐하면 대수정규분포를 따르는 확률변수는  $[0, \infty)$ 의 값을 가질 수 있으며 정규분포를 따르는 확률변수는  $(-\infty, \infty)$ 의 값을 가질 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 시스템 신뢰도의 신뢰구간을 추정하기 위해 시스템 신뢰도의 추정량  $\widehat{r}_\phi(t)$ 가 모수가  $\alpha$ 와  $\beta$ 인 베타분포를 따른다고 가정한다. 베타분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \\
 0 &\leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0
 \end{aligned}$$

베타분포를 가정하는 이유는 크게 두 가지이다. 첫째, 베타분포의 경우 시스템 추정량이 0과 1사이임을 보장한다. 둘째, Ramirez-Marquez and Jiang (2006)은 시스템의 수명자료가 모수가  $N$ 과  $r_\phi(t)$ 인 이항분포를 따른다고 가정한다. 그런데  $r_\phi(t)$ 는 부품 신뢰도의 함수이며 부품 신뢰도가 추정됨에 따라 시스템 신뢰도도 변화하게 되므로  $r_\phi(t)$ 를 확률변수로 가정할 수 있다. 즉,  $N$ 개의 시스템을 수명검사할 때 각 시스템의 고장 확률은  $r_\phi(t)$ 이며  $r_\phi(t)$ 는 베타분포를 따르는 확률변수로 가정하는 것이다. 이 경우 시간  $t$ 까지 고장난 시스템의 수는 Ramirez-Marquez and Jiang (2006)에서처럼 이항분포가 아닌 베타-이항분포를 따르게 된다(Casella and Berger, 1990).

시스템 신뢰도 추정량이 모수가  $\alpha$ 와  $\beta$ 인 베타분포를 따른다고 가정하면 그 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E[\widehat{r}_\phi(t)] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\
 \text{Var}[\widehat{r}_\phi(t)] &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (17)
 \end{aligned}$$

이때 시스템 추정량  $\widehat{r}_\phi(t)$ 의 평균과 분산을 추정한 후 식 (14)에 대입하면  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 추정할 수 있다. 베타분포의 역누적값은 F 분포를 이용하여 구할 수 있으며(Wasserman, 2003) 따라

서  $r_\phi(t)$ 의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\Pr \left[ \frac{1}{1 + (\hat{\beta}/\hat{\alpha})F_{2\hat{\beta}, 2\hat{\alpha}, 1-C/2}} \leq r_\phi(t) \leq \frac{1}{1 + (\hat{\beta}/\hat{\alpha})F_{2\hat{\beta}, 2\hat{\alpha}, C/2}} \right] = 1 - C \quad (18)$$

여기서  $F_{u,v,C}$ 는 자유도가 각각  $u$ 와  $v$ 인 F 분포에서 왼쪽 면적이  $C$ 인 임계치 값을 나타낸다.

### 5. 사례분석

#### 5.1 신뢰도 추정의 수치적 비교

<Figure 1>과 같은 직병렬 시스템에서 각 구성 부품의 신뢰도를 수명 검사 자료로부터 추정하고 이를 이용하여 시스템 신뢰도를 추정하고자 한다. 부품의 신뢰도에 대한 수명검사 자료가 <Table 1>과 같다고 하자.

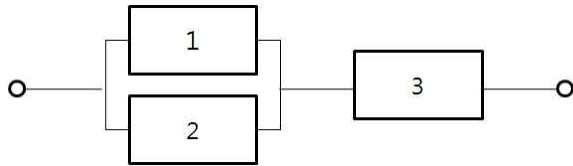


Figure 1. Series-Parallel system for example 1

Table 1. Illustrative number of failed components in life testing

$i$	$n_i$	$x_i(t)$
1	25	4
2	17	3
3	50	2

<Table 1>의 부품을 이용하여 <Figure 1>과 같이 직병렬 시스템으로 조립하면 시스템 신뢰도는 다음과 같다.

$$r_{sp}(t) = \{1 - [1 - r_1(t)][1 - r_2(t)]\}r_3(t)$$

식 (2)와 식 (3)의 부품 신뢰도 추정치를 이용하고 식 (13)을 이용하여 시스템 신뢰도와 그 분산을 추정하면 <Table 2>와 같다. 제안된 방법이 기존 방법보다 시스템 신뢰도는 크고 분산과 평균제곱오차는 작은 것을 볼 수 있다.

Table 2. Estimation of system reliability and its variance

	식 (2)의 사용	식 (3)의 사용
$\hat{r}_{sp}(t)$	0.9328941	0.9361488
$\hat{E}[\hat{r}_{sp}(t)]$	0.9328941	0.9391630
$\widehat{Var}[\hat{r}_{sp}(t)]$	0.0011239	0.0009814
MSE	0.0011239	0.0009905

먼저 제안된 방법으로 시스템 신뢰도를 계산해 본다. 시스템 신뢰도 추정치가 베타분포를 따른다고 가정하고 식 (17)을 이용하면  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 추정치는 다음 두 식의 해이다.

$$0.939163 = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}$$

$$0.0009814 = \frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}}{(\hat{\alpha} + \hat{\beta})^2(\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 1)}$$

즉,  $\hat{\alpha} = 53.7377$ 과  $\hat{\beta} = 3.481014962$ 이다. 이제 미지의 시스템 신뢰도에 대한 신뢰구간은 식 (18)을 이용하여 다음과 같이 추정된다.

$$90\% \text{ 신뢰구간}[0.8747691, 0.9796618]$$

$$95\% \text{ 신뢰구간}[0.8587451, 0.9841205]$$

$$99\% \text{ 신뢰구간}[0.8246701, 0.9906929]$$

Coit(1997)이 제안한 방법으로 시스템 신뢰도를 계산하기 위해서는 먼저 식 (14)와 식 (15)를 이용하여  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 를 추정하여야 한다. 즉  $\hat{\mu}$ 와  $\hat{\sigma}^2$ 는 다음 두 식의 해로  $\hat{\mu} = -0.070108876$ 이고  $\hat{\sigma}^2 = 0.001290573$ 이다.

$$0.9328941 = \exp\left(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)$$

$$0.0011239 = \exp(2\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2) [\exp(\hat{\sigma}^2) - 1]$$

따라서 Coit(1997)의 방법을 사용하여 신뢰구간을 추정하면 다음과 같다.

$$90\% \text{ 신뢰구간}[0.879933518, 0.990319478]$$

$$95\% \text{ 신뢰구간}[0.870028665, 1.001593782]$$

$$99\% \text{ 신뢰구간}[0.850990936, 1.024000685]$$

Ramirez-Marquez and Jiang(2006)가 제안한 바와 같이 이항분포의 정규근사기법을 이용하여 신뢰구간을 추정하면 다음과 같다.

$$90\% \text{ 신뢰구간}[0.868773703, 0.979061175]$$

$$95\% \text{ 신뢰구간}[0.858209625, 0.989625253]$$

$$99\% \text{ 신뢰구간}[0.837562734, 1.010272145]$$

세 방법으로 추정된 신뢰구간을 비교해 보면 다음 사실을 알 수 있다. 첫째, Coit(1997)과 Ramirez-Marquez and Jiang(2006)의 방법을 사용하면 시스템 신뢰도에 대한 신뢰구간에서 1보다 큰 값을 가질 수 있다. 둘째, 비록 제안된 방법이 편의추정치이지만 신뢰구간의 폭은 불편추정치를 사용한 다른 두 방법보다 좁다. 예를 들어서 95% 신뢰구간을 보면 제안된 방법의 신뢰구간은 Ramirez-Marquez and Jiang(2006)의 신뢰구간에 포함된다. 셋째, 시스템 신뢰도에 대한 점추정의 경우 편의추정치를 사용한 제안된 방법보다 불편추정치를 사용한 Coit(1997)이나

Ramirez-Marquez and Jiang(2006)의 추정치가 작은 값을 가지지만 구간추정의 경우 오히려 큰 값을 가진다. 이는 시스템 신뢰도 추정치가 반드시 0과 1사이의 값을 보장하지 못하는 대수정규분포나 근사정규분포를 사용함으로 해서 생긴 현상이라고 볼 수 있다.

5.2 시뮬레이션을 통한 타당성 검토

예제 1: <Figure 1>의 직병렬 시스템에 대한 신뢰도의 신뢰구간을 추정하기 위한 방법들을 비교하기 위해 각 구성 부품의 신뢰도  $r_i(t)$ 가 <Table 3>과 같이 주어지고 하자. 부품 신뢰도가 알려져 있으므로 시스템 신뢰도는 다음과 같이 얻어진다.

$$r_{sp}(t) = \{1 - [1 - r_1(t)][1 - r_2(t)]\}r_3(t) = 0.932894118$$

분석자는  $r_i(t)$ 나  $r_{sp}(t)$  값을 알지 못한다고 가정하고 몬테칼로 시뮬레이션을 이용하여 신뢰구간을 추정한 결과를 비교하고자 한다.

Table 3. Component reliability and number of components for life testing in example 1

$i$	$r_i(t)$	$n_i$
1	0.840000000	25
2	0.823529412	17
3	0.960000000	50

기존방법의 경우 시스템 신뢰도를 추정하면 다음과 같다.

$$r_{s0} = \{1 - [1 - \hat{r}_{1,old}(t)][1 - \hat{r}_{2,old}(t)]\} \hat{r}_{3,old}(t) = \left[1 - \frac{25 - x_1}{25} \frac{17 - x_2}{17}\right] \frac{x_3}{50}$$

본 연구에서 제안한 방법의 경우 시스템 신뢰도는 다음과 같이 추정된다.

$$r_{s1} = \{1 - [1 - \hat{r}_{1,new}(t)][1 - \hat{r}_{2,new}(t)]\} \hat{r}_{3,new}(t) = \left[1 - \frac{25 - x_1}{26} \frac{17 - x_2}{18}\right] \frac{x_3 + 1}{51}$$

이때  $x_1, x_2, x_3$ 은 각각 이항분포 ( $n_i, r_i(t)$ )의 실현값으로 여기서는 시뮬레이션을 통해 생성된 난수를 뜻한다.

<Figure 2>는 시스템 신뢰도를 추정하는 절차를 1000번 반복하여 얻은 히스토그램을 보여준다.  $r_{s0}$ 의 경우 히스토그램에서 왼쪽 꼬리가 조금 길며  $r_{s1}$ 보다 작은 값의 시스템 신뢰도 추정치를 가지는 경우가 빈번하다는 것을 볼 수 있다.  $r_{s0}$ 보다  $r_{s1}$ 의 평균값이  $r_{sp}(t)$ 에서 벗어나는데 이는  $r_{s0}$ 의 경우 앞에서 설명한 바와 같이 부품 신뢰도 추정치가 불편추정치이지만  $r_{s1}$ 은 편의를 가지기 때문이다. 두 추정량의 평균제곱오차를 보면

$$MSE_{r_{s0}} = 0.0012 + (0.9336 - 0.932894118)^2 = 0.0012$$

와

$$MSE_{r_{s1}} = 0.0011 + (0.9368 - 0.932894118)^2 = 0.001115$$

로  $r_{s1}$ 이 평균제곱오차가 적음을 알 수 있다.

이제 시스템 신뢰도에 대한 구간추정을 고려해 보자. <Figure 3>은 생성된 시스템 신뢰도 추정치의 분포에 Coit(1997)에서 가정한 것과 같이 대수정규분포를 적합시킨 결과를 보여준다. 시스템 신뢰도의 추정치가 1보다 큰 경우에 대수정규분포가 부적합함을 분명히 볼 수 있다. Coit(1997)가 제시한 절차로 신뢰구간을 추정하면 다음과 같다.

- 90% 신뢰구간[0.878947404, 0.993016142]
- 95% 신뢰구간[0.868734003, 1.004690684]
- 99% 신뢰구간[0.849113870, 1.027905669]

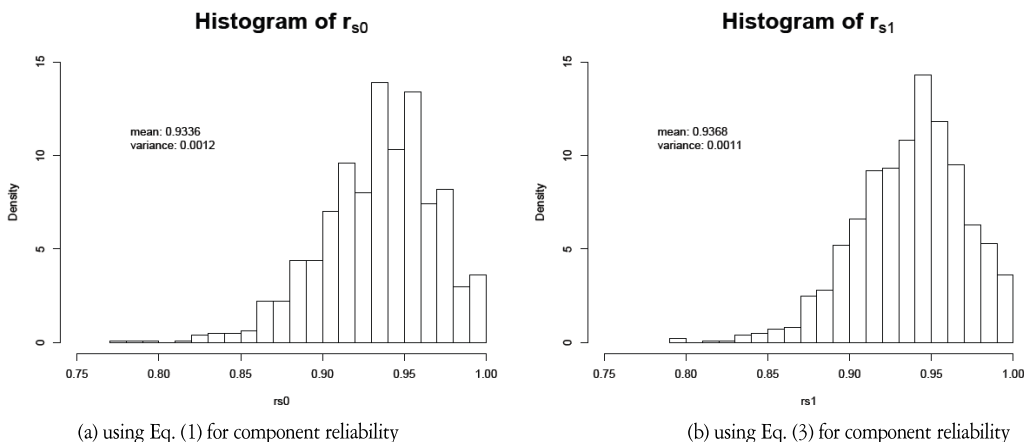


Figure 2. Histogram of system reliability estimate

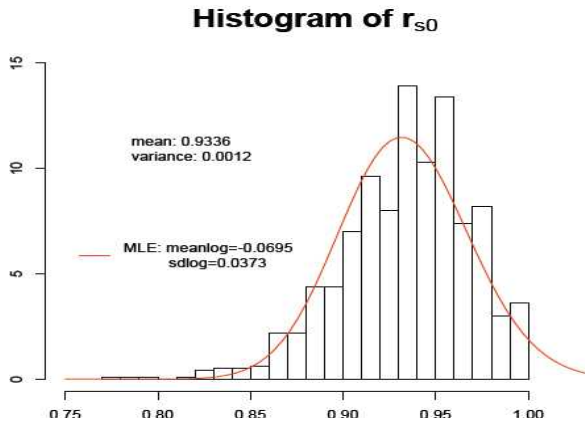


Figure 3. Fitting lognormal distribution for the system reliability estimate

Ramirez-Marquez and Jiang(2006)가 제안한 바와 같이 이항분포의 정규근사기법을 이용하여 신뢰구간을 추정하면 다음과 같다.

- 90% 신뢰구간[0.866449616, 0.980776992 ]
- 95% 신뢰구간[0.855463554, 0.991656907 ]
- 99% 신뢰구간[0.833991919, 1.012921082 ]

Ramirez-Marquez and Jiang(2006)가 제안한 바와 같이 이항분

포의 정규분포 근사기법을 적용하기 위해서는  $np \geq 5$ 와  $n(1-p) \geq 5$ 를 만족하여야 하므로 시스템 신뢰도  $p$ 가 1에 가까운 값을 취하거나 0에 가까운 값을 취하는 경우 수명검사된 시스템의 수  $n$ 이 아주 커야 한다. 이 예제의 경우 추정된 시스템 신뢰도가 0.9328941이며 이항분포의 정규분포 근사기법을 적용하기 위해서는 수명검사된 시스템의 수는 75개 이상이어야 한다. 이는 수명검사된 부품수준보다도 훨씬 큰 값이며, 시스템 신뢰도  $p$ 가 1에 가까운 값을 취하거나 0에 가까운 값을 취하는 경우 이항분포의 정규분포 근사기법을 사용하기 어렵다는 것을 의미한다.

한편, Coit(1997)과 Ramirez-Marquez and Jiang(2006)의 신뢰구간은 모두 시스템 신뢰도의 참값인 0.932894118을 포함하고 있으나 신뢰상한의 경우 1보다 큰 값을 가질 수 있다.

한편, <Figure 2>의 히스토그램을 보면 부품 신뢰도를 추정하는데 있어  $\hat{r}_{i,old}(t)$ 나  $\hat{r}_{i,new}(t)$  중 어느 것을 사용하든지 시스템의 신뢰도 추정치가 왼쪽으로 약간 긴 꼬리를 가지는 분포이며 시스템 신뢰도 추정치가 0과 1사이의 값을 가짐을 알 수 있다. 두 신뢰도 추정치에 대해 베타분포를 적합시킨 결과는 <Figure 4>와 같다. 이항분포를 가정하고 부품 신뢰도 추정치를 추정할 경우 시스템 신뢰도 추정치는 정규분포나 대수정규분포보다는 베타분포가 훨씬 잘 적합되는 것을 볼 수 있다. 베타분포를 이용하여 신뢰구간을 추정하면 다음과 같다.

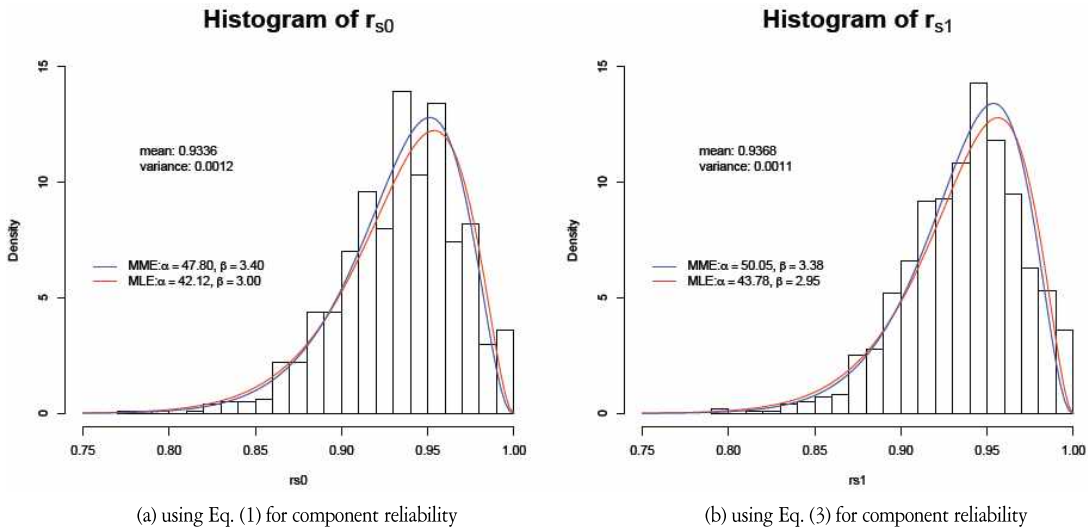


Figure 4. Fitting beta distribution for system reliability estimate

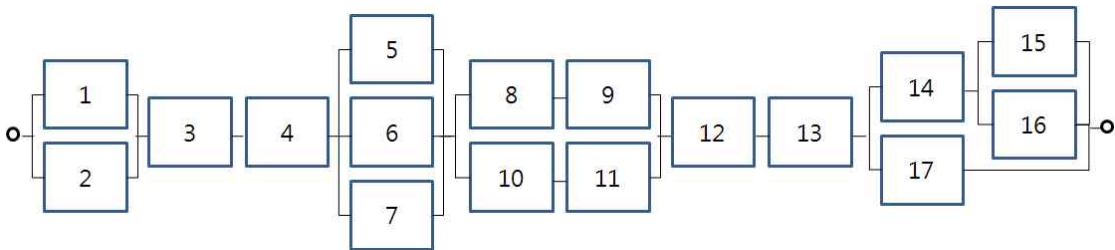


Figure 5. Series-Parallel system with example 2.

90% 신뢰구간[0.870179613, 0.982452398]  
 95% 신뢰구간[0.852380190, 0.986741717]  
 99% 신뢰구간[0.814361729, 0.992797103]

**예제 2 :** <Figure 5>의 직병렬 시스템을 고려하여 (Ramirez-Marquez and Jiang, 2006) <Table 4>와 같은 부품 신뢰도를 가정하여 보자.

<Figure 6>은 부품 신뢰도를 추정하기 위해 식 (1)을 사용한 경우 시스템 신뢰도의 추정량의 분포를 보여준다. 시스템 신뢰도의 값이 0에 가까워짐에 따라 시스템 신뢰도의 추정량은 오른쪽으로 꼬리가 긴 분포를 가지면 베타분포나 대수정규분포가 모두 잘 적합되고 있음을 볼 수 있다.

### 6. 결론

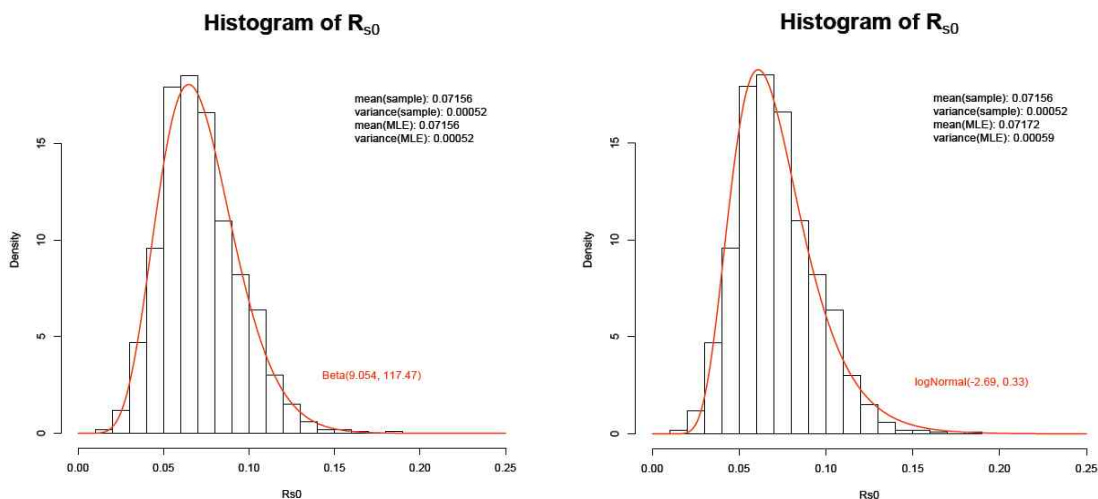
본 연구에서는 부품 신뢰도 추정치에 기초하여 시스템의 신뢰도를 추정하는 문제를 살펴보았다. 기존 연구들은 부품 신뢰도를 추정하기 위해 부품의 고장자료가 이항분포를 따른다고 가정하고 이항분포의 모비율에 대한 불편추정량을 사용하였으나 본 연구에서는 편의추정량을 고려하였다. 부품 신뢰도가

커질수록 그리고 수명검사한 부품의 수가 증가할 수록 편의는 작아진다. 제한된 편의추정량은 불편추정량에 비해 분산이 작기 때문에 편의와 분산을 함께 고려한 평균제곱오차의 측면에서 기존의 불편추정량보다 더 좋은 추정량이 된다. 즉, 기존의 추정량에 비해 평균제곱오차가 작으므로 더 좁은 신뢰구간을 가지고 임무시간이 길어서 부품신뢰도가 0에 가까운 경우 기존의 시스템 신뢰도 추정량이 과소추정하는 단점을 보완할 수 있다.

한편 시스템 신뢰도의 구간추정을 위하여 부품 신뢰도 추정량의 평균과 분산을 추정하고 이를 이용하여 시스템 신뢰도 추정량의 평균과 분산을 추정한 다음 시스템 신뢰도에 대한 신뢰구간을 계산하게 된다. 그런데 기존 연구의 경우 시스템 신뢰도 추정량의 분포로 대수정규분포나 이항분포를 가정하고 대수정규분포의 신뢰구간이나 이항분포의 정규근사를 이용한 신뢰구간을 사용하였다. 본 연구에서는 베타분포를 제안하였다. 시스템 신뢰도 추정량의 분포는 시스템의 구조나 부품의 신뢰도 값에 따라 달라지므로 제시한 방법이 기존방법보다 항상 좋은 방법이라고 말할 수는 없다. 그렇지만 예제 1과 예제 2에서 볼 수 있는바와 같이 이항분포의 정규분포 근사는 시스템 신뢰도가 0이나 1에 가까운 경우 사용할 수 없으며 시스템 신뢰도가 높은 경우 대수정규분포는 제한된 방법보다 훨씬 넓은 신뢰구간을 제시하게 된다. 물론 시스템 신뢰도가 0.5

**Table 4.** Component reliability and number of components for life testing in example 2

$i$	$r_i(t)$	$n_i$	$i$	$r_i(t)$	$n_i$	$i$	$r_i(t)$	$n_i$
1	0.3	25	7	0.8	16	13	0.99	50
2	0.3	25	8	0.92	25	14	0.9	50
3	0.4	50	9	0.95	25	15	0.83	25
4	0.5	50	10	0.92	25	16	0.83	25
5	0.3	17	11	0.95	25	17	0.88	50
6	0.2	17	12	0.96	50			



**Figure 6.** Fitting beta and log normal distributions for system reliability estimate



근처의 값을 가진다면 정규분포 근사기법이 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing* Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Casella, G. and Berger, R. (1990), *Statistical Inference*, Wadworth and Brooks, California.
- Coit, D. W. (1997), System reliability confidence intervals for complex systems with estimated component reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, **46**(4), 487-493.
- Gertsbakh, I. B. (1989), *Statistical Reliability Theory*, Marcel Dekker.
- Gertsbakh, I. B. (1982), Confidence limits for highly reliable coherent systems

- with exponentially distributed lifetimes, *Journal of American Statistical Association*, **77**, 673-678.
- Grubbs, F. E. (1971), Approximate confidence bounds for the reliability of a series system for which each component has an exponential time-to-fail distribution, *Technometrics*, **13**, 865-871.
- Jin, T. and Coit, D. W. (2008), Unbiased variance estimates for system reliability estimate using block decompositions, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**(3), 458-464.
- Lieberman, L. and Ross, S. M. (1971), Confidence limits for independent series system, *Journal of American Statistical Association*, **66**, 837-840.
- Mawaziny, A. H. and Buehler, R. J. (1967), Confidence limits for the reliability of a series system, *Journal of American Statistical Association*, **62**, 1452-1459.
- Rmirez-Marquez, J. E. and Jiang, W. (2006), On improved confidence bounds for system reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**(1), 26-36.
- Wasserman G. S. (2003), *Reliability Verification, Testing, and Analysis in Engineering Design*, Marcel Dekker Inc.



### 김경미

연세대학교 응용통계학과 학사 및 석사  
Texas A&M 산업공학과 박사  
현재: 건국대학교 산업공학과 부교수  
관심분야: 품질 및 신뢰성 공학